

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ В ЗОНІ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ ТРІЩИНИ В АДГЕЗІЙНОМУ ПРОШАРКУ МІЖ ДВОМА ІЗОТРОПНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Розглядається тріщина в тонкому адгезійному прошарку, який з'єднує два однакових пружних ізотропних півпростори. Вважається, що на нескінченності діє рівномірно розподілене нормальне напруження. Задачу розв'язано чисельно із застосуванням методу скінченних елементів. Знайдено розподіл нормального напруження на продовженні тріщини, розкриття тріщини та значення J -інтеграла. При нехтуванні товщиною прошарку та з урахуванням чисельно отриманого розподілу напружень у зоні передруйнування задачу розв'язано також аналітично. Отримано рівняння для визначення довжини зони передруйнування, а також вирази для розкриття тріщини та J -інтеграла. Для врахування розподілу напружень на продовженні тріщини побудовано універсальну апроксимаційну функцію, яка залежить від відношення зовнішнього навантаження до границі текучості прошарку, співвідношення модулів Юнга матриці та прошарку, а також від відношення товщини прошарку до довжини тріщини.

Вступ. На сьогодні широке застосування в інженерній та будівельній практиці отримали композитні матеріали. Дуже часто їх компоненти поєднуються за допомогою тонкого адгезійного прошарку, несуча здатність якого менша від несучої здатності матеріалів складових композита. Це може спричинити виникнення тріщини або в самому прошарку, або на границі поділу компонент композита та прошарку, що веде до передчасного руйнування композита.

В основоположних роботах [3, 7] зони ослаблення зв'язків берегів тріщини в однорідному ізотропному матеріалі змодельовано шляхом прикладення на продовженні тріщини постійного напруження, що протидіє її розкриттю. Така модель для міжфазних тріщин в ізотропних біматеріалах розглядалася в [1, 2], при цьому на продовженнях тріщин моделювалися зони передруйнування або пластичні смуги. У праці [6] аналізувалися привершинні зони тріщини, розташовані між двома ортотропними матеріалами. Граничний стан тріщини між двома ізотропними матеріалами досліджувався також в рамках моделі зон зчеплення («cohesive zone») в роботах [8, 16, 18].

У роботах [9, 15, 17, 19] аналітично та чисельно визначали параметри руйнування тріщини в клейовому прошарку з урахуванням його товщини та пластичних деформацій біля вершини тріщини. У [13] запропоновано аналітичний спосіб визначення розкриття тріщини та довжини зони передруйнування для тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі при врахуванні розподілу нормальних напружень на продовженні тріщини. У роботі [20] аналітично та чисельно визначали параметри руйнування для тріщини в тонкому прошарку між двома ізотропними матеріалами. При цьому в аналітичному підході враховували розподіли напружень на продовженні тріщини, які визначали в одному випадку чисельно, в іншому – за допомогою апроксимаційної функції. Електромеханічні зони передруйнування вивчали в роботах [11, 12, 14] для випадків електроізолюваної тріщини та тріщини зі скінченною електричною проникністю.

У цій роботі запропоновано аналітичний спосіб визначення параметрів руйнування, що враховує розподіл напружень на продовженні тріщини в тонкому адгезійному прошарку. Розподіл напружень знаходиться чисельно за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). На основі цих результатів побудовано апроксимаційну функцію для визначення напружень в зо-

ні передруйнування. Отримана функція враховує відношення зовнішнього навантаження до границі текучості прошарку, співвідношення модулів Юнга матриці та прошарку, відношення товщини прошарку до довжини тріщини.

Постановка задачі та моделювання зон передруйнування. Розглянемо плоску задачу для двох однакових пружних ізотропних півпросторів, що з'єднані тонким адгезійним прошарком товщини h . Вважаємо, що в прошарку розташована тріщина довжиною $2\ell_0$, яка паралельна до його границь, а на нескінченності діють рівномірно розподіленні нормальні напруження $\sigma_{yy} = \sigma^\infty$ (рис. 1). Механічні властивості півпросторів визначаються модулем зсуву μ та параметром α , де $\alpha = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації, $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоского напруженого стану, ν – коефіцієнт Пуассона. Матеріал прошарку приймаємо ідеально пружно-пластичним, що задовольняє умову текучості Мізеса та визначається границею текучості σ_T , модулем зсуву μ_h і коефіцієнтом Пуассона ν_h .

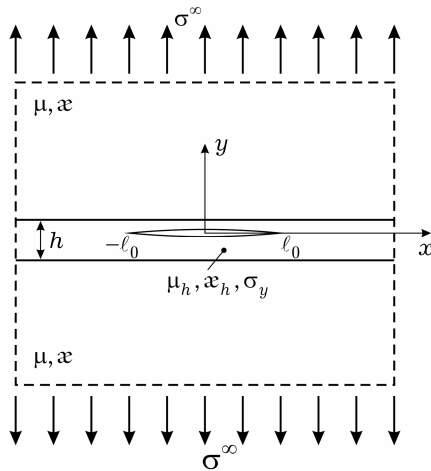


Рис. 1

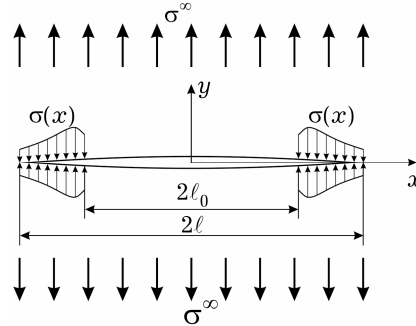


Рис. 2

Як правило, матеріал прошарку м'якший порівняно з матеріалами компонентів, які він з'єднує. Тому можемо припустити, що саме в ньому на продовженні тріщини виникають зони послаблення зв'язків частинок середовища (зони передруйнування) та розвиваються пластичні деформації. Застосовуючи ідею Леонова – Панасюка – Дагдейла [3, 7], моделюємо на продовженні тріщини $|x| \in (\ell_0, \ell)$ зони передруйнування, на берегах яких задаємо нормальне напруження $\sigma_{yy}^\pm = \sigma(x)$, що протидіє розкриттю тріщини. Ця функція $\sigma(x)$ не є константою і поки що вважаємо її невідомою. Функцію $\sigma(x)$ можна визначити експериментально або чисельно.

Зазвичай товщина прошарку набагато менша від довжини тріщини, тому нею можемо знехтувати. Тоді граничні умови на лінії $y = 0$ мають вигляд (рис. 2)

$$\sigma_{yy}(x, 0) = q(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \ell_0 \leq |x| \leq \ell, \\ 0, & |x| \leq \ell_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| \leq \ell,$$

$$[u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [\sigma_{yy}] = 0, \quad [\tau_{xy}] = 0, \quad |x| > \ell. \quad (2)$$

Квадратними дужками тут позначено стрибок відповідної функції через вісь x . Граничні умови на нескінченності запишемо так:

$$\sigma_{yy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \quad \tau_{xy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = 0. \quad (3)$$

Позбавляючись від напруження на нескінченності, отримуємо напружений стан, який визначається такими граничними умовами на берегах тріщини:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x) = q(x) - \sigma^\infty = \begin{cases} \sigma(x) - \sigma^\infty, & \ell_0 \leq |x| \leq \ell, \\ -\sigma^\infty, & |x| \leq \ell_0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| \leq \ell.$$

Таким чином, одержали задачу лінійної механіки руйнування для тріщини $x \in (-\ell, \ell)$ в однорідному ізотропному матеріалі, на берегах якої діють невідомі напруження $\sigma_{yy}^\pm = p(x)$. При цьому положення точки $x = \pm \ell$ вважається також невідомим і його потрібно визначити.

Загальний аналітичний розв'язок. Для однорідного ізотропного матеріалу, що знаходиться під дією лише нормального навантаження, вирази для напружень та похідних від стрибків переміщень на лінії $y = 0$ запишемо в наступному вигляді [10]:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = g\{F^+(x) + F^-(x)\}, \quad (5)$$

$$i[v'(x, 0)] = F^+(x) - F^-(x), \quad (6)$$

де $g = \frac{2\mu}{x+1}$, а $F(z)$ – функція, аналітична у всій площині, за винятком області тріщини.

Використовуючи співвідношення (5) та задовольняючи граничну умову (4), отримуємо задачу лінійного спряження

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{g} p(x), \quad x \in (-\ell, \ell), \quad (7)$$

з граничною умовою на нескінченності

$$F(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (8)$$

Згідно з [4] розв'язок задачі (7), (8) можемо записати у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi g i W(z)} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{p(t)W^+(t)}{t-z} dt, \quad (9)$$

де $W(z) = \sqrt{z^2 - \ell^2}$.

Враховуючи те, що $F^+(x) = F^-(x) = F(x)$ для значень $x \notin (-\ell, \ell)$, з рівняння (5) отримаємо таке співвідношення для визначення напружень на лінії $y = 0$:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{1}{\pi i W(x)} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{p(t)W^+(t)}{t-x} dt, \quad x \notin (-\ell, \ell). \quad (10)$$

Для подальшого інтегрування виразу (10) апроксимуємо функцію $\sigma(x)$ на проміжку $[\ell_0, \ell]$. Для цього графік функції подамо кусково-сталою функцією

$$\sigma(x) = \sigma_i, \quad x \in [c_{i-1}, c_i], \quad (11)$$

де

$$\sigma_i = \sigma(c_i - \Delta/2), \quad c_i = c_0 + i\Delta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Delta = \frac{\ell - \ell_0}{n}, \quad c_0 = \ell_0, \quad c_n = \ell.$$

Обчисливши інтеграл у співвідношенні (10), отримаємо вираз для визначення напружень. Оскільки згідно з вибраною моделлю напруження у новій вершині $x = \pm \ell$ повинні бути обмеженими, то коефіцієнт інтенсивності напружень у цій точці повинен дорівнювати нулеві. Задовольняючи цю умову, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\arcsin \frac{c_{i-1}}{\ell} - \arcsin \frac{c_i}{\ell} \right] = -\frac{\pi \sigma^\infty}{2}. \quad (12)$$

Співвідношення (12) – це рівняння для визначення довжини зони передруйнування тріщини $(\ell - \ell_0)$, яке, як правило, розв'язують чисельно.

Враховуючи (12), одержимо остаточну формулу для визначення напружень для $|x| \geq \ell$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma^\infty + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\left(\arcsin \frac{\ell^2 - xc_i}{\ell(x - c_i)} - \arcsin \frac{\ell^2 + xc_i}{\ell(x + c_i)} \right) - \right. \\ \left. - \left(\arcsin \frac{\ell^2 - xc_{i-1}}{\ell(x - c_{i-1})} - \arcsin \frac{\ell^2 + xc_{i-1}}{\ell(x + c_{i-1})} \right) \right], \quad |x| \geq \ell. \quad (13) \end{aligned}$$

Тепер визначимо стрибок переміщень у початковій вершині тріщини $x = \ell_0$. Для цього знайдений із співвідношення (7) вираз для $F^-(x)$ підставимо в (6). Тоді, використовуючи рівність (9) для визначення $F^+(x)$ та обчислюючи інтеграли, для стрибка переміщень отримаємо такий вираз:

$$\begin{aligned} [v(x, 0)] = \frac{1}{2\pi g} \sum_{i=1}^n \sigma_i \{ (x - c_{i-1})\Gamma(\ell, c_{i-1}, x) - (x + c_{i-1})\Gamma(\ell, -c_{i-1}, x) - \\ - (x - c_i)\Gamma(\ell, c_i, x) + (x + c_i)\Gamma(\ell, -c_i, x) \}, \quad |x| \leq \ell, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{де } \Gamma(\ell, x, \xi) = \ln \frac{\ell^2 - x\xi - \sqrt{(\ell^2 - x^2)(\ell^2 - \xi^2)}}{\ell^2 - x\xi + \sqrt{(\ell^2 - x^2)(\ell^2 - \xi^2)}}.$$

Використовуючи (14), маємо, що розкриття тріщини у початковій вершині $x = \ell_0$ визначається формулою

$$\delta = [v(\ell_0, 0)]. \quad (15)$$

Для визначення J -інтеграла виберемо контур інтегрування вздовж границі зони передруйнування. Тоді отримуємо

$$J = \sum_{i=1}^n \sigma_i ([v(c_{i-1}, 0)] - [v(c_i, 0)]) = \sum_{i=1}^n \sigma_i (\delta_{i-1} - \delta_i). \quad (16)$$

Значення δ і J , що обчислюються за формулами (15) та (16), будемо розглядати як основні параметри руйнування, за допомогою яких визначається граничний стан тріщини.

Чисельне дослідження. Запропонований аналітичний метод враховує розподіл нормального напруження на продовженні тріщини, який, як правило, є невідомим. Один із способів його знаходження полягає у застосуванні чисельних методів. Тому у цьому розділі розв'яжемо поставлену задачу методом скінченних елементів та знайдемо невідому досі функцію $\sigma(x)$ в формулі (4). При чисельному розв'язуванні задачі будемо враховувати товщину адгезійного прошарку та замінимо верхню й нижню півплощини прямокутниками скінченних розмірів $2H_1 \times 2H_2$. Матеріал прошарку приймаємо ідеально пружно-пластичним з границею текучості σ_T , який задовольняє умову текучості Мізеса. Скінченно-елементна сітка показана на рис. 3,

а її фрагмент біля правої вершини тріщини та розбиття прошарку на скінченні елементи в її околі – на рис. 4. Використовуються чотирикутні восьмивузлові скінченні елементи. Зазначимо, що розміри елементів біля вершини тріщини дорівнюють $1/3000$ її довжини.

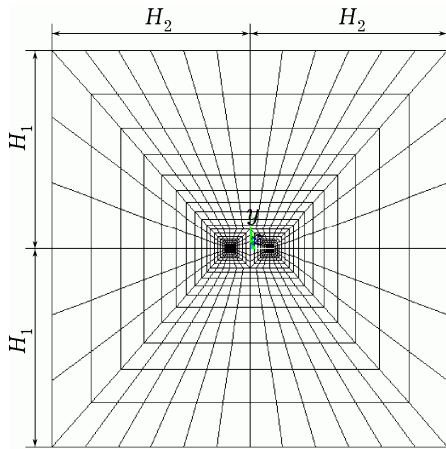


Рис. 3

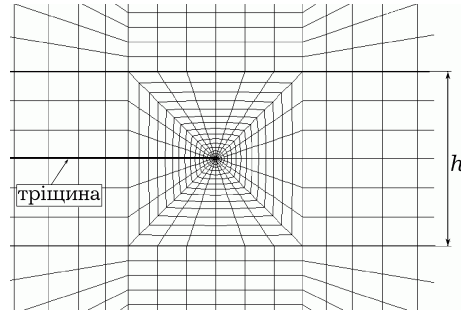


Рис. 4

При чисельному аналізі визначасмо розподіл нормальних напружень σ_{yy} на продовженні тріщини, розкриття тріщини в початковій вершині тріщини та J -інтеграл.

У МСЕ розкриття тріщини в початковій її вершині обчислюємо за допомогою методу екстраполяції [5]. Для цього обчислюємо переміщення вузлів, які розташовані на березі тріщини. При цьому виключаємо декілька вузлів біля самої вершини. Далі, проводячи екстраполяцію, знаходимо відповідне значення розкриття тріщини.

У методі скінченних елементів J -інтеграл обчислюємо за формулою [5]

$$J = \int_G W dy - \int_G \left((\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS, \quad (17)$$

де G – довільний контур навколо вершини тріщини; W – густина енергії деформації; n_x, n_y – напрямні косинуси одиничної нормалі n до контуру G . Зауважимо, що для визначення J -інтеграла інтегрування проводилося вздовж трьох контурів, які включають пластичну зону та перетинають межі поділу між прошарком та матрицями. Різниця між отриманими значеннями виявилась незначною й не перевищує 1%.

Побудова апроксимаційної функції. Оскільки при застосуванні аналітичного методу систематичне знаходження розподілу напружень з чисельного розв'язку є недоцільним, то для визначення поведінки напружень у зоні передруйнування введемо універсальну апроксимаційну функцію, яка залежить від геометричних і механічних властивостей композита. Подамо її у такому вигляді:

$$\sigma(x) \approx \tilde{\sigma}(x) = \frac{(\varphi + \psi) \cdot \sigma^\infty}{\sqrt{\frac{2\pi(x - \ell_0)}{\ell_0} + \chi \cdot \sqrt{\zeta}}}, \quad (18)$$

де φ, ψ, χ та ζ – функції, які будуть визначені пізніше.

Для аналізу напруженого стану в адгезійному прошарку введемо також безрозмірний параметр

$$\tilde{K} = \frac{K}{\sigma_T \sqrt{h}}, \quad (19)$$

де $K = \sigma^\infty \sqrt{\pi \ell_0}$ – коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини нормального відриву в однорідній пружній площині. Таким чином, варіюючи вхідні параметри в формулі (19), отримуємо відповідне значення \tilde{K} .

Оскільки розподіл напружень залежить від відношень $\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}$, $\frac{h}{\ell_0}$ та $\frac{E}{E_h}$, а також від параметра \tilde{K} , тому при визначенні невідомих функцій у формулі (18) будемо вважати, що $\varphi = \varphi(\tilde{K})$, $\psi = \psi\left(\frac{E}{E_h}\right)$, $\chi = \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$, $\zeta = \zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$.

Спочатку розглянемо випадок постійної товщини прошарку, а нормальне напруження на нескінченності будемо варіювати. Таким чином, визначимо невідомі функції $\varphi = \varphi(\tilde{K})$ і $\chi = \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$, що залежать від параметра \tilde{K} і відношення $\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}$. Оскільки в цьому випадку залишаються незмінними відношення $\frac{h}{\ell_0}$ та $\frac{E}{E_h}$, тому функції ψ і ζ у формулі (18) на даному етапі також будуть константами. Без втрати загальності приймемо, що при $\frac{E}{E_h} = 5$, $\frac{h}{\ell_0} = 0.02$ маємо $\psi = \psi(5) = 0.0$ і $\zeta = \zeta(0.02) = 0.02$. Для знаходження функцій φ та χ спочатку обчислимо їх наближені величини φ_i та χ_i , що відповідають окремим \tilde{K} та σ^∞/σ_T . Варіюючи їх значення, визначаємо φ_i та χ_i таким чином, щоб розкриття тріщини та J -інтеграла, обчислені аналітичним методом при застосуванні апроксимаційної функції, були близькі до результатів, отриманих аналітичним методом, у якому розподіл напружень визначається МСЕ. При цьому будемо вимагати, щоб розбіжність між результатами не перевищувала 5 %.

Таблиця 1

| \tilde{K} | $\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}$ | χ_i | $\chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$ | φ_i | $\varphi(\tilde{K})$ |
|-------------|----------------------------------|----------|---|-------------|----------------------|
| 5.01 | 0.40 | 8.5 | 8.5 | 7.25 | 7.79 |
| 7 | 0.56 | 12.5 | 12.5 | 9.00 | 8.91 |
| 8.5 | 0.68 | 15.5 | 15.5 | 10.00 | 9.76 |
| 10.03 | 0.80 | 18.5 | 18.5 | 10.80 | 10.62 |
| 12 | 0.96 | 22.5 | 22.5 | 12.00 | 11.74 |
| 15 | 1.20 | 28.5 | 28.5 | 13.50 | 13.43 |
| 17 | 1.36 | 32.5 | 32.5 | 14.50 | 14.56 |
| 20 | 1.60 | 38.5 | 38.5 | 16.00 | 16.25 |

Згідно з отриманими значеннями φ_i та χ_i (табл. 1) відповідні функції $\varphi(\tilde{K})$ та $\chi = \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$ подамо в такому вигляді:

$$\varphi(\tilde{K}) = a_0 + a_1 \tilde{K},$$

$$\chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right) = b_0 + b_1 \frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, на основі φ_i та χ_i визначимо невідомі коефіцієнти a_0 , a_1 та b_0 , b_1 у цих виразах. В результаті одержуємо

$$\varphi(\tilde{K}) = 4.961 + 0.5646\tilde{K}, \quad (20)$$

$$\chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right) = -1.5 + 25 \frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}. \quad (21)$$

У табл. 1 наведено також значення функцій $\varphi(\tilde{K})$ та $\chi = \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$, знайдені відповідно за формулами (20) та (21).

Тепер у виразі (18) визначимо функцію $\zeta(h/\ell_0)$. Для цього розглянемо випадок постійного зовнішнього навантаження $\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T} = 1.5$, а варіювати будемо відношення товщини прошарку до довжини тріщини $\frac{h}{\ell_0}$. Тоді за формулою (21) маємо, що $\chi(1.5) = 36$.

Для кожного випадку $\frac{h}{\ell_0}$ згідно з (19) обчислюємо відповідне значення \tilde{K} , а потім за формулою (20) визначасмо значення функції $\varphi(\tilde{K})$. Аналогічно до попереднього випадку для визначення функції ζ знаходимо наближені значення ζ_i таким чином, щоб похибка між результатами для розкриття тріщини та J -інтеграла, які обчислені за допомогою апроксимаційної функції та чисельно отриманого розподілу напруження, не перевищувала 5%. Аналізуючи одержані значення коефіцієнта ζ_i (табл. 2), подамо функцію $\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$ у вигляді

$$\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right) = c_0 + c_1 \frac{h}{\ell_0} + c_2 \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^2.$$

Невідомі коефіцієнти c_0, c_1, c_2 визначаємо методом найменших квадратів. В результаті отримуємо

$$\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right) = 0.0352 - 1.19 \frac{h}{\ell_0} + 21.43 \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^2. \quad (22)$$

У табл. 2 наведено значення параметра \tilde{K} та функції $\varphi(\tilde{K})$, а також значення ζ_i та апроксимаційної функції $\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$, що визначається за формулою (22).

Таблиця 2

| $\frac{h}{\ell_0}$ | \tilde{K} | $\varphi(\tilde{K})$ | ζ_i | $\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$ |
|--------------------|-------------|----------------------|-----------|--------------------------------------|
| 0.005 | 37.60 | 26.19 | 0.0300 | 0.0298 |
| 0.01 | 26.59 | 19.97 | 0.0250 | 0.0254 |
| 0.015 | 21.71 | 17.22 | 0.0225 | 0.0222 |
| 0.02 | 18.80 | 15.58 | 0.0200 | 0.0200 |
| 0.025 | 16.81 | 14.45 | 0.0188 | 0.0188 |

Для врахування механічних властивостей композита дослідимо вплив на параметри руйнування співвідношення модулів Юнга матриці E і прошарку E_h та визначимо в формулі (18) невідому функцію $\psi(E/E_h)$. Досі розглядалася лише одна комбінація матеріалів, коли $E/E_h = 5$, а ψ приймали рівним $\psi(5) = 0.0$. Розглянемо інші випадки відношення E/E_h . Нехай

на нескінченності діє нормальне напруження $\sigma^\infty = 0.8\sigma_T$, а відносну товщину прошарку приймаємо рівною $h/\ell_0 = 0.02$. Тоді згідно з (19) маємо, що $\tilde{K} = 10.03$. Значення функцій $\varphi = \varphi(\tilde{K})$, $\chi = \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$ і $\zeta = \zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$ у виразі (18) визначаємо за формулами (20)–(22) і отримуємо: $\varphi(10.03) = 10.62$, $\chi(0.8) = 18.5$, $\zeta(0.02) = 0.02$.

Варіюючи значення функції ψ в формулі (18) та використовуючи вимогу, аналогічну наведеній вище, одержуємо значення ψ_i (див. табл. 3), що відповідають конкретним величинам E/E_h . Аналіз результатів показує, що функцію $\psi(E/E_h)$ доцільно подати таким чином:

$$\psi\left(\frac{E}{E_h}\right) = d_0 + d_1 \frac{E}{E_h} + d_2 \left(\frac{E}{E_h}\right)^2.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, на основі таблиці значень ψ_i знаходимо невідомі коефіцієнти d_0, d_1, d_2 . Остаточний вираз для визначення $\psi(E/E_h)$ запишемо в наступному вигляді:

$$\psi\left(\frac{E}{E_h}\right) = 1.884 - 0.3797 \frac{E}{E_h} + 0.00764 \left(\frac{E}{E_h}\right)^2. \quad (23)$$

Значення функції $\psi(E/E_h)$ для розглянутих відношень модулів Юнга наведено в табл. 3.

Таблиця 3

| E/E_h | 1 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| ψ_i | 1.58 | 1.22 | 0.00 | -1.22 | -2.00 | -2.55 | -2.92 |
| $\psi(E/E_h)$ | 1.51 | 1.16 | 0.18 | -1.15 | -2.09 | -2.65 | -2.83 |

Таким чином, отримали універсальну апроксимаційну функцію для визначення розподілу напружень в зоні передруйнування вигляду

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{\left[\varphi(\tilde{K}) + \psi\left(\frac{E}{E_h}\right)\right] \cdot \sigma^\infty}{\sqrt{\frac{2\pi(x - \ell_0)}{\ell_0} + \chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right) \cdot \sqrt{\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)}}, \quad (24)$$

де функції $\varphi(\tilde{K})$, $\psi\left(\frac{E}{E_h}\right)$, $\chi\left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_T}\right)$ та $\zeta\left(\frac{h}{\ell_0}\right)$ визначаються формулами (20)–(23). Далі подання (24) апроксимуємо кусково-сталою функцією згідно з (11) та визначаємо невідомі коефіцієнти σ_i . Потім, застосовуючи вирази (15) та (16), обчислюємо значення розкриття тріщини та J -інтеграла. Таким чином, вираз (24) дає змогу використовувати запропонований аналітичний спосіб без застосування методу скінченних елементів.

Аналіз результатів. Числові розрахунки виконано для значень довжини тріщини $\ell_0 = 10$ мм і лінійних розмірів $H_1 = H_2 = 100$ мм. Модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона для півпросторів, що знаходяться в умовах плоскої деформації, приймали рівними $\mu = 1250$ МПа, $\nu = 0.2$, а матеріал прошарку визначали константами: $\mu_h = 225.56$ МПа, $\nu_h = 0.33$, $\sigma_T = 2$ МПа. При обчисленнях приймаємо, що тріщина розташована вздовж середньої лінії адгезійного прошарку. Оскільки поставлена задача симетрична, то будемо аналізувати результати лише біля правої вершини тріщини.

Аналіз результатів виконаємо в залежності від таких величин:

- відношення нормального напруження на нескінченності до границі текучості прошарку σ^∞/σ_T ;
- відношення товщини прошарку до довжини тріщини h/ℓ_0 ;
- співвідношення модулів Юнга матриці та прошарку E/E_h .

Для кожного розглянутого випадку розрахунки проводимо в три етапи:

- 1°) методом скінченних елементів визначається розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини, розкриття тріщини та J -інтеграл;
- 2°) знайдений розподіл напружень використовується для знаходження функції $\sigma(x)$ у формулі (4) і на основі цього проводиться чисельна реалізація аналітичного методу. Зокрема, обчислюються довжина зони переддруйнування, розкриття тріщини та J -інтеграл. Такий підхід будемо називати *способом 2* і позначати **с2**;
- 3°) для визначення розподілу напружень на продовженні тріщини $\sigma(x)$ у формулі (4) використовується апроксимаційна функція $\tilde{\sigma}(x)$, яка задається виразом (24). Потім, аналогічно до *способу 2*, застосовуються формули (12), (15) та (16) аналітичного розв'язку та обчислюються довжина зони переддруйнування, розкриття тріщини та J -інтеграл. Цей підхід будемо називати *способом 3* і позначати **с3**.

Постійна товщина прошарку. Спочатку розглянемо випадок товщини прошарку $h = 0.2$ мм, а навантаження на нескінченності будемо варіювати. За формулою (19) для кожного значення навантаження визначаємо відповідну величину параметра \tilde{K} . Застосовуючи МСЕ, знаходимо розподіл нормального напруження на продовженні тріщини для значень $\tilde{K} = 5.01, 7.5, 8.5, 10.03, 12, 15, 17, 20$ (рис. 5). Зазначимо, що нормальні напруження нормовані до границі текучості σ_T , а відстань від вершини тріщини – товщиною прошарку h . На рис. 5 видно, що для всіх значень \tilde{K} , окрім $\tilde{K} = 5.01$, нормальне напруження біля вершини тріщини близьке $3\sigma_T$, потім стрімко зростає до максимального значення, а після цього – повільно спадає.

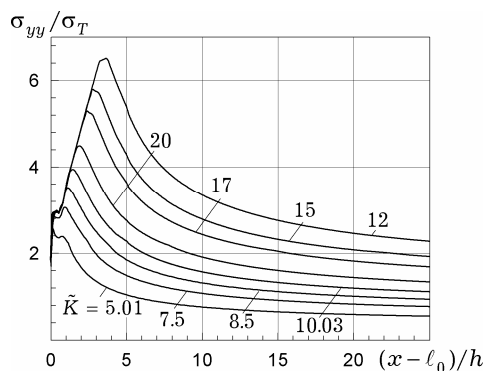


Рис. 5

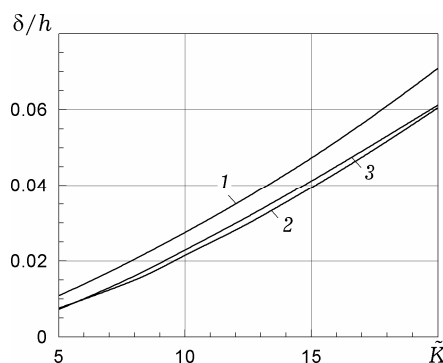


Рис. 6

На рис. 6 показано зміну розкриття тріщини в початковій вершині в залежності від параметра \tilde{K} . Нормовані значення розкриття тріщини δ/h визначали МСЕ та аналітичними *способами с2 та с3*, які враховують поведінку нормальних напружень на продовженні тріщини. Зауважимо, що на рис. 6, а також на рис. 8 та рис. 10 криві 1 відповідають значенням розкриття тріщини, обчисленим методом скінченних елементів, криві 2 і 3 – результатам розрахунків *способами с2 і с3* відповідно.

Згідно з рис. 6 результати, отримані аналітичним способом **с2**, який враховує розподіл напружень з чисельного експерименту, добре узгоджені з результатами аналітичного підходу **с3**, в якому використовується апроксимаційна функція $\tilde{\sigma}(x)$ вигляду (24). При цьому похибка не перевищує 8%. Також відмітимо, що аналітично знайдені значення розкриття тріщини (способами **с2** і **с3**) мають подібну поведінку з результатами, які отримано чисельно МСЕ, але відрізняються майже на сталу величину, яка становить близько 20% від величини δ/h . Така розбіжність пояснюється тим, що, поперше, в МСЕ розкриття тріщини визначається як відстань між берегами в початковій вершині при наявності пружно-пластичного матеріалу на продовженні тріщини. По-друге, додаткову похибку вносить метод екстраполяції переміщень вузлів тріщини, що використовується при визначенні розкриття тріщини в МСЕ.

У табл. 4 для різних значень параметра \tilde{K} наведено нормовані довжини зони переддруйнування $(\ell - \ell_0)/h$ та нормоване значення J -інтеграла $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0)$. Можемо бачити, що значення J -інтеграла, обчислені МСЕ та аналітичними підходами **с2** та **с3**, відрізняються не більше, ніж на 5%. Слід зазначити, що розбіжність між результатами для J -інтеграла отриманими аналітичними способами **с2** та **с3**, не перевищує 1%. Зауважимо, що довжина зони переддруйнування в аналітичному методі слугує допоміжним фактором для визначення розкриття тріщини та J -інтеграла.

Таблиця 4

| \tilde{K} | $(\ell - \ell_0)/h$ | | $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0)$ | | | | |
|-------------|---------------------|-----------|---------------------------------|-----------|-------|-----------|-------|
| | с2 | с3 | МСЕ | с2 | % | с3 | % |
| 5.01 | 6.75 | 2.39 | 0.514 | 0.491 | -4.4% | 0.491 | -4.5% |
| 7 | 12.80 | 3.83 | 1.006 | 0.962 | -4.4% | 0.965 | -4.0% |
| 8.5 | 15.50 | 4.80 | 1.489 | 1.423 | -4.4% | 1.430 | -3.9% |
| 10.03 | 17.25 | 5.70 | 2.055 | 1.988 | -3.3% | 2.002 | -2.6% |
| 12 | 16.75 | 6.78 | 2.977 | 2.859 | -4.0% | 2.877 | -3.4% |
| 15 | 16.75 | 8.18 | 4.688 | 4.499 | -4.0% | 4.532 | -3.3% |
| 17 | 18.75 | 8.98 | 6.047 | 5.803 | -4.0% | 5.849 | -3.3% |
| 20 | 20.50 | 10.03 | 8.407 | 8.083 | -3.9% | 8.151 | -3.0% |

Постійне навантаження. Тепер розглянемо випадок, коли на нескінченності діє постійне навантаження $\sigma^\infty = 3$ МПа, а товщина прошарку варіюється. На рис. 7 наведено поведінку нормального напруження σ_{yy}/σ_T на продовженні тріщини в залежності від безрозмірної координати $(x - \ell_0)/\ell_0$. Розрахунки виконано для значень безрозмірної товщини $h/\ell_0 = 0.005, 0.010, 0.015, 0.020, 0.025$. Видно, що при зменшенні товщини прошарку істотно збільшується нормальне напруження на продовженні тріщини.

Значення розкриття тріщини, отримані чисельно за допомогою МСЕ та аналітично з використанням підходів **с2** та **с3**, показано на рис. 8. Можемо бачити, що при зменшенні товщини прошарку істотно зменшується значення розкриття тріщини. Відзначимо, що результати досить добре узгоджені. Зокрема, похибка між значеннями розкриття тріщини отриманими аналітичним способом **с3**, в якому розподіл напружень задається апроксимаційною функцією (24), та способом **с2** не перевищує 5%. Також різниця між значеннями δ/ℓ_0 , отриманими за допомогою МСЕ та згідно з підходом **с2**, який враховує чисельно отриманий розподіл напружень на продовженні тріщини, становить близько 15%. Як зазначалося в попередньому випадку, така відмінність пов'язана зі способом визначення розкриття тріщини в методі скінчених елементів.

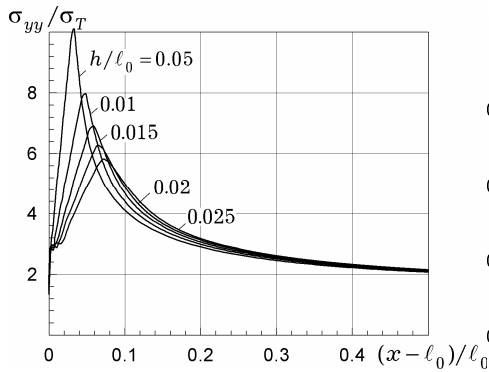


Рис. 7

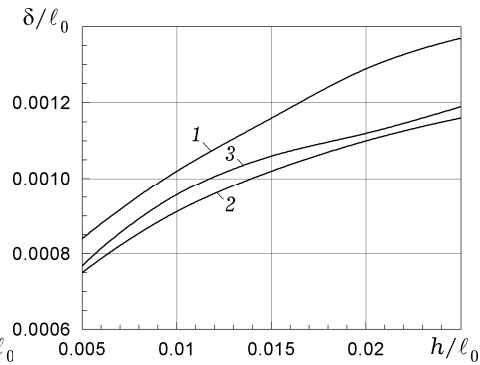


Рис. 8

Нормовані значення довжини зони передруйнування та J -інтеграла для різних відношень h/ℓ_0 наведено в табл. 5. Згідно з отриманими даними при визначенні J -інтеграла результати, обчислені трьома способами, добре узгоджені між собою й похибка не перевищує 4%. Зокрема, похибка між аналітичними підходами **c2** та **c3** – не більше 1%. Незважаючи на те, що розкриття тріщини значно залежить від товщини прошарку, J -інтеграл стійкий до зміни товщини прошарку. Це пояснюється тим, що враховується розподіл напружень на продовженні тріщини, і, таким чином, меншому значенню розкриття тріщини (рис. 8) відповідає більше значення нормального напруження (рис. 7), і навпаки.

Таблиця 5

| h/ℓ_0 | $(\ell - \ell_0)/\ell_0$ | | $J \cdot E / (\sigma_T^2 \ell_0)$ | | | | |
|------------|--------------------------|-----------|-----------------------------------|-----------|-------|-----------|-------|
| | c2 | c3 | МСЕ | c2 | % | c3 | % |
| 0.005 | 0.15 | 0.08 | 7.126 | 6.934 | -2.7% | 6.983 | -2.0% |
| 0.010 | 0.25 | 0.13 | 7.249 | 7.010 | -3.3% | 7.087 | -2.2% |
| 0.015 | 0.32 | 0.17 | 7.322 | 7.071 | -3.4% | 7.148 | -2.4% |
| 0.020 | 0.38 | 0.19 | 7.406 | 7.119 | -3.9% | 7.175 | -3.1% |
| 0.025 | 0.43 | 0.22 | 7.461 | 7.163 | -4.0% | 7.221 | -3.2% |

Залежність від співвідношення модулів пружності матриці та прошарку. Оскільки дослідження досі проводилося для одного виду комбінацій матеріалів, коли співвідношення модулів Юнга матриці та прошарку дорівнює $E/E_h = 5$, дослідимо вплив на параметри руйнування відношення E/E_h та розглянемо такі його значення: $E/E_h = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25$. Згідно з розподілом нормального напруження на продовженні тріщини (рис. 9) маємо, що зі збільшенням відношення E/E_h поступово зменшується максимальне значення σ_{yy} , а на відстані $6 \cdot (x - \ell_0)/h$ напруження для всіх значень E/E_h майже співпадають.

На рис. 10 показано залежність розкриття тріщини δ/h від співвідношення модулів пружності матриці та прошарку E/E_h . Результати обчислень розкриття тріщини, отримані за допомогою підходів **c2** та **c3**, відрізняються не більше, ніж на 8%. Зазначимо, що чисельно знайдені (МСЕ) значення розкриття тріщини мають подібну поведінку з результатами аналітичного розв'язку **c2**, але має місце розбіжність порядку 15–20%, яка пояснюється тими ж причинами, що й для випадку постійної товщини прошарку.

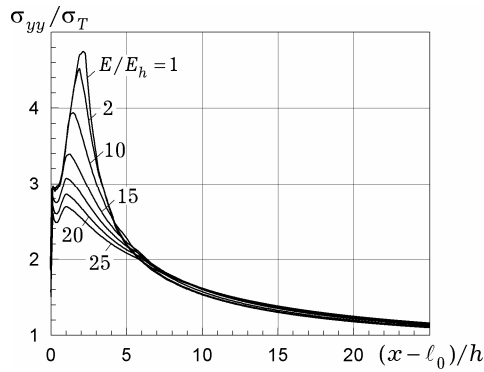


Рис. 9

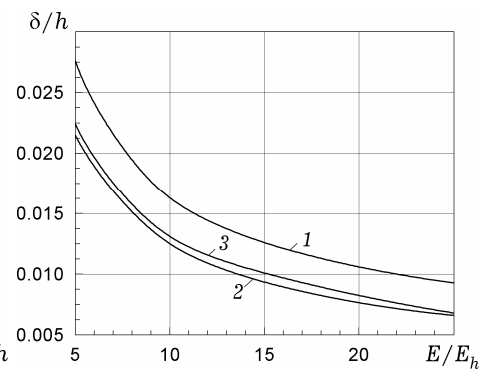


Рис. 10

У табл. 6 наведено нормовані значення довжини зони переддруйнування, а також значення J -інтеграла. Бачимо, що при збільшенні відношення E/E_h похибка між результатами для J -інтеграла, отриманими МСЕ та аналітичними підходами **с2** та **с3**, збільшується та не перевищує 10%. Розбіжність між значеннями J -інтеграла, обчисленими згідно зі способом **с3**, коли поведінка напружень в зоні переддруйнування задається апроксимаційною формулою (24), та підходом **с2**, що враховує істинний розподіл напружень, не більше 1%.

Таблиця 6

| $\frac{E}{E_h}$ | $(\ell - \ell_0)/h$ | | $J \cdot E / (\sigma_T^2 \ell_0)$ | | | | |
|-----------------|---------------------|-----------|-----------------------------------|-----------|-------|-----------|-------|
| | с2 | с3 | МСЕ | с2 | % | с3 | % |
| 1 | 2.45 | 4.05 | 2.002 | 1.969 | -1.6% | 1.978 | -1.2% |
| 2 | 3.63 | 4.36 | 2.018 | 1.971 | -2.3% | 1.983 | -1.7% |
| 5 | 17.25 | 5.43 | 2.055 | 1.988 | -3.3% | 1.993 | -3.0% |
| 10 | 29.00 | 7.73 | 2.126 | 2.015 | -5.2% | 2.016 | -5.2% |
| 15 | 36.50 | 10.50 | 2.192 | 2.039 | -7.0% | 2.050 | -6.5% |
| 20 | 42.50 | 12.95 | 2.256 | 2.061 | -8.6% | 2.070 | -8.2% |
| 25 | 45.75 | 13.95 | 2.306 | 2.081 | -9.8% | 2.078 | -9.9% |

Отже, для всіх розглянутих випадків результати аналітичного підходу **с3**, коли напруження в зоні переддруйнування задаються апроксимаційною функцією $\tilde{\sigma}(x)$, досить добре узгоджені з результатами аналітичного методу **с2**, який враховує істинний розподіл напружень з чисельного експерименту. Зокрема, похибка для розкриття тріщини не перевищує 8%, а J -інтеграла – 1%. Таким чином, в подальшому для визначення розкриття тріщини та J -інтеграла можемо використовувати вирази (15) і (16) аналітичного методу, а для врахування розподілу напружень на продовженні тріщини застосовувати апроксимаційну функцію $\tilde{\sigma}(x)$, що задається формулою (24).

Приклад. Як приклад практичного застосування розглянемо поставлену задачу для композита алюмінію Al 7075-T7351, склеєного тонким прошарком епоксидної смоли. Механічні властивості матеріалів визначаються модулями Юнга та коефіцієнтами Пуассона $E = 71.7$ ГПа, $\nu = 0.33$ та $E_h = 3.1$ ГПа, $\nu_h = 0.39$ відповідно для алюмінію й епоксидної смоли, а також границею текучості епоксидної смоли $\sigma_T = E_h/300$. Довжина тріщини і товщина прошарку приймаються рівними відповідно $\ell_0 = 10$ мм та $h = 0.2$ мм, а лінійні розміри – $H_1 = H_2 = 100$ мм. На нескінченності діє рівномірно розподілене нормальне напруження $\sigma^\infty = 16.48$ МПа, що згідно з формулою (19) відповідає випадку $\tilde{K} = 20$.

Використовуючи метод скінченних елементів, задача розв'язана чисельно. Отримано розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини σ_{yy} та обчислено розкриття тріщини $\delta/h = 1.90 \cdot 10^{-2}$, а також значення J -інтеграла $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0) = 8.433$. Далі розподіл нормальних напружень, отриманий з чисельного розв'язку, апроксимуємо кусково-сталогою функцією (див. форм. (11)) та застосовуємо в аналітичному методі. Згідно з (12), (15) і (16) обчислюємо довжину зони переддруйнування, значення розкриття тріщини та J -інтеграла. В результаті отримуємо наступні їх значення:

$$(\ell - \ell_0)/h = 40.0, \quad \delta/h = 1.44 \cdot 10^{-2}, \quad J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0) = 7.663.$$

Як раніше зазначалося, для запропонованого аналітичного підходу поведінку напружень на продовженні тріщини визначати кожного разу методом скінченних елементів не є доцільним. Тому тепер нормальне напруження в зоні переддруйнування задамо апроксимаційною функцією $\tilde{\sigma}(x)$ згідно з (24). Для цього обчислюємо за формулами (20)–(23) невідомі значення функцій та отримуємо, що $\varphi(20) = 16.25$, $\chi(1.6) = 38.5$, $\zeta(0.02) = 0.02$ та $\psi(E/E_h) = -2.81$. Таким чином, апроксимаційна функція набуває вигляду

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{13.44 \cdot \sigma^\infty}{\sqrt{\frac{2\pi(x - \ell_0)}{\ell_0} + 38.5 \cdot \sqrt{0.02}}}.$$

Апроксимуючи це подання кусково-сталогою функцією та застосовуючи формули (12), (15), (16) аналітичного методу, обчислюємо значення довжини зони переддруйнування $(\ell - \ell_0)/h = 17.1$, розкриття тріщини $\delta/h = 1.56 \cdot 10^{-2}$ та J -інтеграла $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0) = 7.808$. Одержуємо, що розбіжність в результатах при визначенні J -інтеграла методом скінченних елементів та аналітичними підходами **c2** і **c3** не перевищує 9.1%. Також зазначимо, що результати для розкриття тріщини та J -інтеграла, отримані аналітичними способами **c2** та **c3**, добре узгоджені між собою.

За допомогою МСЕ дослідимо вплив розташування тріщини в адгезійному прошарку на значення J -інтеграла. Для цього обчислимо значення J -інтеграла в околі вершини тріщини, коли вона розташована на верхній і нижній межі поділу матеріалів матриці (алюмінію) та прошарку (епоксидної смоли). Отримали, що J -інтеграл для тріщини на верхньому та нижньому інтерфейсі відповідно дорівнює $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0) = 8.399$ і $J \cdot E/(\sigma_T^2 \ell_0) = 8.386$. Бачимо, що розташування тріщини в адгезійному прошарку майже не впливає на значення J -інтеграла, а їх розбіжність не досягає 1%. Це дає змогу в подальшому тріщину розглядати як на інтерфейсі матеріалів матриць та прошарку, так і в самому адгезійному прошарку.

Висновки. Розглянуто плоску задачу для тріщини в тонкому ідеально пружно-пластичному адгезійному прошарку, що з'єднує два однакових пружних ізотропних півпростори. Задача розв'язана чисельно за допомогою методу скінченних елементів. В результаті знайдено розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини, розкриття тріщини та J -інтеграл. Також побудовано аналітичний розв'язок, який базується на спрощеній моделі прошарку нульової товщини, але враховує поведінку напружень у зоні переддруйнування тріщини. Розглядалися два підходи аналітичного методу, коли розподіл напружень знаходили безпосередньо з чисельного експерименту або задавали апроксимаційною функцією. Зауважимо, що апроксимаційна функція побудована в залежності від механічних та геометричних властивостей композита. Таким чином, із використанням обох підходів ана-

літичного методу обчислено довжини зон передруйнування, розкриття тріщини та J -інтеграл та встановлено, що результати добре узгоджені. Зокрема, похибка для розкриття тріщини не перевищує 8%, а J -інтеграла – 1%. Порівняльний аналіз результатів МСЕ та аналітичного методу показує, що їх розбіжність при визначенні J -інтеграла в більшості випадків не перевищує 5%.

1. Бакиров В. Д., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова – Панасюка – Дагдейла для тріщини на границі соединения матеріалів // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 1. – С. 170–179.
2. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для тріщини на границі раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 1. – С. 63–68.
Te same: Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A. On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 1. – P. 58–63.
3. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердом тілі // Прикл. механика. – 1959. – **5**, № 4. – С. 391–401.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
5. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. – Москва: Мир, 1986. – 334 с.
6. Шевельова А. Є. Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами // Фіз.-хім. механика матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 33–40.
Te same: Sheveleva A. E. Modeling of the near-tip zones of a crack between two anisotropic materials // Mater. Sci. – 2000. – **36**, No. 2. – P. 187–197.
7. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – **8**, No. 2. – P. 100–104.
8. Freed Y., Banks-Sills L. A new cohesive zone model for mixed mode interface fracture in biomaterial // Eng. Fract. Mech. – 2008. – **75**. – P. 4583–4593.
9. He M. E., Evans A. G., Hutchinson J. W. Interface cracking phenomena in constrained metal layers // Acta Materialia. – 1996. – **7**. – P. 2963–2971.
10. Herrmann K. P., Loboda V. V., Kharun I. V. Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading // Theor. and Appl. Fract. Mech. – 2004. – **42**. – P. 335–348.
11. Lapusta Y., Loboda V. Electro-mechanical yielding for a limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials // Mech. Res. Commun. – 2009. – **36**. – P. 183–192.
12. Loboda V., Lapusta Y., Govorukha V. Mechanical and electrical yielding for an electrically insulated crack in an interlayer between piezoelectric materials // Int. J. Eng. Sci. – 2008. – **46**. – P. 260–272.
13. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Analysis of pre-fracture zone for an electrically permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials // Int. J. Fract. – 2006. – **142**. – P. 307–313.
14. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**. – P. 1795–1806.
15. Marannano G. V., Mistretta L., Cirello A., Pasta S. Crack growth analysis at adhesive-adherent interface in bonded joint under mixed mode I/II // Eng. Fract. Mech. – 2008. – **75**, No. 18. – P. 5122–5133.
16. Needleman A. An analysis of tensile decohesion along an interface // J. Mech. Phys. Solids. – 1990. – **38**. – P. 289–324.
17. Pickthall C., Wang C., Rose L. R. F. Plasticity in constrained layers: model with point forces // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **69**. – P. 647–658.
18. Tvergaard V., Hutchinson J. W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – **41**. – P. 1119–1135.
19. Varias A. G., Suo Z., Shih C. F. Ductile failure of a constrained metal foil // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**. – P. 963–986.
20. Voloshko O., Lapusta Y., Loboda V. Analytical and numerical study of cohesive zones for a crack in an adhesive layer between identical isotropic materials // Eng. Fract. Mech. – 2010. – **77**. – P. 2577–2592.

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ЗОНЕ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ В АДГЕЗИОННОЙ ПРОСЛОЙКЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ИЗОТРОПНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Рассматривается трещина в тонкой адгезионной прослойке, соединяющей два одинаковых упругих изотропных полупространства. Полагаем, что на бесконечности действует равномерно распределенное нормальное напряжение. С использованием метода конечных элементов задача решена численно. Найдено распределение нормального напряжения на продолжении трещины, раскрытие трещины и значение J -интеграла. Задача решена также аналитически при пренебрежении толщиной прослойки и с учетом численно полученного распределения напряжения в зоне предразрушения. Получено уравнение для определения длины зоны предразрушения, а также выражения для раскрытия трещины и J -интеграла. Для учета распределения напряжений на продолжении трещины построена универсальная аппроксимационная функция, которая зависит от отношения внешней нагрузки к пределу текучести прослойки, соотношения модулей Юнга матрицы и прослойки и отношения толщины прослойки к длине трещины.

CONSTRUCTION OF APPROXIMATING FUNCTION IN THE PRE-FRACTURE ZONE FOR CRACK IN ADHESIVE LAYER BETWEEN TWO ISOTROPIC MATERIALS

A crack in a thin adhesive layer, which connects two identical elastic isotropic half-spaces, is considered. It is assumed that uniformly distributed normal stress is applied to the substrates at infinity. Using the finite element method, the problem is solved numerically. Distribution of normal stress at the crack continuation, the crack opening displacement and the values of the J -integral are found. Neglecting the interlayer thickness and taking into account numerically obtained stress distribution in the pre-fracture zone, the problem is also solved analytically. An equation to determine the pre-fracture zone lengths, expressions for the crack opening displacement and for the J -integral are obtained in an analytical form. To take into account the distribution of stress, an universal approximating function is constructed. This function depends on the ratio between the external loading and the yield limit of the interlayer, on the ratio between the Young's modulus of the substrate and interlayer and on the ratio between the interlayer thickness and the crack length.

¹ Дніпропетр. нац.
ун-т ім. О. Гончара, Дніпропетровськ,

² French Institute of Advanced Mechanics,
LAMI / IFMA, Clermont Université, France