УДК 519.62

М. В. Кутнів[1], В. Л. Макаров[2]

КОМПАКТНІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ

Наведено огляд основних результатів з побудови та дослідження точних і відсічених компактних різницевих схем високого порядку точності для чисельного розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і розробки на їх основі нових ефективних алгоритмів чисельного розв'язування крайових задач із заданою точністю та автоматичним вибором точок сітки.

Вступ. Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$u'' = f(x,u), \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2. \tag{1}$$

Для чисельного розв'язування задачі (1) на відрізку $[0,1]$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}_h = \{x_j \in [0,1],\ j = 0,1,\dots,N,\ h = 1/N\}$ і замінимо $u''(x_j)$ другою різницевою похідною $u_{\bar{x}x,j} = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})/h^2$, заданою на триточковому шаблоні. Тоді отримаємо класичну триточкову різницеву схему другого порядку точності

$$y_{\bar{x}x,j} = f(x_j, y_j), \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \qquad y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2,$$

де $y_j \approx u(x_j)$.

Виникає питання: як побудувати різницеві схеми вищого порядку точності? Для цього існують два основні підходи. Перший полягає у заміні другої похідної різницевою апроксимацією на шаблоні з більшою кількістю точок. Наприклад, п'ятиточкова різницева схема, задана на рівномірній сітці, вигляду

$$\frac{1}{12h^2}(-y_{j+2} + 16y_{j+1} - 30y_j + 16y_{j-1} - y_{j-2}) = f(x_j, y_j), \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \tag{2}$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2 \tag{3}$$

має четвертий порядок точності.

Другий підхід ґрунтується на таких міркуваннях. Оскільки розклад в ряд Тейлора другої триточкової різницевої похідної в околі точки x_j має вигляд

$$u_{\bar{x}x,j} = u''_j + \frac{h^2}{12}u_j^{\mathrm{IV}} + O(h^4), \tag{4}$$

то, продиференціювавши два рази диференціальне рівняння (1), будемо мати рівність

$$u^{\mathrm{IV}} = f''(x,u).$$

Звідси отримаємо різницеве рівняння

$$y_{\bar{x}x,j} = f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{12}f''(x_j, y_j), \qquad j = 1,2,\dots,N-1,$$

яке має четвертий порядок апроксимації. Замінивши другу похідну від правої частини диференціального рівняння другою різницевою похідною, будемо мати добре відому схему Нумерова

$$y_{\bar{x}x,j} = \frac{1}{12}\left[f(x_{j+1}, y_{j+1}) + 10f(x_j, y_j) + f(x_{j-1}, y_{j-1})\right], \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \tag{5}$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2. \tag{6}$$

Оскільки різницева схема для нелінійної крайової задачі є системою N нелінійних алгебраїчних рівнянь, то для знаходження її розв'язку використовують ітераційні методи, наприклад, метод Ньютона, який на кожній ітерації вимагає розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У випадку різницевої схеми (2), (3) ця система буде мати п'ятидіагональну матрицю, а у випадку схеми (5), (6) − тридіагональну. Для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею потрібно $8N+1$ операцій, а для розв'язування системи з п'ятидіагональною матрицею потрібно $19N-10$ операцій. Отже, триточкова різницева схема (5), (6) буде вимагати суттєво меншої кількості операцій, ніж схема (2), (3).

Якщо різницева схема, яка апроксимує крайову задачу для рівняння k-го порядку, використовує тільки $k+1$ значення сіткової функції, тобто є $(k+1)$-точковою, то вона називається компактною (див., наприклад, [25]). Розв'язок компактних різницевих схем можна знайти з мінімальною кількістю операцій. Крім того, в роботі [25] показано, що різницева схема є стійкою, якщо вона компактна. Для досягнення високої точності крок сітки повинен бути достатньо малим, що приводить до великих розмірів матриці. Застосування схем високого порядку точності дозволяє зменшити розміри матриці.

Поширити другий підхід для побудови триточкових різницевих схем вищого порядку точності, ніж четвертий, неможливо. Дійсно, якщо у розкладі в ряд (4) врахувати похідну $u^{(6)}$ і замінити її на f^{IV}, то не існує триточкової різницевої апроксимації $f^{\mathrm{IV}}(x_j,u_j)$ через значення правої частини диференціального рівняння в точках сітки.

Оскільки розв'язок крайової задачі на різних частинах відрізка [0,1] може змінюватися швидше або повільніше, то важливо вміти будувати різницеві схеми на нерівномірній сітці

$$\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_j \in [0,1],\ j=0,\ldots,N\ ,\ x_j - x_{j-1} = h_j > 0,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_N = x_N\}\,.$$

Класична триточкова різницева схема розв'язування задачі (1) на нерівномірній сітці буде мати вигляд

$$y_{\bar{x}\hat{x},j} = f(x_j,y_j), \quad j=1,2,\ldots,N-1, \quad y_0=\mu_1, \quad y_N=\mu_2\,,$$

де

$$y_{\bar{x}\hat{x},j} = \frac{1}{\hbar_j}\left[\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right], \qquad \hbar_j = \frac{h_{j+1}+h_{j-1}}{2}\,.$$

Однак відомо, що ця схема має лише перший порядок точності. Отже, на нерівномірних сітках ще складніше побудувати різницеві схеми високого порядку точності.

У зв'язку з цим виникає питання про методи побудови компактних різницевих схем високого порядку точності на довільній нерівномірній сітці.

1. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для лінійних крайових задач. Уперше на це питання для випадку лінійних крайових задач у 60-х роках минулого століття дали відповідь А. М. Тіхонов та О. А. Самарський, які розробили разом зі своїми учнями теорію точних триточкових різницевих схем і триточкових різницевих схем довільного порядку точності.

У роботах [8−11, 13−16] для лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та їх систем у класі кусково-гладких коефіцієнтів на основі точних триточкових різницевих схем, тобто схем, розв'язок яких співпадає з проекцією точного розв'язку задачі на сітку, побудовано однорідні триточкові схеми довільного порядку точності (відсічені схеми m-го рангу).

Розглянемо крайову задачу

$$L^{(k,q)}u \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2 \tag{8}$$

за умов

$$0 < c_1 \le k(x), \qquad k(x),\ q(x),\ f(x) \in \mathbb{Q}^{(0)}[0,1], \tag{9}$$

$$q(x) \ge 0, \tag{10}$$

де $\mathbb{Q}^{(0)}[0,1]$ – клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду. У роботі [15] для задачі (7)–(10) побудовано точну триточкову різницеву схему (ТТРС) на рівномірній сітці, а також розроблено й обґрунтовано алгоритмічну реалізацію ТТРС через триточкові різницеві схеми (ТРС) m-го рангу. Ці результати узагальнено в [16] на нерівномірну сітку і крайові умови третього роду.

Введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_h = \left\{x_j \in (0,1),\ j = 1,\ldots,N-1,\ x_j - x_{j-1} = h_j > 0,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_N = x_N\right\}$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $q(x), f(x)$ співпадали з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати, що N таке, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_h$. У точках розриву розв'язок задачі (7), (8) задовольняє умови неперервності

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0} \qquad \forall x_i \in \rho.$$

Означимо шаблонні функції $v_\alpha^j(x)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки задач Коші (див. [16])

$$L^{(k,q)}v_\alpha^j(x) = 0, \qquad x_{j-1} < x < x_{j+1}, \tag{11}$$

$$v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = 0, \qquad k(x)\frac{dv_\alpha^j}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = (-1)^{\alpha+1},$$

$$\alpha = 1,2, \qquad j = 1,\ldots,N-1, \tag{12}$$

для яких також будемо вимагати виконання умов неперервності розв'язку $v_\alpha^j(x)$ і потоку $k(x)\dfrac{dv_\alpha^j(x)}{dx}$.

Шаблонні функції мають такі властивості:

1) $v_1^j(x) > 0$ і монотонно зростає на $(x_{j-1}, x_{j+1}]$, а $v_2^j(x) > 0$ і монотонно спадає на $[x_{j-1}, x_{j+1})$;

2) виконуються рівності

$$v_1^j(x_{j+1}) = v_2^j(x_{j-1}), \qquad v_2^j(x_j) = v_1^{j+1}(x_{j+1});$$

3) справджуються співвідношення

$$v_1^j(x_{j+1}) = v_1^j(x_j) + v_2^j(x_j) + \\ + v_2^j(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(x)q(x)\,dx + v_1^j(x_j)\int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(x)q(x)\,dx. \tag{13}$$

Розв'язок задачі (7), (8) можна зобразити у вигляді

$$u(x) = A_j v_1^j(x) + B_j v_2^j(x) + v_3^j(x), \qquad x_{j-1} \le x \le x_{j+1}, \tag{14}$$

де A_j і B_j − числа, а $v_3^j(x)$ − частковий розв'язок неоднорідного рівняння (7) за однорідних умов, тобто

$$L^{(k,q)} v_3^j(x) = -f(x), \quad x_{j-1} < x < x_{j+1}, \quad v_3^j(x_{j-1}) = v_3^j(x_{j+1}) = 0. \tag{15}$$

Поклавши в (14) $x = x_{j-1}$ і $x = x_{j+1}$, знайдемо

$$A_j = \frac{u(x_{j+1})}{v_1^j(x_{j+1})}, \qquad B_j = \frac{u(x_{j-1})}{v_2^j(x_{j-1})}. \tag{16}$$

Функцію $v_3^j(x)$ запишемо у вигляді

$$v_3^j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad x_{j-1} \le x \le x_{j+1}, \tag{17}$$

де $G(x,\xi)$ − функція Ґріна задачі (15), яка визначається формулою

$$G(x,\xi) = \frac{1}{v_1^j(x_{j+1})} \begin{cases} v_1^j(x) v_2^j(\xi), & x_{j-1} \le x \le \xi, \\ v_1^j(\xi) v_2^j(x), & \xi \le x \le x_{j+1}. \end{cases} \tag{18}$$

Підставимо вираз (18) в (17) і покладемо $x = x_j$, тоді будемо мати

$$v_3^j(x_j) = \frac{1}{v_1^j(x_{j+1})} \left[v_2^j(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi) f(\xi)\, d\xi + v_1^j(x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi) f(\xi)\, d\xi \right]. \tag{19}$$

Використовуючи (16), (13) і (19), з (14) отримаємо точну триточкову різницеву схему

$$(a u_{\bar{x}})_{\hat{x}} - du = -\varphi(x), \qquad x \in \hat{\omega}_h, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{20}$$

де

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \qquad u_{\hat{x},i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\hbar_i}, \qquad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_j + h_{j+1}),$$

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} v_1^j(x_j) \right]^{-1}, \quad d(x_j) = \hat{T}^{x_j}(q), \qquad \varphi(x_j) = \hat{T}^{x_j}(f), \tag{21}$$

$$\hat{T}^{x_j}(w) = \left[\hbar_j v_1^j(x_j)\right]^{-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi) w(\xi)\, d\xi + \left[\hbar_j v_2^j(x_j)\right]^{-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi) w(\xi)\, d\xi.$$

Введемо тепер в точці $x = x_j$ місцеву систему координат. Виберемо

$$x = x_j + \hbar_j (s - \Delta_j), \quad \Delta_j = -\frac{h_{j+1} - h_j}{h_{j+1} + h_j} = -\frac{0.5(h_{j+1} - h_j)}{\hbar_j}, \quad -1 \le s \le 1,$$

або

$$x = \bar{x}_j + \hbar_j s, \qquad \bar{x}_j = x_j - \hbar_j \Delta_j.$$

Тоді відрізок $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ відображається у відрізок $-1 \le s \le 1$, причому точці $x = x_j$ відповідає $s = \Delta_j$. Покладемо

$$v_1^j(x) = v_1^j(x_j + \hbar_j (s - \Delta_j)) = \hbar_j \alpha^j(s, \hbar_j),$$

$$v_2^j(x) = v_2^j(x_j + \hbar_j (s - \Delta_j)) = \hbar_j \beta^j(s, \hbar_j), \qquad -1 \le s \le 1.$$

Шаблонні функції $\alpha^j(s,\hbar_j)$ і $\beta^j(s,\hbar_j)$ задовольняють умови

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{k}(s)\frac{d\alpha^j}{ds}\right)-\hbar_j^2\bar{q}(s)\alpha^j=0, \qquad -1<s<1,$$

$$\alpha^j(-1,\hbar_j)=0, \qquad \bar{k}(s)\frac{d\alpha^j}{ds}\bigg|_{s=-1}=1,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{k}(s)\frac{d\beta^j}{ds}\right)-\hbar_j^2\bar{q}(s)\beta^j=0, \qquad -1<s<1,$$

$$\beta^j(1,\hbar_j)=0, \qquad \bar{k}(s)\frac{d\beta^j}{ds}\bigg|_{s=1}=-1,$$

де

$$\bar{k}(s)=k(x_j+\hbar_j(s-\Delta_j)), \qquad \bar{q}(s)=q(x_j+\hbar_j(s-\Delta_j)).$$

Тоді коефіцієнти a, d, φ знаходяться за формулами

$$a(x_j)=\left[\frac{\hbar_j}{h_j}\alpha^j(0,\hbar_j)\right]^{-1}, \tag{22}$$

$$d(x_j)=\frac{1}{\alpha^j(0,\hbar_j)}\int_{-1}^{\Delta_j}\alpha^j(s,\hbar_j)\bar{q}(s)\,ds+\frac{1}{\beta^j(0,\hbar_j)}\int_{\Delta_j}^{1}\beta^j(s,\hbar_j)\bar{q}(s)\,ds, \tag{23}$$

$$\varphi(x_j)=\frac{1}{\alpha^j(0,\hbar_j)}\int_{-1}^{\Delta_j}\alpha^j(s,\hbar_j)\bar{f}(s)\,ds+\frac{1}{\beta^j(0,\hbar_j)}\int_{\Delta_j}^{1}\beta^j(s,\hbar_j)\bar{f}(s)\,ds. \tag{24}$$

У загальному випадку при $q(x)\neq 0$ шаблонні функції не можна безпосередньо виразити за допомогою квадратур. Однак з огляду на аналітичність $\alpha^j(s,\hbar_j)$, $\beta^j(s,\hbar_j)$ відносно $\hbar_j^2$ природно ці функції шукати у вигляді розкладу за степенями $\hbar_j^2$:

$$\alpha^j(s,\hbar_j)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i^j(s)\hbar_j^{2i}, \qquad \beta^j(s,\hbar_j)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i^j(s)\hbar_j^{2i}, \tag{25}$$

де $\alpha_i^j(s)$, $\beta_i^j(s)$ визначаються за рекурентними формулами

$$\alpha_i^j(s)=\int_{-1}^{s}\frac{1}{\bar{k}(t)}\left[\int_{-1}^{t}\bar{q}(\lambda)\alpha_{i-1}^j(\lambda)\,d\lambda\right]dt, \qquad i=1,2,\dots,$$

$$\beta_i^j(s)=\int_{s}^{1}\frac{1}{\bar{k}(t)}\left[\int_{t}^{1}\bar{q}(\lambda)\beta_{i-1}^j(\lambda)\,d\lambda\right]dt, \qquad i=1,2,\dots,$$

$$\alpha_0^j(s)=\int_{-1}^{s}\frac{1}{\bar{k}(t)}\,dt, \qquad \beta_0^j(s)=\int_{s}^{1}\frac{1}{\bar{k}(t)}\,dt.$$

Якщо в (25) взяти скінченне число членів

$$\alpha^{(m)j}(s,\hbar_j)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^j(s)\hbar_j^{2i}, \qquad \beta^{(m)j}(s,\hbar_j)=\sum_{i=0}^{m}\beta_i^j(s)\hbar_j^{2i}$$

і обчислити коефіцієнти $a^{(m)}$, $d^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$ за формулами (22)–(24), замінюючи в цих формулах $\alpha^j(s,\hbar_j), \beta^j(s,\hbar_j)$ многочленами $\alpha^{(m)j}(s,\hbar_j), \beta^{(m)j}(s,\hbar_j)$, то одержимо відсічену триточкову різницеву схему m-го рангу

$$(a^{(m)}y_{\bar{x}}^{(m)})_{\hat{x}} - d^{(m)}y^{(m)} = -\varphi^{(m)}(x), \qquad x \in \hat{\omega}_h, \tag{26}$$

$$y^{(m)}(0) = \mu_1, \qquad y^{(m)}(1) = \mu_2. \tag{27}$$

Теорема 1 [**16**]. *Відсічена різницева схема m-го рангу* (26), (27) *має* $(2m+2)$*-й порядок точності при* $|h| = \max\limits_{1\le j\le N}|h_j| \to 0$ *в класі* $\mathbb{Q}^{(0)}[0,1]$ *кусково-неперервних функцій* $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ *на будь-якій послідовності різницевих сіток, які задовольняють умову*

$$0 < C_1 \le \frac{h_{j+1}}{h_j} \le C_2,$$

іншими словами,

$$\left\| y^{(m)} - u \right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h} = \max_{1\le j\le N}\left| y_j^{(m)} - u_j \right| \le M|h|^{2m+2}, \qquad |h| \le h_0,$$

де C_1, C_2, M *і* h_0 *– додатні сталі, які не залежать ні від номера* m*, ні від вибору сіток.*

У роботі [16] побудовано та обґрунтовано також точну триточкову різницеву схему та відсічені схеми m-го рангу для крайової задачі третього роду

$$L^{(k,q)}u = -f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=0} - \sigma_1 u(0) = -\mu_1, \qquad u(1) = \mu_2.$$

У монографії [13] отримані в [15, 16] результати узагальнено на випадок, коли $k(x), q(x), f(x)$ – узагальнені функції, $k(x) \in L_\infty(0,1)$, $q(x) \in W_p^{\theta-1}(0,1)$, $f(x) \in W_r^{\lambda-1}(0,1)$, де $p, r \ge 2$ і $\theta, \lambda \in [0,1]$.

У статті [8] розглядається крайова задача

$$L^{(k,q)}u = -f(x), \qquad 0 < x < \infty, \qquad u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \tag{28}$$

за умов

$$q(x) = q_0^2 + \tilde{q}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right), \qquad \tilde{q}(x) \in L_2(0,\infty),$$

$$k(x) \ge c_1 > 0, \qquad q(x) \ge c_2 > 0,$$

$$\frac{1}{k(x)} = d^2 + \frac{p_1(x)}{x} + \frac{p_2(x)}{x^2} + \ldots + \frac{p_n(x)}{x^n} + \ldots,$$

$$q(x) = q_0^2 + \frac{q_1(x)}{x} + \frac{q_2(x)}{x^2} + \ldots + \frac{q_n(x)}{x^n} + \ldots, \qquad x \to \infty,$$

і

$$|p_i(x)| \le M, \qquad |q_i(x)| \le M, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

де q_0, d, M – додатні сталі. Розв'язок задачі (28) розуміється в узагальненому сенсі з класу $W_2^1(0,\infty)$. Для цієї задачі побудовано точну і відсічену різницеві схеми на скінченній сітці

$$\hat{\omega}_h = \{x_j, j = 0,\ldots,N+1\}, \qquad h_j = x_j - x_{j-1}, \qquad j = 1,\ldots,N+1,$$

накладаючи на кроки h_j такі обмеження:

$$\sum_{j=1}^{N+1} h_j = x_{N+1} \underset{N\to\infty}{\to} 0, \qquad |h| = \max_{1\le j\le N+1} h_j \underset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Побудовані в [13, 15, 16] відсічені схеми дозволяють отримати будь-який порядок точності для довільних кусково-неперервних функцій $k(x)$, $q(x)$ і $f(x)$. Однак практичне використання таких схем у випадку змінних коефіцієнтів рівняння (7), (8) вимагають обчислення багатократних інтегралів на кожному інтервалі сітки, наприклад, методом Монте-Карло, що є їх недоліком.

У [18, 27] була описана процедура побудови ТРС будь-якого порядку точності для досить гладких функцій $k(x), q(x), f(x)$. Ця процедура в [19] модифікована для кусково-гладких $k(x), q(x), f(x)$ із точками розриву у вузлах сітки, умову (10) було замінено на

$$|q(x)| \le c_2. \tag{29}$$

Запропоновані в [19] схеми неоднорідні і вимагають для своєї побудови (як і схеми з [18, 27]) розв'язування допоміжної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, порядок якої залежить від бажаної точності різницевої схеми.

У роботах [11, 14] для побудови ТРС будь-якого порядку точності для задачі (7)–(9), (29) у класі кусково-гладких $k(x), q(x), f(x)$ із скінченною кількістю точок розриву за основу узята ТТРС (20) з [15, 16]. Показано, що її коефіцієнти $a(x), d(x)$ та праву частину $\varphi(x)$ в довільному вузлі x_j сітки $\hat{\omega}_h$ можна виразити через розв'язки чотирьох допоміжних задач Коші. Як випливає з (21), для $a(x), d(x)$ вже маємо потрібне зображення

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} v_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$d(x_j) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} [v_\alpha^j(x_j)]^{-1} [(-1)^{\alpha+1} m_\alpha^j(x_j) - 1], \tag{30}$$

де

$$m_\alpha^j(x) = k(x)\frac{dv_\alpha^j(x)}{dx}, \qquad \alpha = 1,2.$$

Для одержання зображення для $\varphi(x)$ введемо дві нові допоміжні функції $w_\alpha^j(x)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки таких двох задач Коші:

$$L^{(k,q)} w_\alpha^j(x) = -f(x), \qquad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \tag{31}$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = \left.\frac{dw_\alpha^j}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = 0, \qquad \alpha = 1,2. \tag{32}$$

Через функції $w_\alpha^j(x)$, $\alpha = 1,2$, вже можна записати вигляд правої частини ТТРС $\varphi(x)$:

$$\varphi(x_j) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[\ell_\alpha^j(x_j) - m_\alpha^j(x_j)\frac{w_\alpha^j(x_j)}{v_\alpha^j(x_j)}\right], \tag{33}$$

де

$$\ell_\alpha^j(x) = k(x)\frac{dw_\alpha^j(x)}{dx}, \qquad \alpha = 1,2.$$

Формули (30), (33) показують, що для визначення коефіцієнтів $a(x_j)$, $d(x_j)$ і правої частини $\varphi(x_j)$ ТТРС $\forall x_j \in \hat{\omega}_h$ потрібно розв'язати чотири задачі Коші з гладкими коефіцієнтами: (11), (12), (31), (32) при $\alpha = 1$ на інтервалі $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і (11), (12), (31), (32) при $\alpha = 2$ на інтервалі $[x_j, x_{j+1}]$ (назад). Кожну з вказаних задач Коші можна наближено розв'язати за один крок методом розвинення в ряд Тейлора або Рунге – Кутта порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (тут m – ціле додатне число, $[\cdot]$ – ціла частина). Одержані наближення, на відміну від точних, будемо позначати індексом m: $v_\alpha^{(m)j}(x_j)$, $m_\alpha^{(m)j}(x_j)$, $w_\alpha^{(m)j}(x_j)$, $\ell_\alpha^{(m)j}(x_j)$.

Розглянемо тепер замість ТТРС (20), (30), (33) ТРС вигляду (26), (27), коефіцієнти якої визначаються за формулами

$$a^{(m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} v_1^{(m)j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$d^{(m)}(x_j) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha+1} [v_\alpha^{(m)j}(x_j)]^{-1} [m_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) + (-1)^\alpha],$$

$$\varphi^{(m)}(x_j) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[\ell_\alpha^{(m)j}(x_j) - m_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) \frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)}\right]. \tag{34}$$

Теорема 2 [**11**]. *Нехай виконуються умови* $k(x) \in \mathbb{Q}^{(m+1)}[0,1]$, $q(x)$, $f(x) \in \mathbb{Q}^{(m)}[0,1]$, *однорідна крайова задача* (7)–(9), (29) *має тривіальний розв'язок. Тоді для похибки схеми* (26), (27), (34) *при достатньо малому* $|h|$ *буде справджуватися оцінка*

$$\left\| y^{(m)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_h} = \max\left\{ \left\| y^{(m)} - u \right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h}, \left\| k\frac{dy^{(m)}}{dx} - k\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h} \right\} \le M|h|^m,$$

де

$$k(x_j)\frac{dy^{(m)}(x_j)}{dx} = \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha v_\alpha^{(m)j}(x_j) m_{3-\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ m_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) y^{(m)}(x_{j+(-1)^\alpha}) + \right.$$

$$+ (-1)^{\alpha+1}\left[m_1^{(\bar{m})j}(x_j) m_2^{(\bar{m})j}(x_j) w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) + \right.$$

$$\left.\left. + m_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) v_{3-\alpha}^{(m)j}(x_j) \ell_{3-\alpha}^{(m)j}(x_j) \right] \right\},$$

стала M *не залежить від* $|h|$.

Перевага цієї схеми перед схемами для кусково-гладких $k(x), q(x)$, $f(x)$ з [19], крім однорідності, полягає в тому, що практично без збільшення обчислювальних затрат побудовано триточкове наближення у вузлах сітки потоку $k(x)\dfrac{du(x)}{dx}$, точність якого в чебишевській метриці така ж, як і точність наближення до $u(x)$ (у [19] оцінюється похибка наближення $u_{\bar{x}}$).

У працях [9, 10] запропоновано ТТРС та її алгоритмічну реалізацію через ТРС довільного порядку точності для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right) - Q(x)\mathbf{u}(x) = -\,\mathbf{f}(x)$$

з крайовими умовами Діріхле

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(1) = \mathbf{0}\,,$$

де матриці $K(x) = \left[k_{ij}(x)\right]_{i,j=1}^{m}$, $Q(x) = \left[q_{ij}(x)\right]_{i,j=1}^{m}$ і вектор $\mathbf{f}(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^{m}$ задовольняють умови

$$C_1\,\|\mathbf{v}\|^2 \le (K(x)\mathbf{v},\mathbf{v}), \qquad C_1 > 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

$$k_{ij}(x) \in \mathbb{Q}^{n+1}[0,1], \qquad q_{ij}(x) \in \mathbb{Q}^{n}[0,1], \qquad f_i(x) \in \mathbb{Q}^{n}[0,1].$$

2. Компактні різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних крайових задач. У роботі [24] для задачі

$$a(x)\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} = f(x,u), \qquad a(x) > 0, \qquad x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2$$

побудовано ТРС четвертого порядку точності, але обґрунтування наведено тільки для випадку $a(x) = \text{const} > 0$ і $b(x) = \text{const}$. У [17] для розв'язування задачі (1) отримано триточкову схему шостого порядку точності. Однак запропоновані в працях [17, 24] методики не можуть бути використані навіть в такому спеціальному випадку для побудови ТРС довільного порядку. Крім того, ці схеми побудовано лише на рівномірній сітці, що є їх суттєвим недоліком.

Уперше підхід до побудови ТТРС на рівномірній сітці для нелінійних крайових задач

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -\,f(x,u), \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2$$

був анонсований у 1990 р. у [12]. Там же було запропоновано алгоритмічну реалізацію цих схем через ТРС m-го порядку точності. Надалі ці результати було повністю обґрунтовано та розвинуто в [6], а у випадку монотонних звичайних диференціальних рівнянь − в [3]. У роботі [26] розроблено нову алгоритмічну реалізацію ТТРС на нерівномірній сітці через ТРС порядку точності $\overline{m}$. У [7] для нелінійних крайових задач третього роду побудовано точні різницеві крайові умови та розроблено їхню реалізацію через різницеві крайові умови високого порядку точності.

У статті [2] побудовано ТТРС та ТРС порядку точності $\overline{m}$ для монотонних крайових задач

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -\,f\left(x,u,\frac{du}{dx}\right), \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2\,.$$

ТТРС та їх алгоритмічну реалізацію через ТРС високого порядку точності для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами Діріхле

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right] = -\,\mathbf{f}\left(x,\mathbf{u},\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right), \quad x \in (0,1), \qquad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{u}(1) = \boldsymbol{\mu}_2\,,$$

де $K(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^n$ − задані, а $\mathbf{u}(x)$ − шуканий вектор, розроблено у роботах [1, 4, 5].

Точні двоточкові різницеві схеми (ТДРС) і двоточкові різницеві схеми (ДРС) довільного порядку точності для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з нероздільними крайовими умовами:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} + A(x)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \qquad x \in (0,1), \qquad B_0\mathbf{u}(0) + B_1\mathbf{u}(1) = \mathbf{d}\,, \tag{35}$$

$$A(x),\, B_0,\, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \operatorname{rank}[B_0, B_1] = n\,, \qquad \mathbf{f}(x,\mathbf{u}),\, \mathbf{d},\, \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^n\,,$$

вперше побудовано та обґрунтовано у роботах [23, 28]. Так, ТДРС для задачі (35) має вигляд

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{Y}^j(x, \mathbf{u}_{j-1}), \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{36}$$

$$B_0 \mathbf{u}_0 + B_1 \mathbf{u}_N = \mathbf{d}\,, \tag{37}$$

де $\mathbf{Y}^j(x, \mathbf{u}_{j-1})$ – розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\mathbf{Y}^j(x, \mathbf{u}_{j-1})}{dx} + A(x)\mathbf{Y}^j(x, \mathbf{u}_{j-1}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{Y}^j(x, \mathbf{u}_{j-1})), \qquad x \in (x_{j-1}, x_j]\,, \tag{38}$$

$$\mathbf{Y}^j(x_{j-1}, \mathbf{u}_{j-1}) = \mathbf{u}_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{39}$$

Якщо задачі Коші (38), (39) розв'язувати чисельно за допомогою будь-якого однокрокового методу порядку точності m, то замість ТДРС (36), (37) отримаємо відсічену ДРС рангу m

$$\mathbf{y}_j^{(m)} = \mathbf{Y}^{(m)j}(x_j, \mathbf{y}_{j-1}^{(m)}), \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{40}$$

$$B_0 \mathbf{y}_0^{(m)} + B_1 \mathbf{y}_N^{(m)} = \mathbf{d}\,, \tag{41}$$

де $\mathbf{Y}^{(m)j}(x_j, \mathbf{y}_{j-1}^{(m)})$ – чисельний розв'язок задачі Коші (38), (39), отриманий однокроковим методом порядку точності m. Доведено, що ДРС (40), (41) має m-й порядок точності. У [23] наведено результати чисельних експериментів, які показують, що при розв'язуванні крайових задач з великими сталими Ліпшиця, крайових задач для жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь і задач з малим параметром запропоновані ДРС є ефективнішими, ніж метод стрільби. У роботі [22] розроблено новий алгоритм чисельного розв'язування крайових задач (35) двоточковими різницевими схемами з заданою точністю та автоматичним вибором точок сітки.

У працях [20, 21] для нелінійної крайової задача на півосі

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = -f(x, u), \qquad x \in (0, \infty), \qquad m = \text{const} > 0\,, \tag{42}$$

$$u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x \to \infty} u(x) = 0\,, \tag{43}$$

побудовано ТТРС на скінченній нерівномірній сітці $\hat{\omega}_h$. Крім того, запропоновано реалізацію ТТРС через відсічені ТРС порядку точності $\overline{n}$, а також розроблено новий адаптивний алгоритм чисельного розв'язування задачі (42), (43) з заданою точністю. Наведено результати чисельних експериментів, які підтверджують ефективність запропонованого підходу.

Отже, в статті наведено огляд основних результатів теорії точних компактних різницевих схем і компактних різницевих схем високого порядку точності та розроблених на їх основі алгоритмів, які є одними з найефективніших для чисельного розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

1. *Гнатив Л. Б., Кутнив М. В., Макаров В. Л.* Обобщенные трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2009. – **45**, № 7. – С. 980–1000.
2. *Гнатів Л. Б., Кутнів М. В., Чухрай А. І.* Узагальнені триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 59–69.

   Те саме: *Gnativ L. B., Kutniv M. V., Chukhrai A. I.* Generalized three-point difference schemes of high order of accuracy for nonlinear ordinary differential equations of the second order // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 62–75.

3. *Кутнив М. В.* Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – **40**, № 3. – С. 387–401.
4. *Кутнив М. В.* Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2001. – **41**, № 6. – С. 909–921.
5. *Кутнив М. В.* Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с монотонным оператором // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – **42**, № 5. – С. 754–768.
6. *Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 1. – С. 45–60.
7. *Кутнів М. В.* Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 61–66.
8. *Макаров В. Л., Гочева С. Г.* Разностные схемы любого порядка точности для дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 3. – С. 527–540.
9. *Макаров В. Л., Гуминский В. В.* Трехточечная разностная схема высокого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (несамосопряженный случай) // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 493–502.
10. *Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г.* Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1194–1205.
11. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 3. – С. 538–543.
12. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 4. – С. 795–800.
13. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – Москва: Наука, 1987. – 296 с.
14. *Самарский А. А., Макаров В. Л.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 7. – С. 1254–1265.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – **1**, № 1. – С. 5–63.
16. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – **1**, № 3. – С. 425–440.
17. *Chawla M. M.* A sixth order tridiagonal finite difference method for general nonlinear two-point boundary value problems // IMA J. Appl. Math. – 1979. – **24**, No. 1. – P. 35–42.
18. *Doedel E. J.* The constructions to ordinary differential equations. // SIAM J. Numer. Anal. – 1978. – **15**, No. 4. – P. 450–465.
19. *Gartland E. C.* (*Jr.*) Strong stability of compact discrete boundary value problems via exact discretizations // SIAM J. Numer. Anal. – 1988. – **25**, No. 1. – P. 111–123.
20. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Adaptive algorithms based on exact difference schemes for nonlinear BVPs on the half-axis // Appl. Numer. Math. – 2009. – **59**, No. 7. – P. 1529–1536.
21. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Comput. Methods in Appl. Math. – 2007. – **7**, No. 1. – P. 25–47.

22. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Two-point difference schemes of an arbitrary given order of accuracy for nonlinear BVPs // Appl. Math. Lett. – 2010. – **23**, No. 5. – P. 585–590.
23. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Difference schemes for nonlinear BVPs using Runge–Kutta IVP-solvers // Adv. Differ. Equat. – 2006. – Vol. 2006, Article ID 12167. – P. 1–29.
24. *Iyengar S. R. K., Pillai A. C. R.* Difference schemes of polynomial and exponential orders // Appl. Math. Model. – 1989. – **13**, No. 1. – P. 58–62.
25. *Keller H. B., White A. B. (Jr.)* Difference methods for boundary-value problems in ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – **12**, No. 5. – P. 791–802.
26. *Kutniv M. V.* Modified three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations // Comput. Methods in Appl. Math. – 2003. – **3**, No. 2. – P. 287–312.
27. *Lynch R. E., Rice J. R.* A high-order difference method for differential equations // Math. of Comput. – 1980. – **34**, No. 150. – P. 333–372.
28. *Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M.* A two-point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Comput. Methods in Appl. Math. – 2004. – **4**, No. 4. – P. 464–493.

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Приведен обзор основных результатов по построению и исследованию точных и усеченных компактных разностных схем высокого порядка точности для численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и разработке на их основе новых эффективных алгоритмов численного решения краевых задач с заданной точностью и автоматическим выбором точек сетки.

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH ACCURACY ORDER

The survey of the main results on the construction and study of exact and truncated compact difference schemes of high order accuracy for numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations and development on their base of new efficient algorithms for numerical solution of boundary value problems with given accuracy and automatic selection of the grid points is provided.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
09.11.10