УДК 517.52

Д. І. Боднар[1], Р. А. Заторський[2]

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ. II

Робота є продовженням дослідження рекурентних дробів, розпочатого в [2]. *Побудовано алгоритми для обчислення значення виразу* $P_k Q_n - P_n Q_k$, *де* $\frac{P_k}{Q_k}$ *і* $\frac{P_n}{Q_n}$ *– відповідно* k*-те та* n*-не раціональні вкорочення деякого рекурентного дробу. За значеннями цього виразу робиться ряд висновків про характер та швидкість збіжності раціональних вкорочень рекурентного дробу до його значення.*

5. Деякі загальні теореми про рекурентні дроби n**-го порядку.** У [3] доведено теорему 2 про зв'язок детермінанта матриці

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & -a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

із параперманентом трикутної матриці

$$B = \left\| \begin{matrix} a_{11} & & & & \\ \frac{a_1 a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & \\ \frac{a_1 a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & \frac{a_2 a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & \dots & a_{n-1,n-1} & \\ \frac{a_1 a_{n1}}{a_{n2}} & \frac{a_2 a_{n2}}{a_{n3}} & \dots & \frac{a_{n-1} a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

згідно з якою справджується тотожність

$$\det(A) = \operatorname{pper}(B). \qquad (15)$$

Зауваження 1. У згаданій теоремі параперманент матриці B визначений навіть тоді, коли виникає невизначеність типу $\frac{0}{0}$, оскільки при його обчисленні нулі скорочуються і невизначеність пропадає.

Теорема 5. *Нехай* $A_{k,m}$ *– мінор матриці*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,m-1} & a_{m-2,m-1} & a_{m-3,m-1} & \dots & a_{1,m-1} & -1 \\ a_{mm} & a_{m-1,m} & a_{m-2,m} & \dots & a_{2,m} & a_{1,m} \end{matrix} \right\|,$$

утворений після видалення з неї першого рядка та k*-го стовпця. Тоді справджується рекурентне співвідношення*

$$A_{km} = -a_{1,k-1}A_{k-1,m} + a_{2,k-1}A_{k-2,m} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-2} a_{k-2,k-1}A_{2m} + (-1)^{k-1} a_{k-1,k-1}A_{1m}, \qquad (16)$$

де $3 \le k \le m$.

Ця теорема по своїй суті збігається із теоремою 4 з [3].

Зауваження 2. Твердження теореми 4 із [3] можна перенести на випадок матриць A, в яких всі елементи, що лежать нижче від $(n-1)$-ї піддіагоналі, $n = 2, 3, \ldots, m-1$, дорівнюють нулеві.

Теорема 6. *Нехай*

$$P_m = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & \\ \frac{a_{33}}{a_{23}} & \frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_{m,m}}{a_{m-1,m}} & \frac{a_{m-1,m}}{a_{m-2,m}} & \frac{a_{m-2,m}}{a_{m-3,m}} & \ldots & a_{1,m} \end{bmatrix}_m,$$

$$Q_m = \begin{bmatrix} a_{12} & & & \\ \frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_{m-1,m}}{a_{m-2,m}} & \frac{a_{m-2,m}}{a_{m-3,m}} & \ldots & a_{1m} \end{bmatrix}_{m-1}.$$

Тоді справджується рівність

$$P_rQ_s - Q_rP_s = (-1)^{s-1}A_{s+1,r}, \qquad 1 \le s < r, \qquad (17)$$

де $A_{s,r}$ *− детермінант, визначений у формулюванні попередньої теореми.*

Д о в е д е н н я. Доведемо рівність (17) при $s = 1$. Розкладемо детермінант матриці A за елементами першого рядка:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & -1 & \ldots & 0 \\ a_{23} & a_{13} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,r} & a_{r-2,r} & \ldots & a_{1,r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & -1 & \ldots & 0 \\ a_{33} & a_{13} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,r} & a_{r-2,r} & \ldots & a_{1,r} \end{vmatrix}.$$

Детермінант лівої частини та перший детермінант правої частини згідно з теоремою 2 з [3] відповідно дорівнюють P_r і Q_r, а другий детермінант правої частини дорівнює A_{2r}. Отже, маємо рівність $P_r = a_{11}Q_r + A_{2r}$, в якій можна вважати, що $a_{11} = P_0$, $1 = Q_0$.

Нехай рівність (17) є правильною при всіх $s < t-1 < r$. Тоді, розкладаючи у виразі $P_rQ_t - Q_rP_t$ парадетермінанти Q_t і P_t за елементами останнього рядка та групуючи відповідні доданки, отримаємо

$$a_{1,t}(P_rQ_{t-1} - Q_rP_{t-1}) + a_{2,t}(P_rQ_{t-2} - Q_rP_{t-2}) + \ldots +$$
$$+ a_{t-1,t}(P_rQ_1 - Q_rP_1) - a_{t,t}Q_r =$$
$$= a_{1,t}(-1)^{t-2}A_{t,r} + a_{2,t}(-1)^{t-3}A_{t-1,r} + \ldots +$$
$$+ a_{t-1,t}A_{2r} - a_{t,t}A_{1r} = (-1)^{t-1}A_{t+1,r}. \qquad \Diamond$$

Із теореми 6 з урахуванням зауважень 1 та 2 безпосередньо випливає наступна

Теорема 7. *Для r-го та s-го раціональних вкорочень рекурентного дробу n-го порядку, $1 \le s < r$, справджується рівність*

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_s}{Q_s} = \frac{(-1)^{s-1} A_{s+1,r}}{Q_r Q_s}. \tag{18}$$

Наслідок 1. *Для r-го, $(r-1)$-го та $(r-2)$-го раціональних вкорочень рекурентних дробів n-го порядку справджуються рівності*

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-2} A_{r,r}}{Q_r Q_{r-1}},$$

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-2}}{Q_{r-2}} = \frac{(-1)^{r-1} A_{r-1,r}}{Q_r Q_{r-2}},$$

де

$$A_{r,r} = \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{12} & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,n} & a_{n-1,n} & a_{n-2,n} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n,n+1} & a_{n-1,n+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,r-1} & a_{n-1,r-1} & \dots & a_{1,r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,r} & \dots & a_{2,r} \end{Vmatrix},$$

$$A_{r-1,r} = \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{12} & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,n} & a_{n-1,n} & a_{n-2,n} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n,n+1} & a_{n-1,n+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,r-3} & a_{n-3,r-3} & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,r-2} & a_{n-2,r-2} & \dots & a_{1,r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,r-1} & a_{n-1,r-1} & \dots & a_{2,r-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,r} & \dots & a_{3,r} & a_{1,r} \end{Vmatrix}.$$

Твердження цього наслідку безпосередньо випливає із рівності (18) теореми 7 відповідно при $s = r-1$ та $s = r-2$. Дослідження знакосталості матриць $A_{r,r}$ та $A_{r-1,r}$ при довільному натуральному r, $r > 1$, важливе при дослідженні двосторонніх оцінок раціональних вкорочень.

При $n = 2$ рекурентні дроби другого порядку збігаються зі звичайними неперервними дробами, причому детермінанти матриць $A_{r,r}$ і $A_{r-1,r}$ відповідно дорівнюють 1 і a_{1r}, що узгоджується із наслідком 2 твердження 4.2 [1, с. 86]).

6. Найкращі наближення за допомогою рекурентних дробів третього порядку. При $n = 3$ та $a_{1i} = q_i$, $a_{2i} = p_i$, $a_{3i} = 1$ рекурентний дріб (2) запишемо у вигляді звичайного рекурентного дробу третього порядку

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \dfrac{1}{p_3} & \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & \dfrac{1}{p_4} & \dfrac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_r & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_{\infty}, \qquad (19)$$

для якого матриці $A_{r,r}$ та $A_{r-1,r}$ є матрицями Гессенберга [5] і згідно з теоремою 2 (див. [3]) про зв'язок детермінанта матриці Гессенберга із парадетермінантом трикутної матриці можуть бути подані відповідно у вигляді парадетермінантів

$$B_r = \left\langle \begin{array}{cccccccc} p_2 & & & & & & & \\ \dfrac{q_2}{p_3} & p_3 & & & & & & \\ -\dfrac{1}{q_3} & \dfrac{q_3}{p_4} & p_4 & & & & & \\ 0 & -\dfrac{1}{q_4} & \dfrac{q_4}{p_5} & p_5 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{r-2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{q_{r-2}}{p_{r-1}} & p_{r-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{1}{q_{r-1}} & \dfrac{q_{r-1}}{p_r} & p_r \end{array} \right\rangle,$$

$$C_r = \left\langle \begin{array}{ccccccccc} p_2 & & & & & & & & \\ \dfrac{q_2}{p_3} & p_3 & & & & & & & \\ -\dfrac{1}{q_3} & \dfrac{q_3}{p_4} & p_4 & & & & & & \\ 0 & -\dfrac{1}{q_4} & \dfrac{q_4}{p_5} & p_5 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{q_{r-3}}{p_{r-2}} & p_{r-2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{1}{q_{r-2}} & \dfrac{q_{r-2}}{p_{r-1}} & p_{r-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\dfrac{1}{q_r} & q_r \end{array} \right\rangle. \qquad (20)$$

Як відомо, раціональні вкорочення ланцюгових дробів з усіх дробів зі знаменниками, що не перевищують Q_r, дають найкращі раціональні наближення до ірраціонального числа. Цей факт випливає із нерівності

$$\left| \frac{P_r}{Q_r} - \alpha \right| < \frac{1}{Q_r^2}.$$

Знайдемо такі значення p_i, щоб парадетермінант B_r при довільному значенні r, $r \geq 2$, дорівнював одиниці. Легко переконатися, що

$$p_2 = 1, \qquad p_3 = q_2 + 1, \qquad p_4 = q_3 + 2.$$

Розкладемо парадетермінант B_r за елементами останнього рядка

$$B_r = p_r B_{r-1} - q_{r-1} B_{r-2} - B_{r-3}.$$

Нехай $B_i = 1$, $i < r$, тоді легко переконатися, що

$$p_r = q_{r-1} + 2.$$

Таким чином, справджується така

Теорема 8. *Нехай у рекурентному дробі* (19)

$$p_2 = 1, \qquad p_3 = q_2 + 1, \qquad p_i = q_{i-1} + 2, \qquad i = 4, 5, \ldots.$$

Тоді

$$B_i = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$C_i = q_i + 1, \qquad i = 3, 4, \ldots,$$

тобто справджуються рівності

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-2}}{Q_r Q_{r-1}},$$

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-2}}{Q_{r-2}} = \frac{(-1)^{r-1}(q_r + 1)}{Q_r Q_{r-2}}.$$

Наслідок 2. *Для рекурентного дробу третього порядку*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{1}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{1}{q_2+1} & \frac{q_2+1}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & \frac{1}{q_3+2} & \frac{q_3+2}{q_4} & q_4 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{q_{r-1}+2} & \frac{q_{r-1}+2}{q_r} & q_r & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]_{\infty}, \qquad (21)$$

чисельник і знаменник раціональних вкорочень яких задовольняють рекурентні рівності

$$P_k = q_k P_{k-1} + (q_{k-2} + 2) P_{k-2} + P_{k-3},$$

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + (q_{k-2} + 2) Q_{k-2} + Q_{k-3} \qquad (22)$$

з початковими умовами

$$P_1 = q_1, \qquad P_2 = q_1 q_2 + 1, \qquad P_3 = q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 + q_1 + q_3 + 1, \qquad (23)$$

$$Q_1 = 1, \qquad Q_2 = q_2, \qquad Q_3 = q_2 q_3 + q_2 + 1,$$

виконуються рівності

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-2}}{Q_{r-1} Q_r}, \qquad r = 2, 3, \ldots, \qquad (24)$$

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-2}}{Q_{r-2}} = \frac{(-1)^{r-1}(q_r + 1)}{Q_r Q_{r-2}}, \qquad r = 3, 4, \ldots. \qquad (25)$$

Цей наслідок безпосередньо випливає із теореми 8.

Твердження 1. *Усі раціональні вкорочення рекурентного дробу* (21) *є нескоротними дробами, тобто* $(P_r, Q_r) = 1$ *для всіх* r, $r > 1$.

Д о в е д е н н я. Для $r = 1$ маємо $P_1 = q_1$, $Q_1 = 1$, отже $(P_1, Q_1) = 1$. Нехай $r > 1$. Позначимо $d = (P_r, Q_r)$. Оскільки $d \mid P_r$ і $d \mid Q_r$, то

$$d \mid (P_r Q_{r-1} - Q_r P_{r-1}) \qquad \text{і} \qquad d \mid (-1)^{r-2}, \; r = 2, 3, \dots .$$

Отже, $d = 1$.

Оскільки q_i, $i = 1, 2, \dots$, − натуральні числа, то, використовуючи рівності (24), (25), можна довести, що раціональні вкорочення рекурентного дробу (21) є двосторонніми наближеннями до його значення. Доведення аналогічне до доведення відповідного твердження для ланцюгових дробів (див. [1], теореми 4.3 та 4.6).

Нехай у наслідку 2 виконуються рівності $q_1 = q_2 = \dots = q$. Тоді рекурентний дріб (21) стає 1-періодичним рекурентним дробом вигляду

$$x^* = \left[\begin{array}{c|ccccccc} q & & & & & & & \\ \frac{1}{q} & q & & & & & & \\ \frac{1}{q+1} & \frac{q+1}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{q+2}{q} & q & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_{\infty} . \tag{26}$$

Після декількох розкладань чисельника та знаменника раціонального вкорочення рекурентного дробу (26) за елементами першого стовпця, цю частку можна подати у вигляді дробу з відношеннями

$$\frac{\|\cdot\|_{n-1}}{\|\cdot\|_{n-2}}, \qquad \frac{\|\cdot\|_{n-2}}{\|\cdot\|_{n-3}}$$

трикутних матриць вигляду

$$\left\|\begin{array}{cccccc} q & & & & & \\ \frac{q+2}{q} & q & & & & \\ \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & & \\ 0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right\|$$

відповідних порядків.

Спрямовуючи r до нескінченності, після спрощень отримаємо рівність

$$x^* = \lim_{r\to\infty} \frac{P_r}{Q_r} = q + \frac{1}{q + \frac{q+1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{qx + q + 1 + \frac{1}{x}} =$$

$$= q + \frac{x^2 + x}{qx^2 + (q+1)x + 1},$$

де x − додатний корінь рівняння $x^3 = qx^2 + (q+2)x + 1$, тобто

$$x = \frac{q + 1 + \sqrt{(q+1)^2 + 4}}{2}.$$

Таким чином, отримали значення 1-періодичного рекурентного дробу (26):

$$x^* = \frac{q^2 + q + 1}{2} - \frac{(q^2 + q - 1)\sqrt{(q+1)^2 + 4}}{2(q+1)}.$$

Проводячи аналогічні дослідження для 2-періодичного рекурентного дробу

$$x^* = \left[\begin{array}{c|ccccc} q_1 & & & & & \\ \frac{1}{q_2} & q_2 & & & & \\ \frac{1}{q_2+1} & \frac{q_2+1}{q_1} & q_1 & & & \\ 0 & \frac{1}{q_1+2} & \frac{q_1+2}{q_2} & q_2 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{q_2+2} & \frac{q_2+2}{q_1} & q_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_\infty,$$

який можна отримати за допомогою наслідку 2 при $q_1 = q_3 = q_5 = \dots$ і $q_2 = = q_4 = q_6 = \dots$, дістаємо рівність

$$x^* = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{q_2+1}{x} + \frac{1}{xy}} + \frac{1}{q_2 + 1 + q_2 x + \frac{1}{y}}.$$

Тут

$$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}, \qquad y = \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{\gamma},$$

$$a = q_1^2 q_2 + q_1^2 + 2q_1 q_2 + 4q_1 - q_2 + 1,$$

$$c = 2q_1 q_2 + 4q_2 + 2,$$

$$b = q_1^4 q_2^2 + 4q_1^3 q_2^2 + 2q_1^4 q_2 + q_1^4 + 12q_1^3 q_2 + 6q_1^2 q_2^2 + 8q_1^3 + 24q_1^2 q_2 + 18q_1^2 +$$
$$+ 4q_1 q_2^2 + 20q_1 q_2 + 16q_1 + q_2^2 + 6q_2 + 5.$$

При цьому x − корінь кубічного рівняння

$$(q_1 q_2 + 2q_2 + 1)x^3 - (q_1^2 q_2 + q_1 q_2 + q_1^2 + 4q_1 - 3q_2)x^2 - (q_1^2 q_2 + 3q_1 q_2 +$$
$$+ q_1^2 + 6q_1 - q_2 + 2)x - (1 + q_1 q_2 + 2q_1) = 0.$$

Для знаходження y маємо аналогічне кубічне рівняння, а значення α, β, γ обчислюємо за формулами, подібними відповідно до формул обчислення a, b, c, де q_1 і q_2 слід поміняти місцями. Таким чином, досягнути найкращих раціональних наближень до кубічних ірраціональностей за допомогою 1-періодичних і 2-періодичних рекурентних дробів не можна [4].

1. *Безущак О. О., Ганюшкін О. Г.* Елементи теорії чисел: Навч. посібник. – Київ: Видавн.-полігр. центр «Київ. ун-т», 2003. – 202 с.
2. *Боднар Д. І., Заторський Р. А.* Узагальнення неперервних дробів. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 57–64.
3. *Заторський Р. А.* Дослідження функцій матриць Хессенберга // Карпатські мат. публікації. – 2011. – **3**, № 1. – С. 52–58.
4. *Domingo Gomez Morin.* A special continued fraction for the Golden mean // Amer. Math. Monthly. – 2011. – No. 118. – P. 65.
5. *Hessenberg K.* Thesis. – Dartmstadt, Technische Hochschule, 1942.

ОБОБЩЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ. II

Работа является продолжением исследования рекуррентных дробей, начатого в [2]. *Построены алгоритмы вычисления значений выражения* $P_k Q_n - P_n Q_k$, *где* $\frac{P_k}{Q_k}$ *и* $\frac{P_n}{Q_n}$ *– соответственно* k*-е и* n*-е рациональные укорочения некоторой рекуррентной дроби. По значениям этого выражения сделано ряд выводов о характере и скорости сходимости рациональных укорочений рекуррентной дроби к её значению.*

GENERALIZATION OF CONTINUED FRACTIONS. II

This research is continuation of the study of recursion fractions begun in [2]. *The algorithms to calculate the value of the expression* $P_k Q_n - P_n Q_k$, *where* $\frac{P_k}{Q_k}$ *and* $\frac{P_n}{Q_n}$ *are correspondingly* k*-th and* n*-th rational truncations of some recursion fraction are constructed. By the values of this expression the number of conclusions about the nature and rate of convergence of rational truncations of the recursion fraction to its value are made.*

[1] Тернопіль. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Прикарпатськ. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
04.09.10