УДК 539.3

В. А. Галазюк[1], Г. С. Кіт[2]

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТІЛА З ПЛОСКОЮ ПЕЛЕНОЮ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Визначення стаціонарного температурного поля в тілі з пеленою теплових джерел зведено до інтегрального рівняння першого роду і запропоновано метод знаходження множини його розв'язків. За відомим температурним полем і рівняннями термопружності в переміщеннях знайдено компоненти вектора пружного переміщення та компоненти тензора температурних напружень. Досліджено розподіл температурних переміщень і напружень за довільного осесиметричного розподілу температури в круговій області.

Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагрівання, при якому виникають градієнти температури і температурні напруження. Знання величини та характеру дії температурних напружень є необхідним для всебічного аналізу міцності конструкцій. Для практики важливе значення мають дослідження термопружного стану тепловиділювальних елементів [9]. Наявність у тілі тонких включень, які виділяють тепло, зумовлює виникнення напружень розтягу або стиску. У першому випадку ці напруження разом з іншими факторами можуть призвести до виникнення і росту тріщин, а в другому – можуть понизити інтенсивність напружень в околі наявної тріщини при силовому навантаженні та створити умови її гальмування [10].

При дослідженні напруженого стану тіла з теплоактивними тріщинами (на яких задано температуру або тепловий потік) проміжним етапом є визначення напружень на місці розташування тріщин, а наступним – звільнення їх поверхонь від цих напружень.

Більшість досліджень напружено-деформованого стану тіл з круговими теплоактивними або теплоізольованими тріщинами виконано в осесиметричній постановці методом інтегрального перетворення Ганкеля і дуальних інтегральних рівнянь [11–16]. У монографії [3] при розв'язуванні тривимірних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тріщинами розроблено метод двовимірних граничних інтегральних рівнянь з використанням теорії ньютонівського потенціалу. При цьому густинами потенціалів задачі теплопровідності є потужність теплових джерел на місці розташування тріщин, які при заданій на тріщині температурі визначаються з інтегрального рівняння з полярним ядром.

Визначенню температурного поля і напруженого стану тіла, в якому на круговій області задано температуру або тепловий потік, що описуються поліномами третього степеня, присвячена праця [4], а в осесиметричному випадку для полінома довільного степеня – праця [5].

У класичній постановці задач стаціонарної теплопровідності з теплоактивними включеннями [4, 5] постулюється наявність джерел тепла тільки в області включення, а це призводить до сингулярного розподілу теплових потоків на його краю.

Нижче запропоновано нову постановку і метод розв'язування осесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тонким теплоактивним включенням. Локалізовані тонкі плоскі неоднорідності в межах цієї постановки моделюються пеленою теплових джерел, а зумовлене ними температурне поле визначається розв'язками інтегральних рівнянь першого роду. За додаткових некласичних умов серед множини розв'язків цих рівнянь завжди існує розв'язок, який виконує фізично прийнятну вимогу неперервності теплових потоків на краю неоднорідності.

1. Фундаментальна система розв'язків рівнянь термопружності з плоскою пеленою джерел тепла. В однорідному ізотропному пружному просторі введемо циліндричну систему координат $r = R\alpha$, $\beta, z = R\gamma$ з початком у площині $\gamma = 0$, де R − деякий характерний лінійний розмір (радіус включення). Під дією осесиметричного температурного поля у просторі реалізується осесиметричний відносно осі γ напружено-деформований стан. У цьому випадку векторне рівняння [6] квазістатичної термопружності

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,T$$

у циліндричній системі координат зводиться до двох рівнянь із частинними похідними

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \alpha_T(3k^2 - 4)\partial_\alpha T\,,$$

$$k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = \alpha_T(3k^2 - 4)\partial_\gamma T \tag{1}$$

стосовно інваріантних величин

$$\theta(\alpha,\gamma) = \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma\,,$$

$$2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma\,. \tag{2}$$

Тут $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, де λ і μ − сталі Ляме; ν − коефіцієнт Пуассона; α_T − коефіцієнт лінійного теплового розширення; Ru_α, Ru_γ − компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$ в напрямку осей α і γ відповідно; ∂_α, ∂_γ − оператори диференціювання за α, γ.

З урахуванням виразів (2) система рівнянь (1) розщеплюється на два незалежні рівняння

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha\theta) + \partial^2{}_\gamma\theta = \alpha_T k^{-2}(3k^2 - 4)\left[\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial^2{}_\gamma T\right], \tag{3}$$

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha u_\gamma) + \partial^2{}_\gamma u_\gamma = -(k^2 - 1)\partial_\gamma\theta + \alpha_T(3k^2 - 4)\partial_\gamma T \tag{4}$$

відносно ключових функцій $\theta(\alpha,\gamma)$, $u_\gamma(\alpha,\gamma)$.

Нехай у площині $\gamma = 0$ розподілені джерела тепла за законом

$$W(\alpha,p) = T_0\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,, \tag{5}$$

де $H(\eta,p)$ − твірна функція з параметром $p > 0$; $J_0(\eta\alpha)$ − функція Бесселя першого роду. Тоді температурне поле визначиться розв'язком рівняння стаціонарної теплопровідності з пеленою джерел тепла

$$\Delta T(\alpha,\gamma) = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = 2T_0\delta(\gamma)\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,,$$

де $\delta(\cdot)$ − дельта-функція Дірака, і є таким:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,. \tag{6}$$

Цей результат при фіксованому p збігається з наведеним у праці [2]. Зазначимо, що похідна

$$\partial_\gamma T = -T_0\,\mathrm{sgn}\,\gamma\int\limits_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta$$

має стрибок при переході через площину $\gamma = 0$, а тому за означенням [8] ця площина є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля першого порядку − внутрішнім тепловим шаром (internal thermal layer), який обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

Якщо вираз для температурного поля (6) підставити в диференціальне рівняння (3) і врахувати, що $(\operatorname{sgn}\gamma)' = 2\delta(\gamma)$ то для визначення температурної об'ємної деформації $\theta^T(\alpha,\gamma)$ одержимо рівняння Пуассона

$$\Delta\theta^T(\alpha,\gamma) = 2\beta_T T_0 \delta(\gamma)\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,,$$

розв'язком якого є функція

$$\theta^T(\alpha,\gamma) = \beta_T T(\alpha,\gamma)\,,$$

$$\beta_T = \alpha_T k^{-2}(3k^2-4) = \alpha_T(1+\nu)/(1-\nu)\,. \tag{7}$$

За відомою функцією $\theta^T(\alpha,\gamma)$ диференціальне рівняння (4) відносно компоненти $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ набуде вигляду

$$\Delta u_\gamma{}^T(\alpha,\gamma) \equiv -\beta_T T_0 \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha) e^{-\eta|\gamma|}\,d\eta\,,$$

розв'язком якого є

$$u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T \gamma T(\alpha,\gamma)\,. \tag{8}$$

Якщо ввести функцію $P^T(\alpha,\gamma)$ таку, що $u_\alpha(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma)$, то перше із рівнянь (2) стане таким:

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) = \theta^T(\alpha,\gamma) - \partial_\gamma u_\gamma\,,$$

а з урахуванням подань (7) і (8)

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \int_0^\infty \eta(1+\eta|\gamma|) H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,. \tag{9}$$

Розв'язок рівняння (9)

$$P^T(\alpha,\gamma) = -\frac{1}{2}\beta_T T_0 \int_0^\infty \eta^{-1}(1+\eta|\gamma|) H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\,d\eta$$

є відомим [6] термопружним потенціалом переміщень в циліндричній системі координат, оскільки

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma), \qquad u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \partial_\gamma P^T(\alpha,\gamma)\,.$$

За відомою функцією $P^T(\alpha,\gamma)$ знайдемо радіальну компоненту $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{u}$:

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \int_0^\infty H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\,d\eta\,. \tag{10}$$

Таким чином, пелена джерел тепла, розподілених у площині $\gamma = 0$ за законом (5), викликає у тілі симетричне відносно цієї площини радіальне поле переміщень $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ за законом (10) і антисиметричне поле переміщень $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ за законом (8), що цілком узгоджується з фізикою явища.

За відомими компонентами $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ та $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ і співвідношеннями Дюамеля – Неймана можна знайти усі характеристики напружено-деформованого стану у тілі. Зокрема,

$$\sigma^T_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = -\beta_T\mu\left[T(\alpha,\gamma) + T_0\,|\gamma|\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta\right], \tag{11}$$

$$\sigma^T_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\frac{1}{2}\beta_T\mu\left[3T(\alpha,\gamma) + T_0\int_0^\infty \eta H(\eta,p)(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}J_2(\eta\alpha)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - T_0\,|\gamma|\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_0(\eta\alpha)\,d\eta\right],$$

$$\sigma^T_{\beta\beta}(\alpha,\gamma) = -\,4\mu\beta_T T\,(\alpha,\gamma) - \left[\sigma^T_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) + \sigma^T_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)\right],$$

$$\sigma^T_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = -\beta_T T_0\mu\gamma\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)e^{-\eta|\gamma|}J_1(\eta\alpha)\,d\eta\,. \tag{12}$$

Отже, за існування у площині $\gamma = 0$ пелени джерел тепла згідно з поданнями (11) і (12) у цій площині $\sigma^T_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -\beta_T\mu T(\alpha,0)$ і $\sigma^T_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0$.

2. Характеристики температурного поля в тілі із заданою температурою у крузі. Нехай розміщені у крузі одиничного радіуса джерела тепла створюють в ньому температурне поле, що змінюється за законом $T(\alpha,\pm 0) = T_0\left[C - f(\alpha^2)\right]$, де C – довільна стала, T_0 – стала із розмірністю температури, а $f(\alpha^2)$ – довільна неперервна на проміжку $0 \le \alpha \le 1$ функція. Тоді відповідно до подання (6) для визначення твірної функції $H(\eta,p)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^\infty \eta H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta = C - f(\alpha^2), \qquad 0 \le \alpha \le 1\,, \tag{13}$$

яке після диференціювання за змінною α набуде вигляду

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p)J_1(\eta\alpha)\,d\eta = 2\alpha f'(\alpha^2), \qquad 0 \le \alpha \le 1\,. \tag{14}$$

Шукану функцію $H(\eta,p)$ подамо узагальненим рядом Неймана [1]

$$\eta^2 H(\eta,p) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^p}, \qquad p > 0\,, \tag{15}$$

з коефіцієнтами a_n і параметром p, фізичний зміст якого буде з'ясовано нижче. Якщо ряд (15) підставити в інтегральне рівняння (14) та обчислити розривний інтеграл Вебера – Шафгейтліна [7], то для визначення коефіцієнтів a_n одержимо ряд

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-p+2)\alpha F(n-p+2;-n;2;\alpha^2)}{2^p\,\Gamma(n+1)} = 2\alpha f'(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1\,, \tag{16}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція, за повною і ортогональною на проміжку [0,1] системою функцій, оскільки у цьому випадку гіпергеометрична функція $(n+1)F(n-p+2;-n;2;\alpha^2) = P_n^{(1,-p)}(1-2\alpha^2)$ і є поліномом Якобі [7]. Тому коефіцієнти a_n ряду (16) визначаються формулою ортогональності за похідною функції $f(\alpha^2)$. Якщо коефіцієнти a_n знайдено, то у рівнянні (13) стала

$$C = f(0) + \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-p+1)}{2^{p+1}}$$

і залежить від параметра $p > 0$.

Тепер за відомою твірною функцією (15) визначимо характеристики температурного поля:

– температуру

$$T(\alpha,\gamma) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,, \tag{17}$$

– складові безрозмірного вектора $\mathbf{q}^* = R\mathbf{q}/\lambda T_0$ теплового потоку

$$q_\alpha^*(\alpha,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,, \tag{18}$$

– розподіл джерел тепла

$$W(\alpha,p) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\xi)}{\eta^{p}}\, d\eta = T_0 q_\gamma^*(\alpha,+0)\,, \tag{19}$$

а також викликані ними температурні переміщення і напруження, які відповідно до подань (7), (8), (10) і (12) набудуть вигляду

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{(1+\eta|\gamma|)J_1(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p+2}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,,$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,,$$

$$\theta^T(\alpha,\gamma) = \beta_T T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T T_0 \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{(1+\eta|\gamma|)J_0(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T \mu T_0 \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta\alpha)J_{2n-p+2}(\eta)}{\eta^{p}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta\,. \tag{20}$$

Інтеграли у виразах (17)–(19) температурного поля, а також термопружного стану (20) у тілі можуть бути знайдені числовими методами, проте на поверхнях $\gamma = \pm 0$ теплового шару вони стають розривними інтегралами Вебера – Шафгейтліна [7] і обчислюються аналітично. Тому матимемо, що

– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$T(\alpha,\pm 0) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1)F(n-p+1;-n-1;1;\alpha^2)}{2^{p+1}\Gamma(n+2)}\,,$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+2)\alpha P_n^{(1,-p)}(1-2\alpha^2)}{2^{p}\Gamma(n+2)}\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1.5)F(n-p+1.5;-n-0.5;1;\alpha^2)}{2^{p}\Gamma(n+1.5)}\,,$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1)\alpha F(n-p+1;-n-1;2;\alpha^2)}{2^{p+2}\Gamma(n+2)}\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\beta_T \mu T(\alpha,+0) =$$

$$= -\beta_T T_0 \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1) F(n-p+1; -n-1; 1; \alpha^2)}{2^{p+1}\Gamma(n+2)},$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0\,; \tag{21}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$T(\alpha,\pm 0) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1) F(n-p+1; n-p+1; 2n-p+3; \alpha^{-2})}{2^{p+1}\Gamma(2n-p+3)\Gamma(-n+p)\alpha^{2n-2p+2}},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+2) F(n-p+2; n-p+1; 2n-p+3; \alpha^{-2})}{2^{p}\Gamma(2n-p+3)\Gamma(-n+p)\alpha^{2n-2p+3}},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) =$$

$$= \pm \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1.5) F(n-p+1.5; n-p+1.5; 2n-p+3; \alpha^{-2})}{2^{p}\Gamma(2n-p+3)\Gamma(-n+p-0.5)\alpha^{2n-2p+3}},$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1) F(n-p+1; n-p; 2n-p+3; \alpha^{-2})}{2^{p+2}\Gamma(2n-p+3)\Gamma(-n+p+1)\alpha^{2n-2p+1}},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\mu\theta^T(\alpha,\pm 0) = -\beta_T \mu T(\alpha,\pm 0),$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0\,. \tag{22}$$

У відповідності із фізикою явища характеристики (21) і (22) температурного поля і викликаних ними температурних переміщень та напружень повинні бути неперервними на межі $\alpha = 1$ області тепловиділення і заникати при $\alpha \to \infty$. Тому для характеристик температурного поля, а також для температурних переміщень і напружень вимагатимемо виконання умов

$$\lim_{\alpha\to 1-0} q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} q_\alpha^*(\alpha,\pm 0), \qquad \lim_{\alpha\to\infty} T(\alpha,\pm 0) = 0\,, \tag{23}$$

$$\lim_{\alpha\to 1-0} u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} u_\alpha^T(\alpha,\pm 0), \qquad \lim_{\alpha\to\infty} u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0\,. \tag{24}$$

Спираючись на умову аналітичності $c-a-b>0$ гіпергеометричної функції Ґаусса $F(a;b;c;x^2)$ в точці $x=1$, одержимо, що умови (23) будуть виконуватися, якщо $0<p<1$, а умови (24) – якщо $-2<p<\frac{1}{2}$. Тому перетин цих множин для параметра p є таким:

$$0 < p < \frac{1}{2} \tag{25}$$

і, коли виконується ця нерівність, усі характеристики температурного поля і зумовлені цим полем температурні переміщення і напруження є неперервними на межі $\alpha = 1$ і заникають на нескінченності. Зазначимо, що при виконанні нерівності (25) джерела тепла продовжуються поза межі області тепловиділення за законом (19). Тому параметр $0<p<\frac{1}{2}$ може слугувати механо-теплофізичною характеристикою внутрішнього теплового шару, який обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

3. Приклад. Нехай у крузі одиничного радіуса температура $T(\alpha, \pm 0) = T_0(C - \alpha^2)$, тоді в рівнянні (14) $f'(\alpha^2) = 2\alpha$, коефіцієнт $a_0 = 2^{p+1}[\Gamma(2-p)]^{-1}$ і за поданням (15) знайдемо, що

$$\eta^2 H(\eta, p) = \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \frac{J_{2-p}(\eta)}{\eta^p}, \tag{26}$$

причому в рівнянні (13) стала $C = (1-p)^{-1}$.

У цьому випадку характеристики температурного поля (17), (18), а також викликаних ним температурних переміщень і напружень (20) набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}
T(\alpha,\gamma) &= T_0 \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
q_\alpha^*(\alpha,\gamma) &= \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
q_\gamma^*(\alpha,\gamma) &= \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
u_\alpha^T(\alpha,\gamma) &= \beta_T T_0 \frac{2^{p}}{\Gamma(2-p)} \int_0^\infty \frac{(1+\eta|\gamma|) J_1(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+2}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
u_\gamma^T(\alpha,\gamma) &= \beta_T T_0 \frac{2^{p}}{\Gamma(2-p)} \gamma \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
\theta^T(\alpha,\gamma) &= \beta_T T_0 \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) &= -\beta_T T_0 \mu \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \int_0^\infty \frac{(1+\eta|\gamma|) J_0(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta, \\
\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) &= -\beta_T T_0 \mu \frac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)} \gamma \int_0^\infty \frac{J_1(\eta\alpha) J_{2-p}(\eta)}{\eta^{p}} e^{-\eta|\gamma|}\, d\eta.
\end{aligned} \tag{27}$$

При цьому на поверхнях теплового шару за поданнями (21) і (22) матимемо

– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$\begin{aligned}
T(\alpha, \pm 0) &= T_0 \left[\frac{1}{1-p} - \alpha^2 \right], \\
q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) &= 2\alpha, \\
q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) &= \pm \frac{4\Gamma(1.5-p) F(1.5-p; -0.5-p; 1; \alpha^2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(2-p)}, \\
u_\alpha^T(\alpha, \pm 0) &= \frac{\beta_T T_0 \alpha}{4(1-p)} F(1-p; -1; 2; \alpha^2) = \frac{\beta_T T_0 \alpha}{4(1-p)} \left[1 - \frac{1}{2}(1-p)\alpha^2 \right], \\
\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) &= -\mu \beta_T T(\alpha, \pm 0), \\
u_\gamma^T(\alpha, \pm 0) &= 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = 0;
\end{aligned} \tag{28}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$T(\alpha,\pm 0) = T_0 \frac{F(1-p;1-p;3-p;\alpha^{-2})}{(1-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p)\alpha^{2-2p}},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \frac{2F(2-p;1-p;3-p;\alpha^{-2})}{\Gamma(3-p)\Gamma(p)\alpha^{3-2p}},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \pm\frac{2\Gamma(1.5-p)F(1.5-p;1.5-p;3-p;\alpha^{-2})}{\Gamma(2-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p-0.5)\alpha^{3-2p}},$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \beta_T T_0 \frac{1}{4(1-p)} \frac{F(1-p;-p;3-p;\alpha^{-2})}{\Gamma(3-p)\Gamma(1+p)\alpha^{1-2p}},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\mu\theta^T(\alpha,\pm 0) = -\beta_T\mu T_0 \frac{F(1-p;1-p;3-p;\alpha^{-2})}{(1-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p)\alpha^{2-2p}},$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0. \tag{29}$$

Розподіл характеристик (27) температурного поля і відповідного йому поля переміщень і напружень забезпечує розподіл джерел тепла, який знайдемо за відомою твірною функцією (26) і формулою (19). Отже,
– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$W(\alpha,p) = 4T_0 \frac{\Gamma(1.5-p)F(1.5-p;-0.5;1;\alpha^2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2-p)} =$$

$$= 4T_0 \frac{\Gamma(1.5-p)(1-\alpha^2)^p F(-0.5+p;1.5;1;\alpha^2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2-p)}; \tag{30}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$W(\alpha,p) = 2T_0 \frac{\Gamma(1.5-p)F(1.5-p;1.5-p;3-p;\alpha^{-2})}{\Gamma(2-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p-0.5)\alpha^{3-2p}}. \tag{31}$$

За виконання нерівності (25) розподіл джерел тепла (30) і (31) є неперервним на межі $\alpha = 1$ області тепловиділення, у чому можна переконатися, застосувавши формулу підсумовування гіпергеометричної функції Ґаусса

$$F(a;b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

яка має місце за умови $c-a-b>0$. Зазначимо, що при $-\frac{1}{2} \le p < 0$ розподіл джерел тепла (30) в області $0 \le \alpha \le 1$ завжди змінює знак на протилежний і є сингулярним із особливістю $(1-\alpha^2)^p$.

4. Аналіз характеристик температурного поля та температурних переміщень і напружень в залежності від параметра $-\frac{1}{2} \le p \le \frac{1}{2}$. Розглянемо спочатку випадок нижньої межі нерівності (25): $p = 0$. Тоді згідно з поданнями (28) і (29) матимемо, що
– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$T(\alpha,\pm 0) = T_0(1-\alpha^2),$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 2\alpha,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \pm 2F(1.5;-0.5;1;\alpha^2),$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{4}\beta_T T_0 \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right),$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\frac{1}{2}\beta_T \mu T_0 (1-\alpha^2)\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0\,; \tag{32}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$T(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \mp\frac{1}{4\alpha^3}F(1.5;1.5;3;\alpha^{-2})\,,$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{8\alpha}\beta_T T_0\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0\,. \tag{33}$$

Аналіз характеристик (32) і (33) температурного поля, температурних переміщень і напружень дає можливість стверджувати наступне. При $p = 0$ внутрішній тепловий шар поза областю тепловиділення набуває теплової анізотропії, оскільки в ньому радіальна складова $q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 0$, а нормальна складова $q_\gamma^*(\alpha,\pm 0)$ існує і на межі $\alpha = 1$ має логарифмічну особливість. При цьому його теплова деформація поза областю тепловиділення не викликає температурних напружень.

Розглянемо тепер випадок верхньої межі нерівності (25): $p = 1/2$. Тоді за поданнями (28) і (29) знайдемо, що

– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$T(\alpha,\pm 0) = T_0(2-\alpha^2)\,,$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 2\alpha\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \pm 8\frac{1}{\pi}(1-\alpha^2)\,,$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \alpha\left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right),$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\beta_T \mu T_0\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right),$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0\,; \tag{34}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$T(\alpha,\pm 0) = \frac{2}{\pi}T_0\alpha\left[\sqrt{\alpha^2-1} - (\alpha^2-2)\arcsin\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = -\frac{4}{\pi}\alpha\left(\alpha^2\arcsin\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\alpha}\beta_T T_0\left[(\alpha^2+2)\sqrt{\alpha^2-1} - \alpha^2(\alpha^2-4)\arcsin\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = -\mu\theta^T(\alpha,\pm 0) = -\beta_T\mu T(\alpha,\pm 0)\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = 0\,. \tag{35}$$

Аналіз характеристик (34) і (35) температурного поля, температурних переміщень і напружень при $p = 1/2$ дає можливість зробити висновок про наступне. Внутрішній тепловий шар поза областю тепловиділення також набуває теплову анізотропію. Проте у цьому випадку нормальна складова вектора теплового потоку $q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = 0$, а радіальна складова $q_\alpha^*(\alpha, \pm 0)$ вектора теплового потоку відмінна від нуля і радіальне переміщення $u_\alpha^T(\alpha, \pm 0)$ на безмежності є сталим.

Зазначимо, що при одержанні характеристик температурного поля, поля переміщень і напружень застосовувались формули підсумовування гіпергеометричної функції Ґаусса, які одержані авторами.

Якщо параметр $p = -1/2$, то за очевидного порушення нерівності (25) відповідно до подань (28) і (29) характеристики температурного поля на берегах $\gamma = \pm 0$ теплового шару будуть такими:

− *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$T(\alpha, \pm 0) = T_0\left(\frac{2}{3} - \alpha^2\right),$$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = 2\alpha,$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \pm\frac{8}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}(2 - 3\alpha^2); \qquad (36)$$

− *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$T(\alpha, \pm 0) = -\frac{8}{45\pi\alpha^3}T_0 F(1.5; 1.5; 3.5; \alpha^{-2}) =$$

$$= -\frac{2}{3\pi}T_0\left[(3\alpha^2 - 2)\arcsin\frac{1}{\alpha} - 3\sqrt{\alpha^2 - 1}\right],$$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = -\frac{8}{15\pi\alpha^4}F(2.5; 1.5; 3.5; \alpha^{-2}) =$$

$$= -\frac{4}{3\pi\alpha}T_0\left[\frac{3\alpha^2 - 1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 3\alpha^2\arcsin\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = 0. \qquad (37)$$

Аналізуючи розподіл характеристик (36) і (37) температурного поля, зауважимо, що температура на межі області нагріву $\alpha = 1$ є неперервною. Натомість потоки тепла на лінії $\alpha = 1$ мають сингулярний розподіл з кореневою особливістю, а нормальна складова $q_\gamma^*(\alpha, \pm 0)$ згідно з умовами симетрії відносно площини $\gamma = 0$ дорівнює нулеві в області $1 < \alpha < \infty$. Такий розподіл температурних характеристик забезпечують відповідно до подань (30) і (31) джерела тепла

$$W(\alpha, -0.5) = \frac{8}{3\pi}T_0\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}(2 - 3\alpha^2), \qquad 0 \le \alpha < 1,$$

$$W(\alpha, -0.5) = 0, \qquad 1 < \alpha < \infty,$$

при цьому розподіл джерел тепла змінює знак у точці $\alpha = \sqrt{2/3}$ на протилежний. Таким чином, класичну умову симетрії температурного поля відносно площини $\gamma = 0$ за довільного розподілу температури в області тепловиділення можна забезпечити коренево-сингулярним − фізично неприйнятним розподілом джерел тепла.

При цьому усі характеристики напружено-деформованого стану будуть такими:

– *в області* $0 \le \alpha \le 1$:

$$u_\alpha^T(\alpha, \pm 0) = \frac{1}{6}\beta_T T_0 \alpha\left(1 - \frac{3}{4}\alpha^2\right),$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = -\frac{2}{3}\beta_T T_0 \mu\left(1 - \frac{3}{2}\alpha^2\right); \tag{38}$$

– *в області* $1 \le \alpha < \infty$:

$$u_\alpha^T(\alpha, \pm 0) = \frac{1}{12\pi}\frac{1}{\alpha}\beta_T T_0\left[(3\alpha^2 - 2)\sqrt{\alpha^2 - 1} - (3\alpha^2 - 4)\alpha^2 \arcsin\frac{1}{\alpha}\right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = \frac{8}{45\pi}\beta_T \mu T_0 F(1.5; 1.5; 3.5; \alpha^{-2}) =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\beta_T \mu T_0\left[(3\alpha^2 - 2)\arcsin\frac{1}{\alpha} - 3\sqrt{\alpha^2 - 1}\right]. \tag{39}$$

Зазначимо, що характеристики напружено-деформованого стану (38) і (39) залишаються у цьому випадку неперервними на межі $\alpha = 1$ області тепловиділення.

Висновки. Запропоновано математичну модель пелени джерел тепла, яка зумовлює тепловиділення у круговій області $\alpha \le 1$ за довільним законом із твірною функцією $H(\eta, p)$. Ця пелена спричиняє стрибок нормальної складової вектора теплового потоку, а тому є поверхнею розриву параметрів поля першого порядку – внутрішнім тепловим шаром, який обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

Показано, що за існування внутрішнього теплового шару існує множина розв’язків крайової задачі про температурне поле з параметром $0 \le p \le$ $\le 1/2$, який слід трактувати як механіко-теплофізичну характеристику теплового шару. З’ясовано, що цей параметр визначає теплову анізотропію внутрішнього теплового шару, оскільки при $p = 0$ радіальна складова вектора теплового потоку $\mathbf{q}$ дорівнює нулеві: $q_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0$, а при $p = 1/2$ нульовою є нормальна складова: $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0$.

Доведено, що за обмеження $0 \le p \le 1/2$ усі характеристики температурного поля є неперервними на межі $\alpha = 1$ області задання температури, а температурні напруження заникають на нескінченності за сталих там нормальних і радіальних переміщень.

Встановлено, що класичний коренево-сингулярний розподіл теплових потоків на лінії $\alpha = 1$ існує за певних властивостей теплового шару, які окреслені параметром $p = -1/2$, і його можна реалізувати тільки за коренево-сингулярного розподілу джерел тепла в області $0 \le \alpha \le 1$ і їх відсутності поза межами цієї області.

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 17–46.
   Те саме: *Halazyuk V. A., Sulym H. T.* Equilibrium of a disk-shaped slot with regard for the rheological properties of the surface layer // Mater. Sci. – 2004. – **44**, No. 4. – P. 446–465.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
4. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 120–128.
   Те саме: *Kit H. S.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 141–153.

5. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
   Те саме: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
7. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
   Те саме: *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins Univ., 1972.
9. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – Москва: Энергоатом, 1985. – 280 с.
10. *Финкель В. М.* Физические основы торможения разрушения. – Москва: Металлургия, 1977. – 360 с.
11. *Deutch E.* The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci. – 1965. – **3**, No. 5. – P. 485–490.
12. *Olesiak Z., Sneddon I. N.* Thermal stresses in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1960. – **4**, No. 3. – P. 238–254.
13. *Niraula O. P., Wang B. L.* Thermal stress analysis in magneto-electro-thermo-elasticity with a penny-shaped crack under uniform heat flow // J. Therm. Stresses. – 2006. – **29**, No. 5. – P. 423–437.
14. *Shail R.* Some thermoelastic stress distribution in an infinite solid and a thick plate containing a penny-shaped crack // Mathematica. – 1964. – **11**, No. 2. – P. 102–118.
15. *Ueda S.* A penny-shaped crack in a functionally gradient piezoelectric strip under thermal loading // Engng. Fract. Mech. – 2007. – **74**, No. 8. – P. 1255–1273.
16. *Wang B. L., Noda N.* Exact thermoelectroelasticity solution for a penny-shaped crack in piezoelectric materials // J. Therm. Stresses. – 2004. – **27**, No. 3. – P. 241–251.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПЕЛЕНОЙ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Определение стационарного температурного поля в теле с пеленой тепловых источников сведено к интегральному уравнению первого рода и предложен метод нахождения множества его решений. По известному температурному полю и уравнениям термоупругости в перемещениях найдены компоненты вектора упругого перемещения и компоненты тензора температурных напряжений. Исследовано распределение температурных перемещений и напряжений при произвольном осесимметричном распределении температуры в круговой области.

AXISYMMETRIC STRESS-STRAIN STATE OF A BODY WITH PLANE SHEET OF THERMAL SOURCES

Determination of the stationary temperature field in a body with a plane sheet of thermal sources is reduced to solution of the integral first kind equation. The method of determination of a set of solutions of this equation is proposed. The components of elastic displacement vector and the components of temperature stresses tensor are found taking into consideration the known temperature field and thermoelastisity equations. The distribution of thermal displacements and stresses in the case of arbitrary temperature distribution in a circular domain is investigated.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
24.12.10