УДК 517.95

М. І. Іванчов

ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Встановлено умови існування та єдиності гладкого розв'язку задачі з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння в криволінійному прямокутнику, розташування криволінійної частини якого визначається функцією, що є добутком невідомої функції часу та заданої функції просторової змінної.

До обернених задач і задач з невідомими (або вільними) межами приводить цілий ряд важливих технологічних процесів, пов'язаних як з фазовими переходами в тілах, так і з визначенням новоутворень всередині тіл із відомими властивостями [13–16]. В одновимірному випадку рух невідомої межі описується невідомою функцією, що залежить від часу. Такі задачі достатньо повно вивчені як для лінійних, так і для квазілінійних рівнянь параболічного типу [5–8, 12]. Отримані для них результати були перенесені на двовимірний випадок, в якому область є криволінійним прямокутником, розташування якого визначається невідомою функцією, залежною від часу [1–4]. При цьому, крім знаходження невідомої межі, ставилось завдання визначення якісних властивостей новоутворень. Оскільки в задачах такого типу часто найважливішим питанням є динаміка процесу, тобто зміна розташування невідомої межі в залежності від часу, то це дає можливість моделювати рух невідомої межі, припускаючи, що зміна положення кожної точки межі визначається однією і тією ж невідомою функцією, залежною від часу. У цій роботі такий підхід використано для розв'язання задачі з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння.

1. Формулювання задачі та основні припущення. В області $\Omega_T \equiv \equiv \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < h,\ 0 < y_2 < g(t)\psi(y_1),\ 0 < t < T\}$ з частиною межі $y_2 = = g(t)\psi(y_1)$, рух якої визначається невідомою функцією $g = g(t) > 0$, розглянемо задачу знаходження невідомих $(g(t), u(y_1, y_2, t))$, які задовольняють рівняння

$$u_t = \Delta u + b_1(y_1, y_2, t)u_{y_1} + b_2(y_1, y_2, t)u_{y_2} + c(y_1, y_2, t)u + f(y_1, y_2, t), \quad (1)$$

початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(y_1, y_2), \qquad 0 \le y_1 \le h, \qquad 0 \le y_2 \le g(0)\psi(y_1), \quad (2)$$

крайові умови

$$u|_{y_1=0} = \mu_1(y_2, t), \qquad 0 \le y_2 \le \psi(0)g(t),$$

$$u|_{y_1=h} = \mu_2(y_2, t), \qquad 0 \le y_2 \le \psi(h)g(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

$$u|_{y_2=0} = \mu_3(y_1, t), \quad u|_{y_2=\psi(y_1)g(t)} = \mu_4(y_1, t), \quad 0 \le y_1 \le h, \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

та додаткову умову

$$\int_0^h dy_1 \int_0^{g(t)\psi(y_1)} u(y_1, y_2, t)\, dy_2 = \mu_5(t), \qquad 0 \le t \le T. \quad (4)$$

Заміною змінних $x_1 = y_1$, $x_2 = \dfrac{y_2}{g(t)}$, $t = t$ задачу (1)–(4) зводимо до задачі в області $Q_T \equiv \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < h,\ 0 < x_2 < \psi(x_1),\ 0 < t < T\}$ з відомою фіксованою межею:

$$v_t = v_{x_1x_1} + \frac{1}{g^2(t)} v_{x_2x_2} + b_1(x_1, x_2g(t), t)v_{x_1} +$$

$$+\left(b_2(x_1, x_2g(t), t) + \frac{x_2g'(t)}{g(t)}\right)v_{x_2} +$$

$$+ c(x_1, x_2g(t), t)v + f(x_1, x_2g(t), t), \quad (x_1, x_2, t) \in Q_T , \qquad (5)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2g(0)), \qquad 0 \le x_1 \le h, \qquad 0 \le x_2 \le \psi(x_1) , \qquad (6)$$

$$v|_{x_1=0} = \mu_1(x_2g(t), t), \qquad 0 \le x_2 \le \psi(0) ,$$

$$v|_{x_1=h} = \mu_2(x_2g(t), t), \qquad 0 \le x_2 \le \psi(h), \qquad 0 \le t \le T ,$$

$$v|_{x_2=0} = \mu_3(x_1, t), \quad v|_{x_2=\psi(x_1)} = \mu_4(x_1, t), \quad 0 \le x_1 \le h, \quad 0 \le t \le T , \qquad (7)$$

$$g(t) \iint_D v(x_1, x_2, t)\, dx_1\, dx_2 = \mu_5(t), \qquad 0 \le t \le T , \qquad (8)$$

де $D = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < h, 0 < x_2 < \psi(x_1)\}$.

Припустимо, що виконуються умови:

(A1) $\varphi \in C([0,h] \times [0,\infty)), \qquad \mu_i \in C([0,\infty) \times [0,T]), \qquad i = 1,2 ,$

$\mu_j \in C([0,h] \times [0,T]), \qquad j = 3,4, \qquad \mu_5 \in C^1[0,T] ,$

$b_k, c, f \in C([0,h] \times [0,\infty) \times [0,T]), \qquad k = 1,2 ;$

(A2) $\varphi(y_1, y_2) \ge \varphi_0 > 0, \qquad 0 \le y_1 \le h, \qquad 0 \le y_2 < \infty ,$

$\mu_i(y_2, t) \ge \mu_{i0} > 0, \qquad i = 1,2, \qquad 0 \le y_2 < \infty, \qquad 0 \le t \le T ,$

$\mu_i(y_1, t) > 0, \qquad 0 \le y_1 \le h, \qquad 0 \le t \le T, \qquad i = 3,4 ,$

$\mu_5(t) > 0, \qquad 0 \le t \le T ,$

$f(y_1, y_2, t) \ge 0, \qquad (y_1, y_2, t) \in [0,h] \times [0,\infty) \times [0,T] ,$

$\psi(y_1) > 0, \qquad 0 \le y_1 \le h .$

З припущень **(A1), (A2)** і принципу максимуму [9, с. 25] випливає оцінка

$$u(y_1, y_2, t) \ge M_0 > 0, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{\Omega}_T ,$$

де стала M_0 визначається заданими величинами. Тоді з використанням (8) отримуємо

$$v(x_1, x_2, t) \ge M_0 > 0, \quad (x_1, x_2, t) \in \bar{Q}_T, \qquad g(t) \le K_1 < \infty, \qquad t \in [0,T] . \qquad (9)$$

Маючи оцінку (9), встановлюємо обмеженість розв'язку задачі (1)−(4) зверху:

$$u(y_1, y_2, t) \le M_1 < \infty, \qquad (y_1, y_2, t) \in \bar{\Omega}_T ,$$

звідки для розв'язку задачі (5)−(8) маємо

$$v(x_1, x_2, t) \le M_1 < \infty, \quad (x_1, x_2, t) \in \bar{Q}_T, \quad g(t) \ge K_0 > 0, \qquad t \in [0,T] . \qquad (10)$$

Зазначимо також, що з урахуванням припущень **(A1)**, **(A2)** з умови (4) однозначно визначається значення $g(0)$.

Надалі будемо припускати, що, крім умов **(A1), (A2)**, виконуються такі умови:

(A3) $\mu_1 \in C^{2,1}([0, K_1\psi(0)] \times [0, T])$, $\mu_2 \in C^{2,1}([0, K_1\psi(h)] \times [0, T])$,

$\mu_i \in C^{2,1}([0, h] \times [0, T])$, $i = 3, 4$, $b_1, b_2, c, f \in C^{1,0}(\bar{Q})$,

де

$$Q \equiv \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < h,\ 0 < x_2 < K_1\psi(x_1),\ 0 < t < T\},$$

$$\varphi \in C^2(\bar{D}_0),$$

$$D_0 \equiv \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < h,\ 0 < x_2 < g(0)\psi(x_1)\},$$

$$\psi \in C^2[0, h], \quad \lim_{y_1 \to 0} \psi'(y_1) = +\infty, \quad \lim_{y_1 \to h} \psi'(y_1) = -\infty;$$

(A4) − умови узгодження нульового порядку [9, с. 363].

2. Зведення задачі (5)−(8) до системи рівнянь. Зведемо задачу (5)−(7) до задачі з нульовими крайовими та початковою умовами. Введемо позначення

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{g^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - b_1(x_1, x_2 g(t), t) \frac{\partial}{\partial x_1} - \\ - b_2(x_1, x_2 g(t), t) \frac{\partial}{\partial x_2} - c(x_1, x_2 g(t), t), \tag{11}$$

$$\mu_0(x_1, x_2, t, g(t)) = \mu_1(x_2 g(t), t) + \mu_1(0, t) - \mu_3(x_1, t) - \\ - \frac{x_1}{h}\left(\mu_2(x_2 g(t), t) - \mu_2(0, t) - \mu_1(x_2 g(t), t) + \mu_1(0, t)\right) - \\ - \frac{x_2}{\psi(x_1)}\Big(\mu_4(x_1, t) - \mu_3(x_1, t) - \mu_1(g(t)\psi(x_1), t) + \mu_1(0, t) - \\ - \frac{x_1}{h}\left(\mu_2(g(t)\psi(x_1), t) - \mu_2(0, t) - \mu_1(g(t)\psi(x_1), t) + \mu_1(0, t)\right)\Big), \tag{12}$$

$$v_0(x, t) = \varphi(x_1, x_2 g(0)) + \mu_0(x_1, x_2, t, g(t)) - \mu_0(x_1, x_2, g(0)), \tag{13}$$

$$\tilde{v}(x_1, x_2, t) = v(x_1, x_2, t) - v_0(x_1, x_2, t). \tag{14}$$

Для функції $\tilde{v}(x_1, x_2, t)$ отримуємо задачу

$$L\tilde{v} = f(x_1, x_2 g(t), t) - Lv_0(x_1, x_2, t) + \frac{x_2 g'(t)}{g(t)} v_{x_2}(x_1, x_2, t), \\ (x_1, x_2, t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$\tilde{v}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \bar{D}, \tag{16}$$

$$\tilde{v}(x_1, x_2, t)\big|_{\partial D \times [0,T]} = 0. \tag{17}$$

Нехай $G = G(x_1, x_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)$ − функція Ґріна для рівняння

$$L\tilde{v} = 0$$

з умовами (16), (17). Подаючи розв'язок задачі (15)−(17) за допомогою функції Ґріна та повертаючись до функції v, отримуємо

$$v(x_1,x_2,t)=v_0(x_1,x_2,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_D G(x_1,x_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg(f(\xi_1,\xi_2 g(\tau),\tau)-Lv_0(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$
$$+\frac{\xi_2 g'(\tau)}{g(\tau)}v_{\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau,\qquad (x_1,x_2,t)\in\bar{Q}_T\,. \tag{18}$$

Позначаючи $w=v_{x_2}$, $g'=q$, зведемо задачу (5)–(7) до системи інтегральних рівнянь

$$v(x_1,x_2,t)=v_0(x_1,x_2,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_D G(x_1,x_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg(f(\xi_1,\xi_2 g(\tau),\tau)-Lv_0(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$
$$+\frac{\xi_2 q(\tau)}{g(\tau)}w(\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau,\qquad (x_1,x_2,t)\in\bar{Q}_T\,, \tag{19}$$

$$w(x_1,x_2,t)=v_{0x_2}(x_1,x_2,t)+$$
$$+\int_0^t\iint_D G_{x_2}(x_1,x_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg(f(\xi_1,\xi_2 g(\tau),\tau)-Lv_0(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$
$$+\frac{\xi_2 q(\tau)}{g(\tau)}w(\xi_1,\xi_2,\tau)\bigg)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau,\qquad (x_1,x_2,t)\in\bar{Q}_T\,. \tag{20}$$

З умови (8) знаходимо

$$g(t)=\frac{\mu_5(t)}{\iint_D v(x_1,x_2,t)\,dx_1\,dx_2},\qquad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Диференціюючи умову (8) за змінною t і використовуючи (5), отримуємо рівняння

$$q(t)=\Bigg(\mu_5'(t)-g(t)\Bigg(\int_0^{\psi(0)}v_{x_1}(0,x_2,t)\,dx_2-\int_0^{\psi(h)}v_{x_1}(h,x_2,t)\,dx_2+$$
$$+\mu_4(h,t)-\mu_4(0,t)+\iint_D\big(b_1(x_1,x_2 g(t),t)v_{x_1}(x_1,x_2,t)+$$
$$+b_2(x_1,x_2 g(t),t)w(x_1,x_2,t)+c(x_1,x_2 g(t),t)v(x_1,x_2,t)+$$
$$+f(x_1,x_2 g(t),t)\big)\,dx_1\,dx_2\Bigg)-$$
$$-\frac{1}{g(t)}\int_0^h\big(w(x_1,0,t)-w(x_1,\psi(x_1),t)\big)\,dx_1\Bigg)\times$$
$$\times\left(\int_0^h\psi(x_1)\mu_4(x_1,t)\,dx_1\right)^{-1},\qquad t\in[0,T]. \tag{22}$$

Зі способу зведення задачі (5)–(8) до системи рівнянь (19)–(22) легко переконатися в їхній еквівалентності у такому розумінні. Якщо $(g(t),v(x_1,x_2,t))$ – розв'язок задачі (5)–(8) з класу $C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap$ $\cap\, C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, то функції $(g,q,v,w)\in(C[0,T])^2\times(C(\bar{Q}_T))^2$, де $q=g'$, $w=v_{x_2}$, задовольняють систему рівнянь (19)–(22). Правильним є і обернене твердження.

3. Оцінки розв'язків системи рівнянь (19)–(22). Позначимо $W(t) = \max_{(x_1,x_2)\in\bar{D}} |w(x_1,x_2,t)|$. Диференціюючи (19) за змінною x_1 та використовуючи оцінки похідних функції Ґріна [9, с. 469], маємо

$$|v_{x_1}(x_1,x_2,t)| \le C_1 + C_2 \int_0^t \frac{|q(\tau)|\, W(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{23}$$

З рівнянь (20) і (22) знаходимо

$$W(t) \le C_3 + C_4 \int_0^t \frac{|q(\tau)|\, W(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$|q(t)| \le C_5 + C_6 W(t) + C_7 \int_0^t \frac{|q(\tau)|\, W(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Звідси для функції $R(t) = W(t) + |q(t)|$ отримуємо нерівність

$$R(t) \le C_8 + C_9 \int_0^t \frac{R^2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad t \in [0,T]. \tag{24}$$

Розв'язуючи нерівність (24) методом, наведеним у [11, с. 125–127], встановлюємо оцінку

$$R(t) \le M_2 < \infty, \qquad t \in [0,T_0], \tag{25}$$

де сталі M_2 та T_0, $0 < T_0 \le T$, визначаються відомими величинами. Звідси випливають оцінки

$$|w(x_1,x_2,t)| \le M_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad |q(t)| \le M_2, \quad t \in [0,T_0]. \tag{26}$$

Отже, з урахуванням (9), (10) отримано оцінки розв'язків системи рівнянь (19)–(22).

4. Існування розв'язку.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A1)–(A3)**. *Тоді можна вказати таке число* T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається відомими величинами, що задача* (1)–(4) *має розв'язок*

$$(g,u) \in C^1[0,T_0] \times C^{2,1}(\Omega_{T_0}) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega}_{T_0}), \qquad g(t) > 0, \qquad t \in [0,T_0].$$

Д о в е д е н н я. Оскільки задача (1)–(4) зводиться до задачі (5)–(8), а остання є еквівалентною системі рівнянь (19)–(22), то достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (19)–(22). На множині

$$\mathcal{N} \equiv \{(g,q,v,w) \in (C[0,T_0])^2 \times (C(\bar{Q}_{T_0}))^2 : K_0 \le g(t) \le K_1,\ |q(t)| \le M_2,$$
$$M_0 \le v(x_1,x_2,t) \le M_1,\ |w(x_1,x_2,t)| \le M_2\},$$

розглянемо рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{27}$$

в якому $\omega = (g,q,v,w)$, а оператор $P = (P_1,P_2,P_3,P_4)$ визначається правими частинами рівнянь (19)–(22). З оцінок (9), (10), (26) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе. Те, що інтегральний оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$, встановлено в [11]. Застосовуючи до рівняння (27) теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримуємо існування неперервного розв'язку рівняння (27), а, отже, існування розв'язку $(g(t), v(x_1,x_2,t))$ задачі (5)–(8) з класу $C^1[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap \cap C^{1,0}(\bar{Q}_{T_0})$.

Теорему доведено. ◊

Теорема 2. *Нехай, крім умов* **(A2), (A4)**, *виконується така умова:*

(A5) $\varphi \in C([0,h]\times[0,\infty))$, $\mu_i \in C([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$,

$\mu_j \in C([0,h]\times[0,T])$, $j=3,4$, $\mu_5 \in C^1[0,T]$,

$b_k, c, f \in C^{1,0}([0,h]\times[0,\infty)\times[0,T])$, $k=1,2$, $\psi \in C^1[0,h]$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0<T_0\le T$, *яке визначається відомими величинами, що задача* (1)–(4) *має розв'язок*

$$(g,u)\in C^1[0,T_0]\times C^{2,1}(\Omega_{T_0})\cap C(\bar\Omega_{T_0}),\qquad g(t)>0,\qquad t\in[0,T_0].$$

Д о в е д е н н я. Твердження теореми отримуємо з наслідку [10, с. 106]. Для цього достатньо функції φ,ψ,μ_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, наблизити рівномірно збіжними до них послідовностями функцій $\{\varphi^{(n)}\}$, $\{\psi^{(n)}\}$, $\{\mu_i^{(n)}\}$, $i\in\{1,2,3,4\}$, які задовольняють умову **(A3)**. Використовуючи теорему 1, отримуємо існування послідовності розв'язків $\{(g^{(n)}(t),u^{(n)}(y_1,y_2,t))\}$ відповідних задач з класу $C^1[0,T_0]\times C^{2,1}(\Omega_{T_0})\cap C^{1,0}(\bar\Omega_{T_0})$, яка згідно зі згаданим наслідком збігається до розв'язку задачі (1)–(4) з класу $C^1[0,T_0]\times$ $\times C^{2,1}(\Omega_{T_0})\cap C(\bar\Omega_{T_0})$, $g(t)>0$, $t\in[0,T_0]$. Теорему доведено. ◊

6. Єдиність розв'язку.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

(A6) $b_i, c, f \in C^{1,0}([0,h]\times[0,\infty)\times[0,T])$,

$\mu_i \in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\psi\in C^2[0,h]$;

(A7) $\varphi(y_1,y_2)\ge\varphi_0>0$, $(y_1,y_2)\in[0,h]\times[0,\infty)$,

$\int\limits_0^h \psi(x_1)\mu_4(x_1,t)\,dx_1 \ne 0$, $\mu_5(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$, $\psi(x_1)>0$, $x_1\in[0,h]$.

Тоді задача (1)–(4) *не може мати більше одного розв'язку з класу*

$$C^1[0,T_0]\times C^{2,1}(\Omega_{T_0})\cap C^{1,0}(\bar\Omega_{T_0}),\qquad g(t)>0,\qquad t\in[0,T_0].$$

Д о в е д е н н я. Оскільки задача (1)–(4) еквівалентна задачі (5)–(8), доведемо єдиність розв'язку задачі (5)–(8). Нехай $(g_i(t), v_i(x_1,x_2,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(8) із зазначеного класу. Позначимо

$$g(t)\equiv g_1(t)-g_2(t),\qquad v(x_1,x_2,t)\equiv v_1(x_1,x_2,t)-v_2(x_1,x_2,t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} v_t = {} & v_{x_1x_1} + \frac{1}{g_1^2(t)} v_{x_2x_2} + b_1(x_1,x_2g_1(t),t)v_{x_1} + \Big(b_2(x_1,x_2g_1(t),t) + \\ & + \frac{x_2g_1'(t)}{g_1(t)}\Big)v_{x_2} + c(x_1,x_2g_1(t),t)v + \left(\frac{1}{g_1^2(t)}-\frac{1}{g_2^2(t)}\right)v_{2x_2x_2} + \\ & + \left(\frac{g_1'(t)}{g_1(t)}-\frac{g_2'(t)}{g_2(t)}\right)x_2v_{2x_2} + \big(b_1(x_1,x_2g_1(t),t) - \\ & - b_1(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_{2x_1} + \big(b_2(x_1,x_2g_1(t),t) - \\ & - b_2(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_{2x_2} + \big(c(x_1,x_2g_1(t),t) - \\ & - c(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_2 + f(x_1,x_2g_1(t),t) - \\ & - f(x_1,x_2g_2(t),t), \qquad (x_1,x_2,t)\in Q_T, \end{aligned} \tag{28}$$

$$v\big|_{t=0} = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \bar{D}, \tag{29}$$

$$v\big|_{x_1=0} = \mu_1(x_2 g_1(t), t) - \mu_1(x_2 g_2(t), t), \quad 0 \le x_2 \le \psi(0), \quad 0 \le t \le T, \tag{30}$$

$$v\big|_{x_1=h} = \mu_2(x_2 g_1(t), t) - \mu_2(x_2 g_2(t), t), \quad 0 \le x_2 \le \psi(h), \quad 0 \le t \le T, \tag{31}$$

$$v\big|_{x_2=0} = v\big|_{x_2=\psi(x_1)} = 0, \qquad 0 \le x_1 \le h, \qquad 0 \le t \le T, \tag{32}$$

$$\iint\limits_D v(x_1, x_2, t)\, dx_1\, dx_2 = \mu_5(t)\left(\frac{1}{g_1(t)} - \frac{1}{g_2(t)}\right), \qquad t \in [0, T]. \tag{33}$$

Подамо рівняння (28) у вигляді

$$\tilde{L}v = F(x_1, x_2, t, g(t), g'(t)), \tag{34}$$

де оператор $\tilde{L}$ отримується з оператора L (11) заміною $g(t)$ на $g_1(t)$. Зробимо заміну

$$v(x_1, x_2, t) = \tilde{v}(x_1, x_2, t) + \chi(x_1, x_2, t, g(t)), \tag{35}$$

де

$$\chi(x_1, x_2, t, g(t)) = \left(1 - \frac{x_1}{h}\right)\big(\mu_1(x_2 g_1(t), t) - \mu_1(x_2 g_2(t), t)\big) +$$

$$+ \frac{x_1}{h}\big(\mu_2(x_2 g_1(t), t) - \mu_2(x_2 g_2(t), t)\big) -$$

$$- \frac{x_2}{\psi(x_1)}\left(\left(1 - \frac{x_1}{h}\right)\big(\mu_1(\psi(x_1) g_1(t), t) - \mu_1(\psi(x_1) g_2(t), t)\big) +\right.$$

$$\left. + \frac{x_1}{h}\big(\mu_2(\psi(x_1) g_1(t), t) - \mu_2(\psi(x_1) g_2(t), t)\big)\right).$$

Тоді задача (28)–(32) зводиться до задачі з нульовими крайовими та початковою умовами для рівняння

$$\tilde{L}\tilde{v} = F(x_1, x_2, t, g(t), g'(t)) + \tilde{L}\chi(x_1, x_2, t, g(t)), \qquad (x_1, x_2, t) \in Q_T. \tag{36}$$

Розв'язуючи її за допомогою функції Ґріна $\tilde{G} = \tilde{G}(x_1, x_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)$ та повертаючись до невідомої v, отримуємо

$$v(x_1, x_2, t) = \chi(x_1, x_2, t, g(t)) +$$

$$+ \int_0^t \iint\limits_D \tilde{G}(x_1, x_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)\big(F(\xi_1, \xi_2, \tau, g(\tau), g'(\tau)) +$$

$$+ \tilde{L}\chi(\xi_1, \xi_2, \tau, g(\tau))\big)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \qquad (x_1, x_2, t) \in \bar{Q}_T. \tag{37}$$

З умови (33) отримуємо рівняння

$$g(t) = -\frac{g_1(t) g_2(t)}{\mu_5(t)} \iint\limits_D v(x_1, x_2, t)\, dx_1\, dx_2, \qquad t \in [0, T]. \tag{38}$$

Позначимо $q(t) \equiv g_1'(t) - g_2'(t)$. З рівняння (22) знаходимо

$$q(t) = \frac{1}{\int_0^h \psi(x_1)\mu_4(x_1, t)\, dx_1}\left(-g_1(t)\left(\int_0^{\psi(0)} v_{x_1}(0, x_2, t)\, dx_2 -\right.\right.$$

$$- \int_0^{\psi(h)} v_{x_1}(h, x_2, t)\, dx_2 + \iint\limits_D \big(b_1(x_1, x_2 g_1(t), t) v_{x_1}(x_1, x_2, t) +$$

$$+b_2(x_1,x_2g_1(t),t)v_{x_2}(x_1,x_2,t)+c(x_1,x_2g_1(t),t)v(x_1,x_2,t)+$$

$$+\big(b_1(x_1,x_2g_1(t),t)-b_1(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_{2x_1}(x_1,x_2,t)+$$

$$+\big(b_2(x_1,x_2g_1(t),t)-b_2(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_{2x_2}(x_1,x_2,t)+$$

$$+\big(c(x_1,x_2g_1(t),t)-c(x_1,x_2g_2(t),t)\big)v_2(x_1,x_2,t)+$$

$$+f(x_1,x_2g_1(t),t)-f(x_1,x_2g_2(t),t)\big)\,dx_1\,dx_2\Big)-$$

$$-g(t)\Bigg(\int\limits_0^{\psi(0)}v_{2x_1}(0,x_2,t)\,dx_2-\int\limits_0^{\psi(h)}v_{2x_1}(h,x_2,t)\,dx_2+$$

$$+\mu_4(h,t)-\mu_4(0,t)+\iint\limits_D\big(b_1(x_1,x_2g_2(t),t)v_{2x_1}(x_1,x_2,t)+$$

$$+b_2(x_1,x_2g_2(t),t)v_{2x_2}(x_1,x_2,t)+$$

$$+c(x_1,x_2g_2(t),t)v_2(x_1,x_2,t)+f(x_1,x_2g_2(t),t)\big)\,dx_1\,dx_2\Big)+$$

$$+\frac{g(t)}{g_1(t)g_2(t)}\int\limits_0^h\big(v_{2x_2}(x_1,0,t)-v_{2x_2}(x_1,\psi(x_1),t)\big)\,dx_1-$$

$$-\frac{1}{g_1(t)}\int\limits_0^h\big(v_{x_2}(x_1,0,t)-v_{x_2}(x_1,\psi(x_1),t)\big)\,dx_1\Bigg),\quad t\in[0,T].\qquad(39)$$

Отже, задачу (28)–(33) зведено до системи рівнянь (38), (39), у якій функція $v(x_1,x_2,t)$ та її перші похідні визначаються з формули (37). Використовуючи для зображення різниць значень функцій формулу Лаґранжа

$$f(x,y_1(t))-f(x,y_2(t))=(y_1(t)-y_2(t))\int\limits_0^1\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\bigg|_{s=y_2(t)+\theta(y_1(t)-y_2(t))}d\theta\,,$$

легко переконатися у тому, що, з одного боку, функція $v(x_1,x_2,t)$ лінійно залежить від $g(t)$ і $q(t)$, а, з іншого боку, система рівнянь (38), (39) є однорідною лінійною системою інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами, а тому має єдиний розв'язок $g(t)\equiv 0$, $q(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Тоді й $v(x_1,x_2,t)\equiv 0$, $(x_1,x_2,t)\in\bar{Q}_T$, як розв'язок прямої задачі з нульовими вихідними даними.

Теорему доведено. ◊

1. *Баранська І. Є.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 17–28.
2. *Баранська І. Є.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 32–42.
3. *Баранська І. Є.* Обернена задача з вільною межею для параболічного рівняння // Мат. студії. – 2007. – **27**, № 1. – С. 85–94.
4. *Баранська І. Є.*, *Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457–484.
5. *Иванчов Н. И.* Обратная задача теплопроводности со свободной границей // Обратные задачи и информ. технологии. – 2002. – **1**, № 2. – С. 69–81.

6. *Іванчов М. І.* Задача з вільною межею для рівняння дифузії в прямокутнику // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 67–75.
7. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
   Те саме: *Ivanchov M. I.* Inverse problem with free boundary for heat equation // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 7. – P. 1086–1098.
8. *Іванчов М. І.* Редукція задачі з вільною межею для параболічного рівняння до оберненої задачі // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – С. 73–83.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., vol 23. – Providence, RI: AMS, 1968.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equation of parabolic type. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1964.
11. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.
12. *Ivanchov M. I.* Free boundary problem for nonlinear diffusion equation // Мат. студії. – 2003. – **19**, № 2. – С. 156–164.
13. *Friedman A., Bei Hu.* A Stefan problem for multidimensional reaction-diffusion systems // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27**, No. 5. – P. 1212–1234.
14. *Isakov V.* On inverse problems in secondary oil recovery // Eur. J. Appl. Math. – 2008. – **19**. – P. 459–478.
15. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inverse Ill-Posed Problems. – 2001. – **9,** No. 6. – P. 1–27.
16. *Vessela S.* Quantitive estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates // Inverse Problems. – 2008. – **24**. – P. 1–81.

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Установлены условия существования и единственности гладкого решения задачи со свободной границей для двумерного параболического уравнения в криволинейном прямоугольнике, размещение криволинейной части которого определяется функцией, являющейся произведением неизвестной функции времени и заданной функции и пространственной переменной.

FREE BOUNDARY PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

The conditions for existence and uniqueness of solution of a free boundary problem for a two-dimensional parabolic equation in the curvilinear rectangle for which the location of the curvilinear part is described by the function being a product of the unknown time-dependent function and the given function of the spatial variable are established.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
29.12.10