

**КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ  
ДВОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ КЕРУВАННЯ**

*Розроблено комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних пластах, обмежених непроникним зовнішнім контуром і контурами почергово розміщених криволінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин без перетоків між рядами, за умов керування. На основі ідей методів квазіконформних відображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу фільтрації розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо для випадків, коли область комплексного квазіпотенціалу є одно- чи багатолистою поверхнею. На конкретному прикладі (коли пластові ряди свердловин є прямолінійними та розміщені симетрично) продемонстровано окремі фрагменти запропонованого підходу.*

**Вступ.** Питанням моделювання процесів сумісного руху двох рідин у пласті внаслідок закачування через нагнітальні свердловини однієї із них, наприклад, води, та витіснення нею іншої – нафти, через експлуатаційні свердловини присвячено значну кількість робіт як зарубіжних [9, 10, 12], так і вітчизняних [1, 8] вчених.

У роботах [2, 3] запропоновано підхід до моделювання фільтраційних процесів для тризв'язних і чотиризв'язних областей (пластів), обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії. Зроблено евристичний опис з наступним логічним обґрунтуванням можливих випадків формування течії в залежності від заданих значень потенціалу керування та розв'язано проблему неоднозначності нелінійного обернення відповідних крайових задач конформного відображення з використанням розробленої процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. Запропоновано постановки крайових задач конформного відображення при невідомому значенні потенціалу керування як задач оптимізації та керування.

Не менш важливою проблемою, ніж вибір оптимального значення потенціалу керування, є відшукування раціонального розміщення свердловин на розроблюваних площах за умов поповнення існуючого виробничого комплексу новими свердловинами. Тому виникає необхідність керування параметрами, що характеризують положення «нових» нагнітальних і експлуатаційних свердловин відносно «старих» з метою забезпечення оптимального відбору нафти. Складність розв'язання такого роду задач квазіконформного відображення за умови існування великої кількості свердловин зумовлена багатозв'язністю фізичної області та багатолістистістю відповідної області комплексного квазіпотенціалу.

У цій роботі розроблено комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних пластах, обмежених непроникним зовнішнім контуром і контурами почергово розміщених криволінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, без перетоків між рядами за умов керування. Модифіковано числовий метод квазіконформних відображень до розв'язування відповідних нелінійних крайових задач про побудову гідродинамічної сітки, відшукування поля насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо для випадків великої кількості криволінійних рядів і свердловин у них, коли область комплексного квазіпотенціалу є багатолистою поверхнею, що дозволяє прогнозувати зміну характеристик пластової системи при різних умовах впливу на неї, вивчити особливості фільтрації в привибійних зонах і шляхом розрахунку відповідних параметрів керування здійснити вибір оптимальних відстаней між свердловинами.

**Загальна постановка задачі.** Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації в пласті (на рис. 1а – область  $\tilde{G}_z$ ), обмеженому непроникним зовнішнім контуром, контурами почергово розміщених пар нагнітальних та експлуатаційних свердловин<sup>1</sup>, за умови відсутності перетоків між відповідними криволінійними рядами. У роботі [7] розглянуто схему розробки пласта, коли кількість криволінійних рядів є достатньо великою, а кількість свердловин у ряді дорівнює трьом. Оскільки згідно з потребами практики кількість свердловин у процесі розробки продуктивних площ з часом збільшується, то це, в свою чергу, вимагає збільшення кількості свердловин у запропонованій схемі в кожному з рядів, можливо, в декілька разів. При цьому область комплексного квазіпотенціалу  $\tilde{G}_\omega$  (рис. 1б) є багатолистою, листи якої складаються із склеєних між собою внутрішностей прямокутників  $A_1A_2B_1B_2$ ,  $B_2B_3C_2C_3$ ,  $N_1N_2C_1C_2$ ,  $D_1D_2T_3T_4$ ,  $D_2D_3T_1T_2$ ,  $T_4T_5A_4A_3$ , які є прообразами відповідних криволінійних підобластей області  $\tilde{G}_z$ . Такого типу схематизація пласта вимагає розробки комплексного підходу до постановок відповідних задач та побудови алгоритмів їх розв'язування.

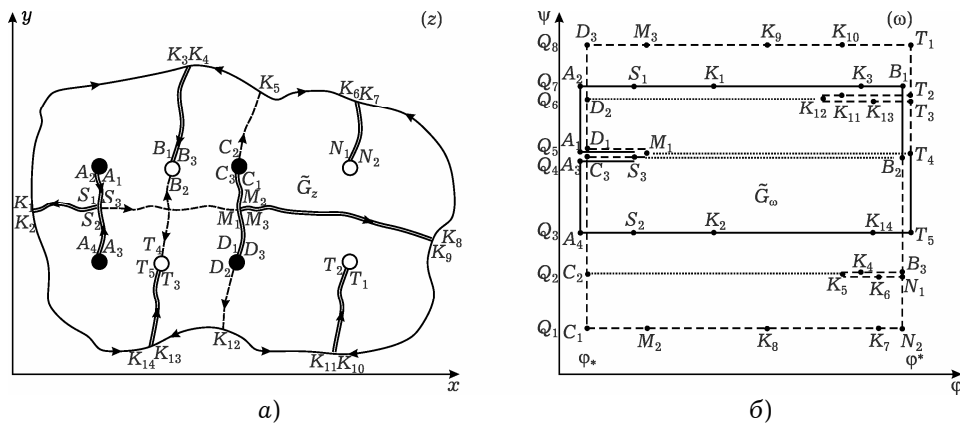


Рис. 1

Для зручності викладок окремих фрагментів запропонованої методології розглянемо спочатку простіший випадок, коли пластові ряди свердловин є прямолінійними, розміщені симетрично, і на одну експлуатаційну свердловину припадає декілька ( $n_*$ ) нагнітальних (рис. 2а).

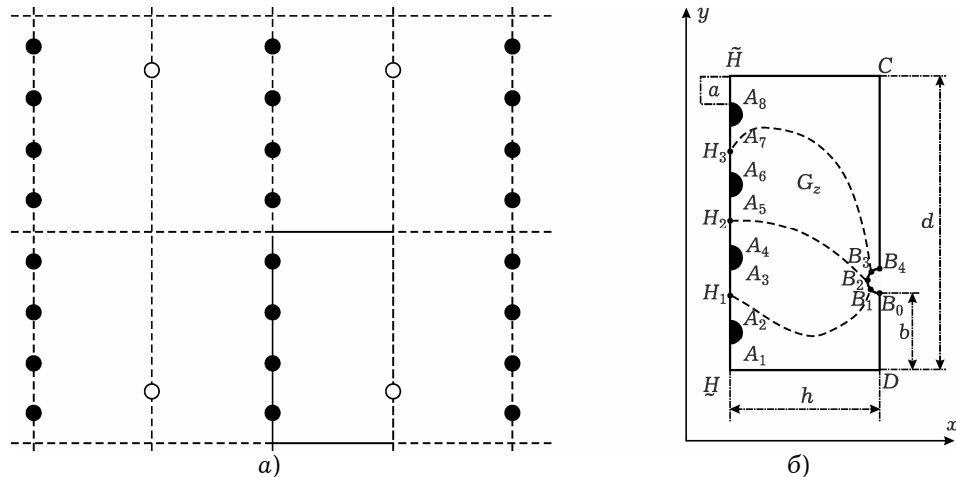


Рис. 2

<sup>1</sup> Примітка. На рис. 1, 2 нагнітальні свердловини позначено ●, експлуатаційні – ○.

З огляду на симетрію розміщення свердловин маємо можливість виділити елемент  $G_z \in \tilde{G}_z$ , що містить  $n_*$  нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну (див. рис. 2б, де  $d = 2n_*(r + a)$ ,  $r^0$  – радіус нагнітальних та експлуатаційних свердловин,  $a$  – половина відстані між нагнітальними свердловинами,  $h$  – відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин,  $n_* = 4$ ).

Закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазі-потенціалу швидкості фільтрації  $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$  (тут  $p(x, y, t)$  – тиск у точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\tilde{p}$  – деяке характерне його значення), згідно з [1, 12] подамо у вигляді

$$\mathbf{v}_\ell = \frac{k\tilde{k}_\ell}{\mu_\ell} \text{grad } \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_\ell}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v}_\ell = 0, \quad \ell = 1, 2, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де  $s_1(x, y, t)$  і  $s_2(x, y, t)$  – відповідно насиченості пористого середовища нафтою і водою в точці  $(x, y)$  у момент часу  $t$  (тут і надалі час  $t$  та інші величини є безрозмірними);  $\sigma$ ,  $k$  – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту;  $\tilde{k}_1 = (1 - s)^2$ ,  $\tilde{k}_2 = s^2$  – відносні фазові проникності ( $s = s_2$ );  $\mathbf{v}_\ell$ ,  $\mu_\ell$  – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості  $\ell$ -ї фази. Звідси з урахуванням сумарної швидкості  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  фільтраційної течії маємо

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \bar{k} \cdot \text{grad } \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\text{де } f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних  $L_g$  і експлуатаційних  $L^*$  свердловинах підтримуються постійні тиски (квазіпотенціали, що відповідають їм, позначимо через  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$ ), інші ділянки границі області  $G_z$  є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = 0,$$

де

$$L^* = \{z = x + iy : f^*(x, y) = 0\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau) + h,$$

$$y = r^0 \sin(\tau) + b + r^0, \quad \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\},$$

$$\tilde{L} = A_1\tilde{H} \cup \tilde{H}D \cup DB_0 = \{z : f(x, y) = 0\}, \quad A_1\tilde{H} = \{z : x = 0, \quad 0 \leq y \leq a\},$$

$$\tilde{H}D = \{z : y = 0, \quad 0 \leq x \leq h\}, \quad DB_0 = \{z : x = h, \quad 0 \leq y \leq b\},$$

$$L_g = \{z = x + iy : f_g(x, y) = 0, \quad g = 1, \dots, n_*\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau),$$

$$y = r^0 \sin(\tau) + (2g - 1)(a + r^0), \quad 3\pi/2 \leq \tau \leq 5\pi/2\},$$

$$\tilde{L} = A_{2n_*}\tilde{H} \cup \tilde{H}C \cup CB_{n_*} = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\},$$

$$A_{2n_*}\tilde{H} = \{z : x = 0, \quad d - a \leq y \leq d\}, \quad \tilde{H}C = \{z : y = d, \quad 0 \leq x \leq h\},$$

$$CB_{n_*} = \{z : x = h, \quad b + 2r \leq y \leq d\}, \quad \tilde{L} = \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2}H_{u-1}A_{2u-1},$$

$$A_{2u-2}H_{u-1}A_{2u-1} = \{z : x = 0, \quad 2(u-1)(a + r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a + r^0) + a\}.$$

Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через  $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$  і  $s = s_*$ . Аналогічно, як у [4–7], ввівши функцію течії  $\psi$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , задачу про побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі квазіконформного відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  однозв'язної області  $G_z$

на відповідну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n_*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n_*-1} \bar{L}_g$ :

$$\begin{aligned} \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, & (x, y) &\in G_z, \\ \varphi|_{L_g} &= \varphi_*, & \varphi|_{L^*} &= \varphi^*, & \psi|_{\bar{L}} &= 0, & \psi|_{\bar{L}} &= Q_{n_*}, \\ \psi|_{A_{2u-2}H_{u-1}A_{2u-1}} &= Q_{u-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} G_g &= \{ \omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_{g-1} < \psi < Q_g \}, & g &= 1, \dots, n_*, \quad Q_0 = 0, \\ \bar{L}_g &= \{ \omega : \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_g \}, \\ Q_g - Q_{g-1} &= \oint_{L_g} -v_y dx + v_x dy, \\ v(x, y) &= \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}, \end{aligned}$$

$Q_g - Q_{g-1}$  – невідома витрата.

**Системний опис задачі, проблеми керування та оптимізації параметрів.** Обернувши до (1) крайову задачу квазіконформного відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$ , а також (як наслідок) рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3)$$

$$\tilde{f}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_{n_*}), y(\varphi, Q_{n_*})) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$f_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r) + a,$$

$$\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}}, \quad g = 2, \dots, n_*,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_{n_*}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (5)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (3) і формули для обчислення компонент сумарної швидкості

$$v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

задачу (2) для насиченості перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*,$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (7)$$

де рівняння (6) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна  $\psi$  тут входить як параметр. Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощують загальну стратегію розщеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі – подання його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно. Спочатку за фіксованим розподілом насиченості  $s$  розв'язуємо задачу квазіконформного відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал  $\varphi$ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри. Потім за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (6) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукування поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроєктованого розміщення свердловин. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти (зокрема, максимізувати її відбір за умов мінімізації об'єму нагнітання води). Аналогічно, як у [3], актуальною є задача оптимізації перетоків між розміщеними згідно з проектом свердловинами при керуванні значенням потенціалу на одній із них.

Проте досить часто виникає потреба розв'язання ширших задач, коли, крім прогнозування та визначення особливості експлуатації свердловини, також приходить встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло би ті чи інші критерії. Так, на підставі розглянутої вище загальної постановки задачі керування процесом оптимізації видобутку нафти може базуватись на встановленні зв'язку лише двох параметрів  $a$  та  $b$ , що характеризують відповідно розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин на розроблюваних площах, за умов сталості  $h$ . Тоді при заданих  $a$  та  $h$  ставиться задача підібрати таке значення величини  $b$ , що характеризує положення експлуатаційної свердловини, щоб час  $t = \tilde{t}$  прориву води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти  $Q_2 = Q_2(a, b, h, \tilde{t})$  були максимальними, а в наступні моменти часу  $t > \tilde{t}$  об'єм води  $Q_1 = Q_1(a, b, h, t)$  в сумарній витраті

$$Q = Q(a, b, h, t) = Q_1 + Q_2 = \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy$$

був мінімальним. Важливими також є задачі оптимізації витрат на певному проміжку часу.

Неповна визначеність геометричної конфігурації області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  (її залежність від значень параметра  $b$ ) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів числового розв'язування задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і «алгоритму вибору», призначеного для вибору конкретного випадку. В залежності від значення параметра  $b$  на основі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням авторами встановлено усі можливі випадки формування області комплексного квазіпотенціалу. Так, на рис. 3 зображено чотири однотипних із них, що відповідають значенням  $b \leq d/2 - r^0$  (у випадку, коли  $b \geq d/2 - r^0$ , формування області комплексного квазіпотенціалу є симетричними до побудованих). Особливий інтерес становлять випадки (називатимемо їх «ключовими»), які характеризуються рівністю квазіпотенціалів в точках  $H_\ell(x_{H_\ell}, y_{H_\ell})$ ,  $\ell = 1, \dots, n_* - 1$ , призупинки течії.

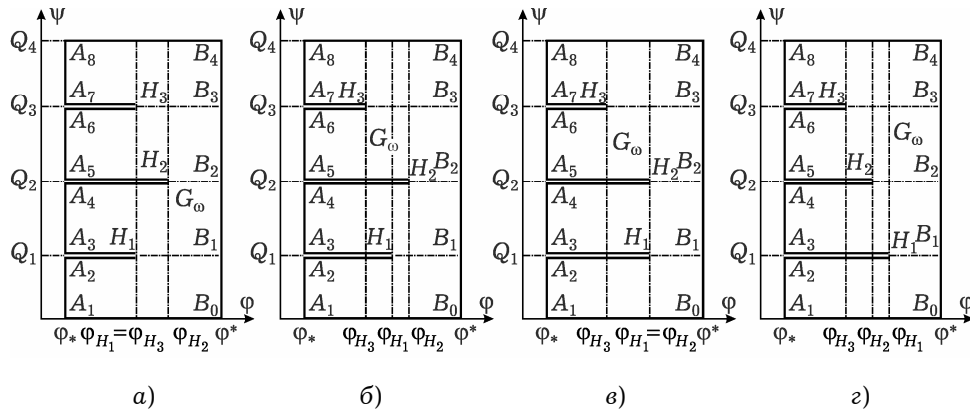


Рис. 3

У загальному випадку (для пласта, зображеного на рис. 1) постановка задач ускладнюється через необхідність задання умов для визначення характерних ліній розділу течії, точок «призупинки», величин різного роду перетоків [3], а також конструювання схем склеювання між собою прямокутників, що утворюють багатолісну область квазіпотенціалу тощо. При цьому можливі, наприклад, такі типи постановки вихідної задачі.

1°. За відомими координатами центрів свердловин і потенціалами, заданими на них, знайти гідродинамічну сітку, значення витрат на нагнітальних та експлуатаційних свердловинах (наприклад,  $Q = Q_7 - Q_5 =$

$$= \oint_{A_1 A_2} -v_y dx + v_x dy), \text{ координати точок «призупинки», поля квазіпотенціалу}$$

та насиченості і положення кривих, що розділяють ділянки впливу згаданих вище криволінійних рядів.

2°. За заданими вхідними параметрами вказати умови розташування свердловин у криволінійних рядах, які забезпечували би відсутність перетоків між рядами та оптимальні варіанти відбору нафти.

**Різницевий аналог та алгоритм розв'язування задачі.** Алгоритм вибору того чи іншого із випадків (зокрема, області комплексного квазіпотенціалу) в залежності від значень параметра  $b$  будемо, як у [3]. Спочатку розв'язуємо ключову задачу у випадку, коли  $b = b_0 = d/2 - r^0$  (див. рис. 3а),

при цьому знаходимо величини параметрів  $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_3}$ ,  $\varphi_{H_2}$ . Далі послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 3б, при  $b = b_i = b_0 - \Delta b i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , де  $\Delta b$  – достатньо мале додатне число таке, що  $\varphi_{H_2} > \varphi_{H_1} > \varphi_{H_3}$ , поки виконується умова  $|\varphi_{H_1} - \varphi_{H_2}| > \varepsilon$ . Коли ж  $|\varphi_{H_1} - \varphi_{H_2}| \leq \varepsilon$ , тобто  $\varphi_{H_1} \approx \varphi_{H_2}$  (відповідне значення  $b$  тоді позначимо через  $b^0$ ), матимемо наближення розв'язку задачі у ключовому випадку, зображеному на рис. 3в. При подальшому зменшенні  $b$ , покладаючи  $b = b_i = b^0 - i b^0 / m_*$ ,  $i = 0, \dots, m_*$ ,  $m_* \in \mathbb{N}$ , отримуємо серію проміжних задач, що відповідають випадку, зображеному на рис. 3г.

Вузли  $(\varphi_i, \psi_j)$  сіткової області  $G_\omega$  визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = 0, \dots, n_1^g, & \Delta\varphi_1^g = \frac{\varphi_{H_g} - \varphi_*}{n_1^g + 1}, \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = n_1^g + 1, \dots, n, & \Delta\varphi_2^g = \frac{\varphi^* - \varphi_{H_g}}{n_2^g + 1}, \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j\Delta\psi_g, \quad j = \sum_{\ell=0}^{g-1} m_\ell + g - 1, \dots, \sum_{\ell=0}^g m_\ell + g - 1, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1}) \frac{1}{m_g}, \quad g = 1, \dots, n_*, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0,$$

$$n = n_1^g + n_2^g + 1, \quad m = \sum_{\ell=1}^{p_0} m_\ell + n_* - 1, \quad m_\ell, n_1^g, n_2^g \in \mathbb{N}.$$

Рівняння (5) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [11], наступним чином:

$$x_{i,j} = (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_w x_{i+1,j}) \frac{1}{a_p},$$

$$y_{i,j} = (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_w y_{i+1,j}) \frac{1}{a_p}, \quad (8)$$

де

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j),$$

$$a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, \quad a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-},$$

$$a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}, \quad a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w,$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2,$$

$$k_n = 2k_{i,j} k_{i,j+1} / (k_{i,j} + k_{i,j+1}), \quad k_s = 2k_{i,j} k_{i,j-1} / (k_{i,j} + k_{i,j-1}),$$

$$k_e^{-1} = (k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1})/2, \quad k_w^{-1} = (k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1})/2.$$

Вибір величин  $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$  визначається належністю вузла  $(\varphi_i, \psi_j^g)$  тій чи іншій підобласті сіткової області  $G_\omega$  [3]. Наприклад, якщо  $\varphi_i = \varphi_{H_1}$ ,  $\psi_j^g = 0$ , то  $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$ ,  $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$ ,  $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$ . Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned}
f_g(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, & j &= \sum_{\ell=0}^{g-1} m_\ell + g - 1, \dots, \sum_{\ell=0}^g m_\ell + g - 1, \\
f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, & j &= 0, \dots, m, \\
x_{i, m_{g-1}} &= 0, & 2(g-1)(a+r) - a &\leq y_{i, m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, & m_g &= \sum_{\ell=1}^g m_\ell + g - 1, \\
x_{i, m_g} &= 0, & y_{H_{g-1}} &\leq y_{i, m_g} \leq 2(g-1)(a+r) + a, & i &= 0, \dots, n_1, \\
\tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, & \tilde{f}(x_{i, m_p}, y_{i, m_p}) &= 0, \\
&& i &= 0, \dots, n, & j &= 0, \dots, m, & g &= 2, \dots, n_*. \quad (9)
\end{aligned}$$

Тут, як і в [2, 3], комплексну спряженість гармонічних функцій  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$  забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області  $G_z$ . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд

$$\begin{aligned}
&(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\
&\quad + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\
&\quad j = \sum_{\ell=0}^{g-1} m_\ell + g - 1, \dots, \sum_{\ell=0}^g m_\ell + g - 1, \quad g = 1, \dots, n_*, \\
&(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\
&\quad + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \\
&\quad j = 0, \dots, m. \quad (10)
\end{aligned}$$

Невідомі витрати  $Q_g$  та значення потенціалу  $\varphi_{H_g}$  в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами

$$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g,$$

де  $\Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}$ , а  $\gamma_\ell^g$  одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^g &= \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, & \gamma_2^g &= \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \\
\tilde{m}_1 &= \sum_{\ell=0}^{g-1} m_\ell + g - 1, & \tilde{m}_2 &= \sum_{\ell=0}^g m_\ell + g - 1, \\
\gamma_{i,j} &= \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, & g &= 1, \dots, n_*, \\
a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\
b_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \quad (11)
\end{aligned}$$



Рівняння (6) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [7] наступним чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi_\ell^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}),$$

$$s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \quad i = \begin{cases} 1, \dots, n_1^g + 1, & \ell = 1, \\ n_1^g + 2, \dots, n, & \ell = 2, \end{cases} \quad j = 1, \dots, m, \quad (12)$$

де  $\tau$  – крок за часом,  $s_{i,j}$ ,  $\hat{s}_{i,j}$  – насиченість у відповідні моменти часу,  $v_{i,j}$  – швидкість (знаходимо, як у роботі [5]). Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad i = \begin{cases} 1, \dots, n_1^g + 1, & \ell = 1, \\ n_1^g + 2, \dots, n, & \ell = 2, \end{cases} \quad j = 1, \dots, m.$$

Задавши крок  $\tau$ , параметри розбиття  $n_1^g$ ,  $n_2^g$ ,  $m_g$ ,  $g = 1, \dots, n_*$ , області  $G_\omega$  та точності  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (9)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів, за формулами (11) знаходимо наближення величин  $\gamma_\ell^g$ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (8) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$ . Після цього, як і в [2, 4–6], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин  $Q_g$ ,  $\Phi_{H_g}$ . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є: стабілізація витрат  $Q_g$  ( $|Q_g^{(x+1)} - Q_g^{(x)}| < \varepsilon_1$ ); стабілізація граничних вузлів ( $\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(x)} - x_{i,j}^{(x-1)})^2 + (y_{i,j}^{(x)} - y_{i,j}^{(x-1)})^2} < \varepsilon_2$ ) тощо. У випадку невиконання однієї із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (12) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

При побудові різницевого аналогу задачі, яка відповідає області, зображеній на рис. 1, до двох індексів  $(i, j)$  координат  $(x, y)$  шуканих точок приписуємо ще один, що характеризує належність їх образів до того чи іншого листа області  $\tilde{G}_\omega$ . Встановивши належність образів вузлів гідродинамічної сітки тому чи іншому листу відповідної багатолистої поверхні  $\tilde{G}_\omega$  та задавши початкове наближення цих вузлів, проводимо уточнення координат  $(x, y)$  використовуючи аналоги формул (8)–(12). Зазначимо, що у випадку введення «локальної» індексації вузлів у кожному із прямокутників, що складають область  $\tilde{G}_\omega$ , дискретизацію відповідних рівнянь на спільних їх межах здійснюємо з використанням «різномісних» приміжових точок, що певною мірою дозволяє розпаралелити алгоритм розв'язування. Проведення «глобальної» індексації у всій області  $\tilde{G}_\omega$  забезпечує спрощення дискретизації рівнянь, проте вимагає коригування індексів в околі розрізів.

**Числові розрахунки.** Описаний вище алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізовано у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Його можливості проілюструємо на тестовому прикладі при  $r^0 = 0.3$ ,  $a = 1$ ,  $h = 5$ ,  $d = 2n_*(a + r)$ ,  $n_2 = 45$ ,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $s_* = 1$ ,  $\tilde{s}(x, y) = 0$ ,  $k = 1$ ,  $\tau = 0.0001$ .

На рис. 4, 5 зображено гідродинамічну сітку та розподіл насиченості в заданий момент часу  $t = 1.01$  для значень  $n_1 = 3$ ,  $m_1 = 20$ ,  $m_2 = 30$ ,  $m_3 = 30$ ,  $m_4 = 20$ .

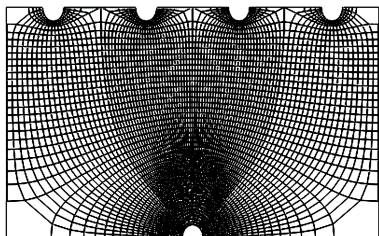


Рис. 4.

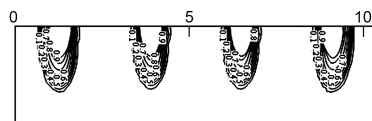


Рис. 5

Результатами комп'ютерного експерименту було підтверджено той факт, що у випадку однорідного середовища оптимальним положенням експлуатаційної свердловини є зображене на рис. 4, що відповідає значенню параметра  $b = 4a + 3r^0$ .

**Висновки.** Розроблено комплексний підхід до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних пластах, обмежених непроникним зовнішнім контуром і контурами почергово розміщених криволінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, без перетоків між рядами за умов керування, що дозволяє прогнозувати зміну характеристик пластової системи при різних умовах впливу на неї, вивчити особливості фільтрації в привибійних зонах і шляхом розрахунку відповідних параметрів керування здійснити вибір оптимального розміщення свердловин, що, зокрема, забезпечує максимум відбору нафти. При цьому вихідна нелінійна задача розщеплена на послідовність простіших задач: крайових задач квазіконформного відображення (для одно- та багатолістих поверхонь) та нелінійних задач для просторово одновимірних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку з параметрами. Результатами комп'ютерного експерименту для конкретного випадку схематизації пласта було підтверджено той факт, що у випадку однорідного середовища оптимальним положенням експлуатаційної свердловини є таке, що відповідає значенню параметра керування  $b = 4a + 3r^0$ .

У перспективі є узагальнення задачі з урахуванням затрат на розробку та експлуатацію пласта, а також цін на нафтопродукти.

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – Москва: Недра, 1972. – 288 с.
2. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
3. Бомба А. Я., Скопецький В. В., Яроцак С. В. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 64–72.
4. Бомба А. Я., Яроцак С. В. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації // Доп. НАН України. – 2010. – № 10. – С. 34–40.
5. Бомба А. Я., Яроцак С. В. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин // Волинськ. мат. вісн. Сер. Прикл. математика. – 2009. – Вип. 6 (15). – С. 20–35.

6. Бомба А. Я., Яроцак С. В. Числовой метод квазиконформных отображений до-  
слѣдження двофазной фѣльтрації в элементах площадного заводнения // Розвід-  
ка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35) – С. 31–35.
7. Бомба А. Я., Яроцак С. В. Числовой метод квазиконформных отображений моде-  
лювання процесів двофазной фѣльтрації // Обчисл. та прикл. математика. –  
2010. – № 2. – С. 3–13.
8. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов  
разработки месторождений углеводородов. – Москва–Ижевск: Ин-т компьютер.  
исследований, 2002. – 140 с.
9. Hoteit H., Firoozabadi A. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous  
permeable media with different capillarity pressures // Adv. Water Resour. –  
2008. – 31, No. 1. – P. 56–73.
10. Roupert R. C., Schäfer G., Ackerer P., Quintard M., Chavent G. Construction of  
three-phase data to model multiphase flow in porous media: Comparing an  
optimization approach to the finite element approach // C. R. Geosci. – 2010. –  
342, No. 1. – P. 855–863.
11. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics.  
The finite volume method. - New York: Longman Sci. & Techn., 1995. – 267 p.
12. Zhangxin C., Guanren H., Yuanle M. Computational methods for multiphase flows  
in porous media. – Soc. for Industr. and Appl. Math., 2006. – 531 p. – (Ser. CS&E.)

### КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В УСЛОВИЯХ УПРАВЛЕНИЯ

*Разработан комплексный подход к математическому моделированию процессов двухфазной фѣльтрации в горизонтальных пластах, ограниченных непроницаемым внешним контуром и контурами поочередно расположенных криволинейными рядами нагнетательных и эксплуатационных скважин, без перетоков между рядами в условиях управления. На основе идей методов квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик среды и процесса фѣльтрации разработан численный алгоритм решения соответствующих задач о построении гидродинамической сетки, отыскания поля насыщенности, координат точек «приостановки», фѣльтрационных расходов, времени полного заводнения и др. для случаев, когда область комплексного квазипотенциала является одно- или многоступенчатой поверхностью. На конкретном примере (когда пластовые ряды скважин являются прямолинейными и размещены симметрично) продемонстрированы отдельные фрагменты предлагаемого подхода.*

### INTEGRATED APPROACH TO MODELING OF TWO-PHASE FILTRATION UNDER CONTROL CONDITIONS

*A comprehensive approach to mathematical modeling of processes of two-phase filtering in horizontal layers, limited by impenetrable outer contour and the contours of alternately arranged curved series of injection and production wells, without cross-flow between the rows under control conditions is developed. In this case, based on the ideas of methods of quasi-conformal mappings and stepwise locking characteristics of the medium and the process developed a numerical algorithm for solving the relevant problems to construct the hydrodynamic grid, to find the field saturation, the «pause» point coordinates, filtration costs, time, total flooding, etc. for the cases where the domain of complex quasi-potential is one- or branched surface is constructed. A concrete example (when the reservoir series of wells are rectilinear and arranged symmetrically) some fragments of the proposed approach are demonstrated.*

Рівненськ. держ. гуманітарний ун-т, Рівне

Одержано  
16.10.10