

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

*Предложены модели теплопроводности ребристо-армированной пенопластмассы, базирующиеся на условии равенства диссипации в эквивалентном материале и рассматриваемом композите. Проведено сравнение расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправленно и пространственно армированных пенопластмасс. Показано, что предложенные модели дают оценки сверху и снизу для расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемых композитов.*

В объектах аэрокосмического комплекса и в некоторых других областях техники в последние десятилетия широко применяются слоистые конструкции с наполнителем. В качестве наполнителей используются пенопластические массы – неармированные и армированные пластинками или проволокой, а также разного рода ребристые конструкции (сотовые, складчатые, типа гофра и др.).

Возможности пенопластмасс как легких наполнителей значительно расширяются, если использовать их в виде армированных слоистых структур, представляющих собой пенопласты с прослойками конструкционных материалов (металл, фанера и др.), чаще всего – в виде полос [2].

Использование современных пенопластмасс (например, вспенивающихся) позволяет создавать такие типы наполнителей, в которых полости в ребристых конструкциях (сотовых, складчатых и др.) заполнены пенопластической массой. Подобные наполнители, благодаря наличию в них пенопластмассы, обладают хорошими вибрационными характеристиками, так как пенопластическая масса работает как демпфер и обеспечивает высокий градиент затухания колебаний. Кроме того, пенопластмасса, заполняющая полости ребристой конструкции, обеспечивает лучшую совместную работу элементов этой конструкции, поддерживает их и препятствует их потере устойчивости при сжатии и сдвиге, что во многом определяет жесткостные и прочностные характеристики наполнителей типа сотовых, складчатых и т. п. [6]. Подобные конструкции наполнителей можно рассматривать как пенопластмассы с ребристыми структурами армирования.

Так как используемые в аэрокосмической отрасли слоистые конструкции с наполнителем в процессе эксплуатации могут испытывать интенсивные тепловые воздействия, то актуальной является проблема расчета температурных полей в элементах таких конструкций, в частности, в наполнителе, который может представлять собой пространственно и, как правило, криволинейно армированный композит.

В силу актуальности проблемы теплопроводности армированных материалов ее изучением занимались многие исследователи. Так, в [8, 12 и др.] исследовались процессы теплопроводности в слоистых композитах, в работах [7, 10, 13, 15–17, 22 и др.] моделировалось теплофизическое поведение однонаправленно армированных волокнистых материалов, в [10, 14, 19, 21 и др.] изучалась теплопроводность перекрестно армированных в плоскости (в частности, тканых) композитов. Однако в последние годы особое внимание к себе привлекают пространственно армированные композиты, так как они позволяют ликвидировать такой недостаток слоистых композитов, как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления межслойному сдвигу и отрыву, а также локализовать распространение трещин. Публикации, посвященные изучению теплопроводности пространственно

армированных материалов, малочисленны. Так, например, в работах [9, 18, 20] исследовалось теплофизическое поведение пространственно армированных (по трем взаимно ортогональным направлениям) волокнистых композитов.

Как уже отмечалось, армированные пенопластмассы также можно рассматривать как пространственно армированные композиты, но усиленные не волокнами, а криволинейными ребристыми элементами оболочечного типа (см. ниже пояснения к рис. 1). В предельном случае, когда пенопластмасса (связующее) отсутствует, получается ребристый (решетчатый) заполнитель. Теплопроводность таких решетчатых заполнителей с учетом теплопередачи излучением исследовалась в [1].

Целью настоящей работы является построение моделей теплофизического поведения пенопластмассы с ребристым армированием, позволяющих определять эффективные коэффициенты теплопроводности эквивалентного композитного материала.

Пусть имеется слой единичной толщины  $h$ , армированный регулярно в плоскости  $(x_1, x_2)$  объемной решеткой (элементы объемной решетки – ребристой конструкции – представляют собой цилиндрические оболочечные элементы, образующие которых параллельны координате  $x_3$  прямоугольной декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ ; координата  $x_3$  направлена по толщине слоя). Выделим из такого композитного материала простейший представительный элемент (ячейку) объемом  $V = a \times b \times h$  (рис. 1) так, чтобы любой другой элемент композита можно было получить параллельным переносом по направлению  $x_1$  на расстояние  $an$ , а по направлению  $x_2$  – на расстояние  $bm$ ,  $n, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

На рис. 1 изображена ячейка с достаточно общим типом армирования. Из такой структуры заданием геометрии армирующих элементов можно получить ребристые конструкции всех видов, используемых на сегодняшний день на практике [3] (сотовые, складчатые, типа гофра и др.). Согласно рис. 1, рассматриваемая ячейка усилена четырьмя армирующими элементами, два из которых криволинейные (1 и 2) и два – плоские (3 и 4). (Возможно использование ячеек с более сложным армированием, в рамках настоящего исследования это не принципиально.) С каждым  $k$ -м,  $1 \leq k \leq K = 4$ , армирующим элементом свяжем свою локальную прямоугольную систему координат  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$  (как показано на рис. 1), которая получается поворотом глобальной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  на угол  $\varphi_k(\ell)$  вокруг вертикальной оси  $x_3$ , причем  $\varphi_3 \equiv \varphi_4 \equiv \pi/2$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются функциями естественной координаты  $\ell$ , откладываемой вдоль направляющих линий криволинейных элементов 1 и 2 (оси  $x^{(k)}$  являются касательными к направляющим линиям, а оси  $y^{(k)}$  перпендикулярны этим линиям).

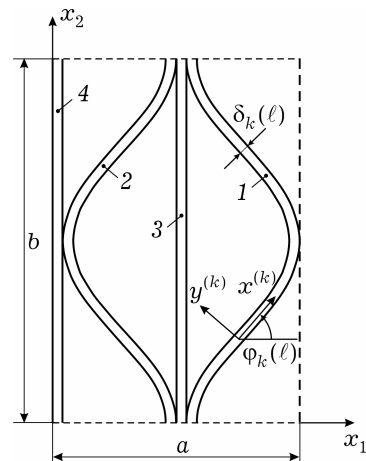


Рис. 1

Для соблюдения общности все компоненты композиции предполагаются анизотропными материалами, причем коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ij}^{(0)}$  связующего (пенопластмассы) и  $\lambda_{ij}$  композиции в целом соответственно задаются и определяются в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , а коэф-

коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ij}^{(k)}$   $k$ -го армирующего элемента – в локальной системе координат  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ . Согласно этому, закон теплопроводности Фурье для эквивалентной композитной среды и материалов компонент композиции в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{q} = -\Lambda \mathbf{g}, \quad \mathbf{q}_k = -\Lambda_k \mathbf{g}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= \{q_1, q_2, q_3\}, & \mathbf{g}^* &= \{g_1, g_2, g_3\}, & \mathbf{g} &= \text{grad } T, \\ \mathbf{q}_k^* &= \{q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, q_3^{(k)}\}, & \mathbf{g}_k^* &= \{g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, g_3^{(k)}\}, & \mathbf{g}_k &= \text{grad } T_k, \\ & & & & 0 \leq k \leq K, & (2) \end{aligned}$$

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ ,  $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^{(k)})$  –  $(3 \times 3)$ -матрицы коэффициентов теплопроводности фиктивного материала и  $k$ -й компоненты композиции соответственно;  $T, T_k$  – температуры композита и  $k$ -й фазы композиции соответственно;  $\mathbf{g}, \mathbf{g}_k$  – векторы-столбцы градиентов температуры в фиктивном материале и в  $k$ -й компоненте композиции (градиенты в (2) вычисляются в указанных выше системах координат);  $\mathbf{q}, \mathbf{q}_k$  – векторы-столбцы тепловых потоков в фиктивном материале и в  $k$ -й фазе композиции соответственно (индексом «0» помечаются характеристики связующего, а индексом « $k$ »,  $1 \leq k \leq K$ , – характеристики  $k$ -го армирующего элемента);  $K$  – количество армирующих элементов в ячейке; символ «\*» означает операцию транспонирования. Компоненты векторов  $\mathbf{g}, \mathbf{g}_0, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0$  в (2) определены в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , а векторов  $\mathbf{g}_k, \mathbf{q}_k, 1 \leq k \leq K$ , – в локальной системе  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$ .

Так как установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в композите, где основной материал (пенопластмасса) имеет многочисленные более жесткие включения сложной формы, весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения всех теплофизических характеристик в виде компонент линейной теплопроводности  $\lambda_{ij}$  необходимо сделать некоторые допущения, аналогичные тем, что были использованы в [9, 10] для вывода формул, определяющих эффективные коэффициенты теплопроводности пространственно армированной волокнистой среды.

1°. Количество представительных элементов как в направлении  $x_1$ , так и в направлении  $x_2$  достаточно велико, что позволяет рассматривать эквивалентный композит как квазиоднородный фиктивный материал.

2°. На границах между связующим и всеми армирующими элементами реализуются условия идеального теплового контакта.

3°. В пределах представительного элемента тепловые потоки и градиенты температур во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением температурных полей в малых окрестностях границ контакта пенопластмассы и армирующих элементов, пренебрегаем.

4°. Приращение усредненной температуры  $T$  вдоль произвольно ориентированного отрезка длины  $\Delta l$  равно сумме приращений температур в компонентах композиции, которые этот отрезок пересекают.

5°. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех компонентах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1), (2).

6°. В качестве условия эквивалентности выступает равенство удельной диссипации в фиктивном однородном анизотропном материале диссипации в рассматриваемом композите.

При переходе от локальной системы координат  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$  к глобальной  $x_1, x_2, x_3$  имеют место преобразования векторов (2):

$$\mathbf{Q}_k = D_k \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{G}_k = D_k \mathbf{g}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

где, в отличие от (1),  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{G}_k$  – вектор теплового потока и градиент температуры в  $k$ -м армирующем элементе, компоненты которых определены в глобальной системе координат;  $D_k = (D_{ij}^{(k)})$  – ортогональная  $(3 \times 3)$ -матрица с ненулевыми элементами

$$D_{11}^{(k)} = D_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad D_{21}^{(k)} = -D_{12}^{(k)} = \sin \varphi_k, \quad D_{33}^{(k)} = 1, \\ 1 \leq k \leq K. \quad (4)$$

Рассуждая, как и в [10], на основании допущения 4° получим равенство

$$\mathbf{g} = \frac{V_0}{V} \mathbf{g}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) \mathbf{G}_k d\ell, \quad V_0 = V - h \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) d\ell, \quad (5)$$

где  $V_0$  – объемное содержание связующего (пенопластмассы) в ячейке;  $\delta_k$ ,  $\ell_k$  – толщина и длина (вдоль направляющей)  $k$ -го армирующего элемента, причем толщина  $\delta_k \ll \min(a, b)$  в общем случае может быть переменной (но с малой изменчивостью); суммирование производится от 1 до  $K$ .

Из допущений 2°, 3° и условий сопряжения тепловых потоков и полей температур на лицевых поверхностях контакта  $k$ -го армирующего элемента со связующим получим

$$g_1^{(k)} = g_1^{(0)} \cos \varphi_k + g_2^{(0)} \sin \varphi_k, \quad g_3^{(k)} = g_3^{(0)}, \quad (6)$$

$$q_2^{(k)} = -q_1^{(0)} \sin \varphi_k + q_2^{(0)} \cos \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (7)$$

Согласно допущению 5°, подставим в (7) соотношения (1). Тогда

$$\lambda_{21}^{(k)} g_1^{(k)} + \lambda_{22}^{(k)} g_2^{(k)} + \lambda_{23}^{(k)} g_3^{(k)} = -\sin \varphi_k (\lambda_{11}^{(0)} g_1^{(0)} + \lambda_{12}^{(0)} g_2^{(0)} + \lambda_{13}^{(0)} g_3^{(0)}) + \\ + \cos \varphi_k (\lambda_{21}^{(0)} g_1^{(0)} + \lambda_{22}^{(0)} g_2^{(0)} + \lambda_{23}^{(0)} g_3^{(0)}),$$

откуда с учетом (6) получим

$$g_2^{(k)} = \frac{1}{\lambda_{22}^{(k)}} \{ [(\lambda_{12}^{(0)} - \lambda_{12}^{(k)}) \cos \varphi_k - \lambda_{11}^{(0)} \sin \varphi_k] g_1^{(0)} + \\ + [\lambda_{22}^{(0)} \cos \varphi_k - (\lambda_{12}^{(0)} + \lambda_{12}^{(k)}) \sin \varphi_k] g_2^{(0)} + \\ + (\lambda_{23}^{(0)} \cos \varphi_k - \lambda_{13}^{(0)} \sin \varphi_k - \lambda_{23}^{(k)}) g_3^{(0)} \}. \quad (8)$$

Систему равенств (6), (8) запишем в матричной форме

$$\mathbf{g}_k = B_k \mathbf{g}_0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (9)$$

где  $B_k = (B_{ij}^{(k)})$  –  $(3 \times 3)$ -матрица с ненулевыми элементами

$$B_{11}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad B_{12}^{(k)} = \sin \varphi_k, \\ B_{21}^{(k)} = [(\lambda_{12}^{(0)} - \lambda_{12}^{(k)}) \cos \varphi_k - \lambda_{11}^{(0)} \sin \varphi_k] \frac{1}{\lambda_{22}^{(k)}},$$

$$B_{22}^{(k)} = [\lambda_{22}^{(0)} \cos \varphi_k - (\lambda_{12}^{(0)} + \lambda_{12}^{(k)}) \sin \varphi_k] \frac{1}{\lambda_{22}^{(k)}},$$

$$B_{23}^{(k)} = (\lambda_{23}^{(0)} \cos \varphi_k - \lambda_{13}^{(0)} \sin \varphi_k - \lambda_{23}^{(k)}) \frac{1}{\lambda_{22}^{(k)}}, \quad B_{33}^{(k)} = 1. \quad (10)$$

Подставив второе из соотношений (3) в первое равенство (5) и учитывая зависимость (9), получим

$$\mathbf{g} = \frac{V_0}{V} \mathbf{g}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k \mathbf{g}_k d\ell = \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k B_k d\ell \right) \mathbf{g}_0, \quad (11)$$

где  $I$  – единичная ( $3 \times 3$ )-матрица. Из (11) следует матричное соотношение

$$\mathbf{g}_0 = E \mathbf{g}, \quad (12)$$

где

$$E = \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k B_k d\ell \right)^{-1}. \quad (13)$$

Соотношение (12) определяет градиент температуры  $T_0$  в связующем через градиент усредненной температуры  $T$ .

Согласно допущениям  $1^\circ$ ,  $6^\circ$  и выражению для диссипации  $D$  [5], имеем

$$D \equiv \frac{V}{2} \mathbf{g}^* \Lambda \mathbf{g} = \frac{V_0}{2} \mathbf{g}_0^* \Lambda_0 \mathbf{g}_0 + \frac{h}{2} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) \mathbf{g}_k^* \Lambda_k \mathbf{g}_k d\ell. \quad (14)$$

Используя (9), исключим из (14) векторы  $\mathbf{g}_k$ :

$$\mathbf{g}^* \Lambda \mathbf{g} = \mathbf{g}_0^* \left( \frac{V_0}{V} \Lambda_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) B_k^* \Lambda_k B_k d\ell \right) \mathbf{g}_0.$$

Отсюда с учетом (12) получим

$$\mathbf{g}^* \Lambda \mathbf{g} = \mathbf{g}^* E^* \left( \frac{V_0}{V} \Lambda_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) B_k^* \Lambda_k B_k d\ell \right) E \mathbf{g}. \quad (15)$$

Так как равенство в (15) должно выполняться при произвольном векторе  $\mathbf{g}$ , то из него вытекает следующее соотношение:

$$\Lambda = E^* \left( \frac{V_0}{V} \Lambda_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) B_k^* \Lambda_k B_k d\ell \right) E, \quad (16)$$

где нужно учесть выражения для ( $3 \times 3$ )-матриц (13), (10), (4), причем элементы матриц  $B_k$ ,  $D_k$  (см. (10), (4)) зависят от естественной координаты  $\ell$  вдоль направляющей линии  $k$ -го армирующего элемента, поэтому в общем случае интегралы в (13), (16) следует определять численно.

Таким образом, матричное равенство (16) с учетом (13) определяет все эффективные коэффициенты теплопроводности пенопластмассы, армированной ребристыми элементами.

Важной особенностью построенной модели является возможность определения по градиенту  $\mathbf{g}$  усредненной температуры  $T$  тепловых потоков  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_k$  и градиентов температур  $\mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{g}_k$  во всех компонентах композиции. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для композитной среды известен градиент  $\mathbf{g}$  усредненной температуры  $T$ , то из (12) можно

определить градиент  $\mathbf{g}_0$  температуры в связующем (пенопластмассе), а затем из (9) – градиенты  $\mathbf{g}_k$  температур в армирующих элементах, после чего, используя закон Фурье (1), определим тепловые потоки  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k, 1 \leq k \leq K$ , во всех компонентах композиции. Знание же градиентов температур  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_k$  имеет принципиальное значение, например, при использовании в дальнейшем нелокальных структурных критериев (теорий) прочности в случаях расчета композитной конструкции при интенсивном термосиловом нагружении.

Эффективные коэффициенты теплопроводности ребристо-армированной пенопластмассы выше были получены на основе метода, который условно можно назвать «статическим», так как в качестве одной из гипотез (допущение 4°) использовалось равенство (5), связывающее между собой градиент усредненной температуры  $\mathbf{g}$  с градиентами температур в компонентах композиции  $\mathbf{g}_0, \mathbf{G}_k$ , которые представляют собой термодинамические силы [5]. При этом никаких допущений о связи усредненного теплового потока  $\mathbf{q}$  в композиции с тепловыми потоками  $\mathbf{q}_0, \mathbf{Q}_k$  ( $\mathbf{q}_k$ ) в фазовых материалах не делалось. Определить же эффективные теплофизические характеристики рассматриваемого композита можно, введя соответствующую гипотезу, позволяющую связать  $\mathbf{q}$  с  $\mathbf{q}_0, \mathbf{Q}_k$ , и не делая никаких допущений о связи  $\mathbf{g}$  с  $\mathbf{g}_0, \mathbf{G}_k, 1 \leq k \leq K$ . Так как согласно [5] с точки зрения термодинамики тепловые потоки являются скоростями тепловых смещений, то второй подход можно условно назвать «кинематическим» методом определения эффективных коэффициентов теплопроводности армированной пенопластмассы.

По аналогии с подходами структурной механики композитов [11] с учетом введенных понятий «кинематического» и «статического» методов (в термодинамическом смысле) можно показать, что статический метод дает верхнюю оценку расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности композита, а кинематический метод – нижнюю оценку этих же величин. Знание же верхней и нижней оценок дает представление о точности определения расчетных характеристик композиции.

В связи с этим далее настоящее исследование посвятим вычислению эффективных коэффициентов теплопроводности ребристо-армированных пенопластмасс кинематическим методом. При этом допущения 1°–3°, 5°, 6° остаются без изменений, а вместо гипотезы 4° примем следующее предположение.

4°'. Усредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в компонентах композиции (пропорционально объемному содержанию каждого составляющего композиции).

Соотношения закона Фурье (1) в этом случае целесообразно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \mathbf{g}_k = -\mathbf{K}_k\mathbf{q}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (17)$$

где  $\mathbf{K} \equiv (\mathbf{x}_{ij}) = \Lambda^{-1}$ ,  $\mathbf{K}_k \equiv (\mathbf{x}_{ij}^{(k)}) = \Lambda_k^{-1}$  –  $(3 \times 3)$ -матрицы, обратные матрицам  $\Lambda, \Lambda_k$ ; элементы симметричных матриц  $\mathbf{K}_k$  известны, а элементы матрицы  $\mathbf{K}$  подлежат определению.

Согласно допущению 6°, с учетом (17) вместо (14) получим [5]

$$D \equiv \frac{V}{2} \mathbf{q}^* \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{V_0}{2} \mathbf{q}_0^* \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_0 + \frac{h}{2} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) \mathbf{q}_k^* \mathbf{K}_k \mathbf{q}_k d\ell. \quad (18)$$

Выразим в (18)  $\mathbf{q}_k$  через  $\mathbf{q}_0$ . С этой целью используем условия сопряжения теплофизических полей (6), (7), причем равенства (6) преобразуем с учетом (17), (2) и допущения 5°:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11}^{(k)} q_1^{(k)} + \mathbf{x}_{12}^{(k)} q_2^{(k)} + \mathbf{x}_{13}^{(k)} q_3^{(k)} &= \cos \varphi_k (\mathbf{x}_{11}^{(0)} q_1^{(0)} + \mathbf{x}_{12}^{(0)} q_2^{(0)} + \mathbf{x}_{13}^{(0)} q_3^{(0)}) + \\ &+ \sin \varphi_k (\mathbf{x}_{21}^{(0)} q_1^{(0)} + \mathbf{x}_{22}^{(0)} q_2^{(0)} + \mathbf{x}_{23}^{(0)} q_3^{(0)}), \\ \mathbf{x}_{31}^{(k)} q_1^{(k)} + \mathbf{x}_{32}^{(k)} q_2^{(k)} + \mathbf{x}_{33}^{(k)} q_3^{(k)} &= \mathbf{x}_{31}^{(0)} q_1^{(0)} + \mathbf{x}_{32}^{(0)} q_2^{(0)} + \mathbf{x}_{33}^{(0)} q_3^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (19)$$

Систему равенств (7), (19) запишем в матричной форме

$$A_k \mathbf{q}_k = F_k \mathbf{q}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где ненулевые элементы  $(3 \times 3)$ -матриц  $A_k = (A_{ij}^{(k)})$ ,  $F_k = (F_{ij}^{(k)})$  согласно (7), (19) определяются так:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(k)} &= \mathbf{x}_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, 3, \quad A_{22}^{(k)} = 1, \\ F_{1j}^{(k)} &= \mathbf{x}_{1j}^{(0)} \cos \varphi_k + \mathbf{x}_{2j}^{(0)} \sin \varphi_k, \quad F_{3j}^{(k)} = \mathbf{x}_{3j}^{(0)}, \quad j = 1, 2, 3, \\ F_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, \quad F_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу (21)  $\det A_k \neq 0$ , поэтому из (20) получаем

$$\mathbf{q}_k = C_k \mathbf{q}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (22)$$

где

$$C_k = A_k^{-1} F_k, \quad (23)$$

$A_k^{-1}$  —  $(3 \times 3)$ -матрица, обратная  $A_k$ .

Подставим (22) в равенство (18), тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* K \mathbf{q} &= \frac{V_0}{V} \mathbf{q}_0^* K_0 \mathbf{q}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) \mathbf{q}_0^* C_k^* K_k C_k \mathbf{q}_0 d\ell = \\ &= \mathbf{q}_0^* \left( \frac{V_0}{V} K_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) C_k^* K_k C_k d\ell \right) \mathbf{q}_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Выразим здесь  $\mathbf{q}_0$  через  $\mathbf{q}$ . С этой целью воспользуемся допущением 4°', из которого следует

$$\mathbf{q} = \frac{V_0}{V} \mathbf{q}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) \mathbf{Q}_k d\ell. \quad (25)$$

Исключим из (25) векторы  $\mathbf{Q}_k$ , используя последовательно соотношения (3) и (22):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{V_0}{V} \mathbf{q}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k \mathbf{q}_k d\ell = \\ &= \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k C_k d\ell \right) \mathbf{q}_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{q}_0 = P \mathbf{q}, \quad (26)$$

где  $P$  –  $(3 \times 3)$ -матрица:

$$P = \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) D_k C_k d\ell \right)^{-1}. \quad (27)$$

Соотношение (26) определяет тепловой поток в связующем  $\mathbf{q}_0$  через усредненный тепловой поток  $\mathbf{q}$  в композиции.

Подставим (26) в равенство (24), тогда получим

$$\mathbf{q}^* K \mathbf{q} = \mathbf{q}^* P^* \left( \frac{V_0}{V} K_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) C_k^* K_k C_k d\ell \right) P \mathbf{q}. \quad (28)$$

Так как равенство в (28) должно выполняться при произвольном векторе  $\mathbf{q}$ , то из него вытекает следующее матричное соотношение:

$$K = P^* \left( \frac{V_0}{V} K_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{\ell_k} \delta_k(\ell) C_k^* K_k C_k d\ell \right) P, \quad (29)$$

где нужно учесть выражения для  $(3 \times 3)$ -матриц (27), (23), (21), (4), причем элементы матриц  $C_k$ ,  $D_k$  (см. (21), (23), (4)) зависят от естественной координаты  $\ell$  вдоль направляющей линии  $k$ -го армирующего элемента, поэтому в общем случае интегралы в (27), (29) следует определять численно.

В силу самого определения матриц  $\Lambda$ ,  $K$  (см. (1), (17)) из (29) вытекает

$$\Lambda = K^{-1}. \quad (30)$$

Таким образом, равенства (29), (30) определяют в матричной форме все эффективные коэффициенты теплопроводности ребристо-армированной пенопластмассы, полученные на основе кинематического метода.

В рамках этого подхода так же, как и в случае статического метода, можно определить тепловые потоки и градиенты температур в компонентах композиции через усредненный тепловой поток в фиктивном материале. Действительно, если из решения задачи теплопроводности для эквивалентной среды известен усредненный тепловой поток  $\mathbf{q}$ , то из (26), (22) можно последовательно определить тепловые потоки в связующем  $\mathbf{q}_0$  и в  $k$ -м армирующем элементе  $\mathbf{q}_k$ , а затем, используя закон Фурье в форме (17), можно вычислить и градиенты температур в соответствующих компонентах композиции  $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_k)$ .

В силу самой структуры правых частей в равенствах (16), (29) и в силу симметрии матриц  $\Lambda_k, K_k$ ,  $0 \leq k \leq K$ , разыскиваемые матрицы  $\Lambda, K$  также являются симметричными, что находится в полном согласии с постулатом Онзагера.

Если в рамках построенных моделей теплопроводности для связующего (пенопластмассы) осуществить предельные переходы  $\lambda_{ij}^{(0)} \rightarrow 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , то по формулам (16) и (29), (30) получим эффективные коэффициенты теплопроводности ребристой конструкции без учета теплопередачи излучением (которая во многих практических задачах пренебрежимо мала).

В качестве примера рассчитаем эффективные коэффициенты теплопроводности сотового заполнителя (часто встречающегося в практике самолетостроения) с полостями, заполненными и незаполненными пенопластмассой. Представительная ячейка сотовой ребристой конструкции изображена на рис. 2. Такая ребристая конструкция характеризуется наличием лишь двух ( $K = 2$ ) криволинейных армирующих элементов постоянной толщины  $\delta_1 = \delta_2 = 0.05$  мм ( $\delta_3 \equiv \delta_4 \equiv 0$ , см. рис. 1), а диаметр соты  $d = 8$  мм [6].



Армирующие элементы изготовлены из изотропного алюминиевого сплава АМгЗ, ненулевые коэффициенты теплопроводности которого  $\lambda_{ii}^{(k)} = 146.538 \text{ Вт/(м·К)}$  [4], а в качестве связующего применяется пенопласт-масса марки ПХВ-1 [2], ненулевые коэффициенты теплопроводности которой  $\lambda_{ii}^{(0)} = 0.030238 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2$ .

В табл. 1 приведены ненулевые расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности сотовой ребристой конструкции при заполненных и незаполненных пенопластмассой сотах (в последнем случае в расчетах принимали  $\lambda_{ii}^{(0)} = 10^{-13} \lambda_{ii}^{(1)}$ ).

Из табл. 1 видно, что, как и было предсказано теоретически, расчетная формула (16) (статический метод) дает верхнюю оценку, а формулы (29), (30) (кинематический метод) – нижнюю оценку значений эффективных коэффициентов теплопроводности  $\lambda_{ii}$  рассматриваемых композитов, причем значения  $\lambda_{33}$ , определенные по обеим предложенным моделям, полностью совпадают. Значения же  $\lambda_{11}$  различаются не более чем на 2.5%, а  $\lambda_{22}$  – не более чем на 1.5%. Следовательно, для рассматриваемого типа ребристой конструкции (сотовой) оба метода дают почти одни и те же результаты, поэтому предпочтение в выборе статического или кинематического метода для определения эффективных коэффициентов теплопроводности ребристо-армированных пенопласт-масс может быть отдано только после тщательного сравнения расчетных характеристик с экспериментальными данными, которые, к сожалению, автору не известны.

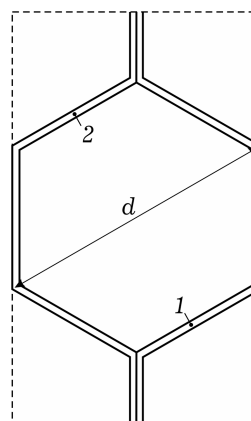


Рис. 2

Таблица 1. Эффективные коэффициенты теплопроводности сотовой ребристой конструкции \*

Характеристика	При заполнении сот пенопластмассой	Без заполнения сот пенопластмассой
$\lambda_{11}$ , Вт/(м·К)	1.113831	1.083454
	1.087930	1.057547
$\lambda_{22}$ , Вт/(м·К)	1.818380	1.788297
	1.792671	1.762578
$\lambda_{33}$ , Вт/(м·К)	2.849781	2.820125
	2.849781	2.820125

\* **Примечание.** В числовых данных верхнее значение – расчет по формуле (16) статическим методом; нижнее – расчет по формулам (29), (30) кинематическим методом.

Из сравнения чисел, приведенных во втором и третьем столбцах, следует, что заполнение полостей сот пенопластмассой приводит к незначительному (менее чем на 3%) изменению значений эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемой сотовой конструкции. (Однако, как отмечалось выше, заполнение сот положительно сказывается на вибрационных свойствах и снижает вероятность потери устойчивости армирующих элементов в процессе деформирования такой конструкции [2].)

На практике давно используются армированные пенопласты, но, как правило, такое армирование является прямолинейным. Проведем сравнение эффективных коэффициентов теплопроводности прямолинейно и пространственно армированных пенопласт-масс с одинаковым удельным объемом содержанием армирующих элементов. Случай прямолинейного арми-

рования получается, если в представительной ячейке отсутствуют криволинейные элементы 1 и 2 (см. рис. 1), а в качестве варианта пространственного армирования выберем прежнюю сотовую конструкцию (рис. 2). В прямолинейно армированном пенопласте усиливающий элемент (выполненный из сплава АМгЗ) ориентируем в направлении  $x_2$  (т. е.  $\varphi_1 = \pi/2$ ), а толщину этого элемента зададим соотношением  $\bar{\delta}_1 = 8\delta_1/3$ , что, согласно рис. 2, обеспечивает такой же удельный расход арматуры, как и в случае пространственного армирования в виде сот (здесь  $\delta_1$  – толщина стенки сотовой ребристой конструкции).

В табл. 2 приведены ненулевые расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности прямолинейно армированной ребристой конструкции при наличии и отсутствии пенопласта. Как видно из табл. 2, в этом случае обе предложенные модели приводят к одним и тем же результатам; кроме того, величины  $\lambda_{33}$  в табл. 1 и 2 полностью совпадают.

Таблица 2. Эффективные коэффициенты теплопроводности ребристой конструкции с прямолинейными элементами\*

Характеристика	При наличии пенопласта	При отсутствии пенопласта
$\lambda_{11}$ , Вт/(м·К)	$\frac{0.03083123}{0.03083123}$	$\frac{\approx 10^{-12}}{\approx 10^{-12}}$
$\lambda_{22} = \lambda_{33}$ , Вт/(м·К)	$\frac{2.849781}{2.849781}$	$\frac{2.820125}{2.820125}$

\* *Примечание.* В числовых данных верхнее значение – расчет по формуле (16) статическим методом; нижнее – расчет по формулам (29), (30) кинематическим методом.

Для слоистых композитных сред с изотропными слоями ( $\lambda_{11}^{(k)} = \lambda_{22}^{(k)} = \lambda_{33}^{(k)}$ ), ориентированными параллельно плоскости  $(x_2, x_3)$ , известны структурные формулы определения эффективных коэффициентов теплопроводности [8 и др.]

$$\frac{1}{\lambda_{11}} = \frac{\Omega}{\lambda_{11}^{(0)}} + \sum_k \frac{\omega_k}{\lambda_{11}^{(k)}}, \quad \lambda_{nn} = \Omega \lambda_{nn}^{(0)} + \sum_k \omega_k \lambda_{nn}^{(k)}, \quad n = 2, 3,$$

$$\lambda_{ij} = 0, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\Omega = \frac{V_0}{V}, \quad \omega_k = \frac{h\delta_k b}{V}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad \Omega = 1 - \sum_k \omega_k, \quad (31)$$

полученные без привлечения энергетического критерия эквивалентности.

Расчетные значения  $\lambda_{ii}$ , определенные по формулам (31), полностью совпадают с числами, приведенными в табл. 2. Это является косвенным подтверждением физической непротиворечивости предложенных в настоящем исследовании моделей теплопроводности.

Из сравнения чисел, приведенных во втором и третьем столбцах табл. 2, видим, что наличие пенопласта практически не сказывается на продольной (в направлениях  $x_2, x_3$ ) теплопроводности прямолинейно армированной конструкции, но существенно влияет на поперечную (в направлении  $x_1$ ) теплопроводность. Так, при отсутствии пенопласта коэффициент  $\lambda_{11}$  равен нулю (теплопередача в этом случае в направлении  $x_1$  возможна лишь за счет излучения [1, 12]); при наличии же пенопласта коэффициент  $\lambda_{11} \neq 0$ , но пренебрежимо мал (составляет около 1%) по сравнению с

$\lambda_{22} = \lambda_{33}$ , т. е. и в этом случае теплопередачу в направлении  $x_1$  можно считать практически отсутствующей. (В случае же сотовой ребристой конструкции, согласно табл. 1, эффективные коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ii}$  имеют одинаковый порядок.)

Таким образом, предложенные модели теплопроводности ребристо-армированных пенопластмасс и ребристых конструкций могут быть использованы при расчетах слоистых панелей с легким наполнителем, подверженных термосиловому воздействию и широко используемых в объектах аэрокосмической техники.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр\_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

1. *Аверин Б. В., Кудинов В. А., Стефанюк Е. В., Назаренко С. А.* Тепловое и напряженно-деформированное состояние трехслойной панели с решетчатым наполнителем при воздействии солнечного излучения // *Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Всерос. науч. конф. (Самара, 26–28 мая 2004 г.)* – Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. – Ч. 2. – С. 15–19.
2. *Александров А. Я., Бородин М. Я., Павлов В. В.* Конструкции с наполнителями из пенопластов. – Москва: Машиностроение, 1972. – 212 с.
3. *Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куришин Л. М., Прусаков А. П.* Расчет трехслойных панелей. – Москва: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
4. *Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – Москва: Машиностроение, 1965. – 567 с.
5. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. – Москва: Энергия, 1975. – 208 с.
6. *Брюккер Л. Э., Ракин А. С.* Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах // *Динамика и прочность авиационных конструкций.* – 1978. – Вып. 4. – С. 73–79.
7. *Ванин Г. А.* Микромеханика композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
8. *Курская Т. А., Левченко Е. П., Михальченко Р. О., Рыбалко А. М., Сухаревский Б. Я.* О термосопротивлении многоконтактных пакетов // *Инж.-физ. журн.* – 1969. – **17**, № 4. – С. 673–678.
9. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // *Прикл. физика.* – 2008. – № 5. – С. 10–17.
10. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Теплопроводность оболочек, армированных волокнами постоянного и переменного по площади поперечного сечения // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 2. – С. 132–150.
11. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – Москва: Мир, 1982. – 232 с.
12. *Янковский А. П.* Моделирование процессов теплопроводности в слоистых гибридных композитах регулярной структуры со щелевидными слоями // *Инж.-физ. журн.* – 2010. – **83**, № 2. – С. 264–272.
13. *Chawla K. K.* Composite materials. Science and engineering. – New York: Springer-Verlag, 1989.
14. *Dasgupta A., Agarwal R. K.* Orthotropic thermal conductivity of plain-weave fabric composites using a homogenization technique // *J. Compos. Mater.* – 1992. – **26**, No. 18. – P. 2736–2758.
15. *Hasselman D. P. H., Donaldson K. Y., Thomas J. R.* Effective thermal conductivity of uniaxial composites with cylindrically orthotropic carbon fibers and interfacial thermal barrier // *J. Compos. Mater.* – 1993. – **27**, No. 6. – P. 637–644.
16. *Hasselman D. P. H., Johnson L. F.* Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance // *J. Compos. Mater.* – 1987. – **21**, No. 6. – P. 508–515.
17. *Hatta H., Taya M.* Thermal conductivity of coated filler composites // *J. Appl. Phys.* – 1986. – **59**, No. 6. – P. 1851–1860.
18. *Kulkarni M. R., Brady R. P.* A model of global thermal conductivity in laminated carbon/carbon composites // *Compos. Sci. Technol.* – 1997. – **57**, No. 3. – P. 277–285.

19. Ning Q.-G., Chou T.-W. A closed-form solution of the transverse effective thermal conductivity of woven fabric composites // J. Compos. Mater. – 1995. – **29**, No. 17. – P. 2280–2294.
20. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mater. – 2009. – **45**, No. 2. – P. 241–254.
21. Thomann U. I., Sauter M., Ermanni P. A combined impregnation and heat transfer model for stamp forming of unconsolidated commingled yarn performs // Compos. Sci. Technol. – 2004. – **64**, No. 10–11. – P. 1637–1651.
22. Turias I. J., Gutierrez J. M., Galindo P. L. Modelling the effective conductivity of a unidirectional composite by the use artificial neural networks // Compos. Sci. Technol. – 2005. – **65**, No. 3–4. – P. 609–619.

**ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ  
РЕБРИСТО-АРМОВАНИХ ПІНОПЛАСТМАС НА ОСНОВІ  
ЕНЕРГЕТИЧНОГО КРИТЕРІЮ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ**

*Запропоновано моделі теплопровідності ребристо-армованої пінопластмаси, які базуються на умові рівності дисипації в еквівалентному матеріалі та розглядуваному композиті. Проведено порівняння розрахункових значень ефективних коефіцієнтів теплопровідності однонаправлених і просторово армованих пінопластмас. Показано, що запропоновані моделі дають оцінки зверху і знизу для розрахункових значень ефективних коефіцієнтів теплопровідності розглядуваних композитів.*

**DEFINITION OF EFFECTIVE COEFFICIENTS OF THERMAL  
CONDUCTIVITY OF COMPLEX REINFORCED POLYFOAM ON THE  
BASIS OF POWER CRITERION OF EQUIVALENCE**

*The models of thermal conductivity of complex reinforced polyfoam based on condition of dissipation equality in equivalent material and examined composite are given. The comparison of calculated values of efficient thermal conductivity coefficients for unidirectionally and spatially reinforced polyfoam is made. It is shown, that the offered models give the estimation from above and from below for calculated values of effective coefficients of thermal conductivity for the observed composites.*

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
31.08.10