УДК 539.3

Я. Й. Бурак[1], Т. С. Нагірний[1,2], З. В. Бойко[1]

ВПЛИВ ДИСИПАТИВНИХ ПРОЦЕСІВ НА ПРИПОВЕРХНЕВУ НЕОДНОРІДНІСТЬ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Сформульовано базові співвідношення математичної моделі механіки пружних деформівних систем, яка описує формування приповерхневої неоднорідності, пов'язаної як із процесом локального зміщення маси, так і з дисипативними процесами. На цій основі розв'язано задачу про стаціонарний напружено-деформований стан необмеженого порожнистого циліндра. Показано, що приповерхнева неоднорідність розподілу напружень та хімічного потенціалу характеризується двома параметрами. Один з них пов'язаний з локальним зміщенням маси, інший – є наслідком протікання у тілі дисипативних процесів.

Вступ. У приповерхневих областях тіла закономірності протікання фізико-механічних процесів відрізняються від процесів всередині тіла. Оскільки товщина приповерхневого шару є малою порівняно з розмірами тіла, його здебільшого моделюють тонкою оболонкою, характеристики матеріалу якої відмінні від відповідних характеристик внутрішніх областей тіла [13, 14]. Цей підхід бере свій початок від робіт Дж. Ґіббса [10]. У науковій літературі приповерхневу неоднорідність часто описують нелокальними теоріями, які передбачають залежність локального термодинамічного стану тіла у заданій точці від стану його сусідніх точок. Цю залежність враховують або функціональними визначальними співвідношеннями просторового типу [18–21], або шляхом збагачення простору параметрів стану ґрадієнтами тензора деформації вищих порядків [1, 22, 25–30]. Такі нелокальні (ґрадієнтні) моделі за континуального підходу описують приповерхневу неоднорідність розподілів напружень і деформацій. При цьому для отримання основних співвідношень таких моделей використовують як термодинамічні підходи [16], так і варіаційні принципи [26]. З огляду на те, що нелокальні моделі дозволяють уникнути сингулярностей, їх ефективно застосовують для дослідження напружено-деформованого стану тіл з дислокаціями та тріщинами [23]; тіл, що перебувають під дією зосереджених сил [22]; для аналізу хвильових процесів [17, 24], зокрема, ударних хвиль та хвиль прискорення.

За локально-ґрадієнтного підходу в термомеханіці приповерхневу неоднорідність описують шляхом урахування локального зміщення маси [4, 7, 9]. У праці [4] вперше прийнято, що потік маси має складову недифузійної природи. Цю складову було пов'язано із процесом, названим локальним зміщенням маси. За такого підходу побудовано низку математичних моделей та проведено широкий комплекс досліджень [11] з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

У роботах [8, 12] введено поняття наведеної маси – параметр, пов'язаний із процесом локального зміщення маси. Необоротність цього процесу враховано, зокрема, у праці [12], що дозволило дослідити кінетику становлення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану пружних тіл.

Енергетичний підхід до термодинамічного опису формування приповерхневих явищ у термопружних тілах і, зокрема, встановлення стаціонарного стану тіла, наведено у роботі [15].

У працях [5, 6] запропоновано математичну модель механіки пружних деформівних систем, у якій формування приповерхневої неоднорідності пов'язане з локальним зміщенням маси та дисипативними процесами. Дослідження напружено-деформованого стану пружного півпростору, а також суцільного циліндра з використанням співвідношень моделі [5, 6] проведено відповідно у працях [2, 3].

У цій роботі на основі запропонованої в [5, 6] моделі сформульовано та розв'язано задачу про осесиметричний напружено-деформований стан безмежного порожнистого циліндра за врахування приповерхневих явищ, а також дисипативних ефектів. На цій основі проведено аналіз отриманого розв'язку як з урахуванням, так і без урахування впливу локального зміщення маси.

1. Вихідні співвідношення моделі. Об'єктом дослідження є пружне деформівне тверде тіло, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем. За відліковий приймаємо однорідний термодинамічний стан тіла, який відповідає стану необмеженого середовища за відсутності зовнішньої дії. Відліковий стан характеризуємо абсолютною температурою T_0 і густиною ентропії s_0, хімічним потенціалом μ_0 і густиною маси ρ_0, тиском P_0 і питомим об'ємом $V_0 = \rho_0^{-1}$. Тіло перебуває під впливом зовнішньої механічної та теплової дії, внаслідок чого у ньому протікають механічні і теплові процеси, які супроводжуються також локальним зміщенням маси. Для такого тіла рівняння локального стану мають вигляд [6]

$$\frac{1}{3}\sigma^* = -\frac{P_0}{\rho_0} + K_* e - \beta(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M), \qquad (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{d}} = 2G\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}},$$

$$\mu - \mu_0 = \alpha(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M) - \beta e. \tag{1}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}$ – симетрична частина тензора напружень Піоли – Кірхгофа першого роду $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{a}}$; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ – антисиметрична частина $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; $\sigma^*/3$ – кульова складова симетричної частини $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}$ тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ [6]; $e = \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}$ – об'ємна деформація; $\mathbf{u}$ – вектор переміщення; $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}})^{\mathrm{d}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}} - \sigma\hat{\boldsymbol{I}}/3$ – девіатор симетричного тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}$; $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$; $\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}} = \hat{\mathbf{e}} - e\hat{\boldsymbol{I}}/3$ – девіатор тензора деформації $\hat{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}_0)/2$; μ – хімічний потенціал; $\boldsymbol{\Pi}_M = \int_{t_0}^{t} \mathbf{J}_M \, d\tilde{t}$ – вектор локального зміщення маси; $\mathbf{J}_M$ – потік маси, спричинений локальним зміщенням маси; $K_* = \left.\left(K - \frac{2P_0}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial P}{\partial(1/\rho)}\right)\right|_{1/\rho_0}$; K, G – модулі об'ємного стиску та зсуву; $\alpha = \left(\frac{\partial(\mu - \mu_0)}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)}\right)_0$, $\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)}\right)_0$; $\boldsymbol{\nabla}_0$ – диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\hat{\boldsymbol{I}}$ – одиничний тензор.

Симетрична складова $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}$ тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}} = \left[-\frac{P_0}{\rho_0} + K_* e + \beta(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}_M)\right]\hat{\boldsymbol{I}} + 2G\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{d}}. \tag{2}$$

Для опису дисипативних процесів (без урахування ефектів їх взаємовпливу) маємо такі співвідношення [6]:

$$\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+ = \beta_1 \mathbf{u}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{a}} = -G'\boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\nabla}_0(\mu - \mu_0) = \beta_2(-\boldsymbol{\Pi}_M), \tag{3}$$

де $\mathbf{f}^+$ – вектор густини об'ємних сил; $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{a}}$ – супутній вектор до антисиметричного тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{a}}$; $\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}$; β_1, β_2, G' – коефіцієнти дисипативних процесів; «×» – символ векторного добутку.

Запишемо ключову систему рівнянь моделі відносно вектора переміщення $\mathbf{u}$ та вектора локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_M$. З урахуванням рівнянь стану (1) і рівнянь для дисипативних процесів (3) отримаємо

$$G\mathbf{\Delta u}+\left(K_*+\frac{1}{3}G\right)\mathbf{\nabla}_0(\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{u})-G'\mathbf{\nabla}_0\cdot\left[\hat{\mathscr{E}}\cdot(\mathbf{\nabla}_0\times\mathbf{u})\right]=$$

$$=\beta_1\mathbf{u}-\beta\mathbf{\nabla}_0(\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)-\mathbf{f}^+,$$

$$\alpha\mathbf{\nabla}_0(-\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)+\beta_2\mathbf{\Pi}_M=\beta\mathbf{\nabla}_0(\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}). \qquad (4)$$

Тут $\mathbf{\Delta}$ – оператор Лапласа, $\hat{\mathscr{E}}$ – антисиметричний тензор Леві – Чивіта.

При цьому для антисиметричної частини $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{а}}$ тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ маємо

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{а}}=-G'\hat{\mathscr{E}}\cdot(\mathbf{\nabla}_0\times\mathbf{u}). \qquad (5)$$

За умови нехтування взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану (1) ключова система рівнянь (4) стає незв'язаною:

$$G\mathbf{\Delta u}+\left(K_*+\frac{1}{3}G\right)\mathbf{\nabla}_0(\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{u})-G'\mathbf{\nabla}_0\cdot\left[\hat{\mathscr{E}}\cdot(\mathbf{\nabla}_0\times\mathbf{u})\right]=\beta_1\mathbf{u}-\mathbf{f}^+, \qquad (6)$$

$$\alpha\mathbf{\nabla}_0(-\mathbf{\nabla}_0\cdot\mathbf{\Pi}_M)+\beta_2\mathbf{\Pi}_M=0. \qquad (7)$$

При розв'язуванні конкретних задач математичної фізики для забезпечення однозначності їх розв'язків системи рівнянь моделі (4) чи (6), (7) слід доповнити відповідними граничними умовами.

2. Постановка та розв'язування крайової задачі для нескінченного порожнистого циліндра. Розглянемо нескінченний ізотропний деформівний порожнистий круговий циліндр, віднесений до циліндричної системи координат (r,θ,z). Внутрішній радіус циліндра R_1, а зовнішній – R_2. Вважаємо, що внутрішня та зовнішня поверхні циліндра перебувають під впливом зовнішнього середовища, дію якого враховуємо шляхом задання на поверхнях $r=R_1$ та $r=R_2$ тисків p_1^+ та p_2^+, а також хімічних потенціалів μ_1^+ та μ_2^+. Тоді компоненти тензора напружень σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, векторів переміщення $\mathbf{u}=(u_r,0,0)$ і локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_M=(\Pi_{Mr},0,0)$ є функції лише радіальної координати r. У результаті ключова система рівнянь (4) набуває вигляду

$$\mathscr{L}(\Lambda u_r+\beta\Pi_{Mr})-\beta_1u_r=0,$$

$$\mathscr{L}(\beta u_r+\alpha\Pi_{Mr})-\beta_2\Pi_{Mr}=0, \qquad (8)$$

де $\Lambda=K_*+\frac{4}{3}G$; $\mathscr{L}$ – оператор, заданий співвідношенням $\mathscr{L}\equiv\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}$.

Систему рівнянь (8) доповнюємо граничними умовами на внутрішній $r=R_1$ та зовнішній $r=R_2$ поверхнях циліндра

$$\left.\left[-\frac{P_0}{\rho_0}+\beta\frac{d\Pi_{Mr}}{dr}+\beta\frac{1}{r}\Pi_{Mr}+\left(K_*-\frac{2}{3}G\right)\frac{1}{r}u_r+\Lambda\frac{du_r}{dr}\right]\right|_{r=R_i}=-p_i^+,$$

$$\left.\left[\mu_0-\alpha\frac{d\Pi_{Mr}}{dr}-\alpha\frac{1}{r}\Pi_{Mr}-\beta\frac{du_r}{dr}-\beta\frac{1}{r}u_r\right]\right|_{r=R_i}=\mu_i^+,\qquad i=1,2. \qquad (9)$$

Ввівши функції η_1, η_2 співвідношеннями

$$\eta_1=u_r+\chi_1\Pi_{Mr},\qquad \eta_2=u_r+\chi_2\Pi_{Mr},$$

взаємозв'язану систему рівнянь (8) зведемо до системи двох незв'язаних рівнянь відносно цих функцій [3]:

$$\frac{d^2\eta_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\eta_1}{dr}-\left(\frac{a_1\beta_1}{a_1\Lambda+\beta}+\frac{1}{r^2}\right)\eta_1=0\,,$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\eta_2}{dr}-\left(\frac{a_2\beta_1}{a_2\Lambda+\beta}+\frac{1}{r^2}\right)\eta_2=0\,. \qquad (10)$$

Тут позначено

$$\chi_1=\frac{\beta S_1}{B_1}\,, \qquad \chi_2=-\frac{\beta S_2}{B_2}\,,$$

$$S_1=2\alpha\beta_1+A_1(1+A_2), \qquad S_2=2\alpha\beta_1-A_1(A_2-1)\,,$$

$$B_1=A_1(1+A_2)\Lambda+2\beta^2\beta_1, \qquad B_2=A_1(A_2-1)\Lambda-2\beta^2\beta_1\,,$$

$$a_1=\frac{A_1(1+A_2)}{2\beta\beta_1}\,, \qquad a_2=\frac{A_1(1-A_2)}{2\beta\beta_1}\,,$$

$$A_1=\Lambda\beta_2-\alpha\beta_1, \qquad A_2=\sqrt{1+\frac{4\beta_1\beta_2\beta^2}{A_1^2}}\,.$$

Рівняння (10) є модифікованими диференціальними рівняннями Бесселя, розв’язки яких мають вигляд

$$\eta_1=C_1I_1(\chi_3 r)+Z_1K_1(\chi_3 r)\,,$$

$$\eta_2=C_2I_1(\chi_4 r)+Z_2K_1(\chi_4 r)\,.$$

Тут $I_1(\chi_3 r)$, $I_1(\chi_4 r)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду першого порядку; $K_1(\chi_3 r)$, $K_1(\chi_4 r)$ – модифіковані функції Бесселя третього роду (функції Макдональда) першого порядку; C_j , Z_j , $j=1,2$, – сталі, які визначаємо з граничних умов (9) задачі; $\chi_3=\sqrt{\dfrac{A_1(1+A_2)\beta_1}{B_1}}$; $\chi_4=\sqrt{\dfrac{A_1(A_2-1)\beta_1}{B_2}}$.

З урахуванням граничних умов (9) розв’язок сформульованої задачі запишемо так:

$$u_r(r)=\frac{1}{2A_2}\{(1+A_2)[C_1I_1(\chi_3 r)+Z_1K_1(\chi_3 r)]+$$
$$+(A_2-1)[C_2I_1(\chi_4 r)+Z_2K_1(\chi_4 r)]\}\,,$$

$$\Pi_{Mr}(r)=\frac{1}{A_1A_2}\beta\beta_1\{[C_1I_1(\chi_3 r)+Z_1K_1(\chi_3 r)]-$$
$$-[C_2I_1(\chi_4 r)+Z_2K_1(\chi_4 r)]\}\,, \qquad (11)$$

де сталі C_j, Z_j, $j=1,2$, мають вигляд

$$C_1=\frac{2A_1A_2}{\zeta}\left\{[\chi_3S_1(D_{24}E_3-D_{22}E_4)+\chi_4S_2D_{23}E_6]R_1\left(p_1^+-\frac{P_0}{\rho_0}\right)+\right.$$
$$+[\chi_3S_1(-D_{14}E_3+D_{12}E_4)-\chi_4S_2D_{13}E_6]R_2\left(p_2^+-\frac{P_0}{\rho_0}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{\beta}[N_{41}(\mu_0-\mu_2^+)-N_{42}(\mu_0-\mu_1^+)]\right\},$$

$$C_2=\frac{2A_1A_2}{\zeta}\left\{\chi_3S_1\left[(D_{24}E_1+D_{21}E_4+D_{23}E_5)R_1\left(p_1^+-\frac{P_0}{\rho_0}\right)-\right.\right.$$

$$- (D_{14}E_1 + D_{11}E_4 + D_{13}E_5)R_2\left(p_2^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right)\Bigg] +$$

$$+ \frac{1}{\beta}\left[N_{22}(\mu_0 - \mu_1^+) - N_{21}(\mu_0 - \mu_2^+)\right]\Bigg\},$$

$$Z_1 = \frac{2A_1A_2}{\zeta}\Bigg\{\left[\chi_3 S_1(-D_{24}E_2 + D_{22}E_5) + \chi_4 S_2 D_{21}E_6\right]R_1\left(p_1^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right) +$$

$$+ \left[\chi_3 S_1(D_{14}E_2 - D_{12}E_5) - \chi_4 S_2 D_{11}E_6\right]R_2\left(p_2^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\beta}\left[N_{31}(\mu_0 - \mu_2^+) - N_{32}(\mu_0 - \mu_1^+)\right]\Bigg\},$$

$$Z_2 = \frac{2A_1A_2}{\zeta}\Bigg\{\chi_3 S_1\Bigg[(D_{22}E_1 + D_{23}E_2 + D_{21}E_3)R_1\left(p_1^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right) -$$

$$- (D_{12}E_1 + D_{13}E_2 + D_{11}E_3)R_2\left(p_2^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right)\Bigg] +$$

$$+ \frac{1}{\beta}\left[N_{12}(\mu_0 - \mu_1^+) - N_{11}(\mu_0 - \mu_2^+)\right]\Bigg\}.$$

Тут

$$\zeta = \chi_3 S_1\left[(D_{22}D_{14} - D_{24}D_{12})E_1 + (D_{14}D_{23} - D_{13}D_{24})E_2 + (D_{21}D_{14} -\right.$$

$$\left. - D_{11}D_{24})E_3\right] + \chi_4 S_2\left[N_{12}K_0(\chi_4 R_1) - N_{11}K_0(\chi_4 R_2)\right],$$

$$D_{i1} = \chi_3 B_1 R_i I_0(\chi_3 R_i) - 2GA_1(1 + A_2)I_1(\chi_3 R_i),$$

$$D_{i2} = \chi_4 B_2 R_i I_0(\chi_4 R_i) - 2GA_1(A_2 - 1)I_1(\chi_4 R_i),$$

$$D_{i3} = \chi_3 B_1 R_i K_0(\chi_3 R_i) + 2GA_1(1 + A_2)K_1(\chi_3 R_i),$$

$$D_{i4} = \chi_4 B_2 R_i K_0(\chi_4 R_i) + 2GA_1(A_2 - 1)K_1(\chi_4 R_i), \qquad i = 1, 2,$$

$$E_1 = \chi_3 S_1\left[I_0(\chi_3 R_2)K_0(\chi_3 R_1) - I_0(\chi_3 R_1)K_0(\chi_3 R_2)\right],$$

$$E_2 = \chi_4 S_2\left[I_0(\chi_3 R_2)I_0(\chi_4 R_1) - I_0(\chi_3 R_1)I_0(\chi_4 R_2)\right],$$

$$E_3 = \chi_4 S_2\left[K_0(\chi_3 R_1)I_0(\chi_4 R_2) - K_0(\chi_3 R_2)I_0(\chi_4 R_1)\right],$$

$$E_4 = \chi_4 S_2\left[K_0(\chi_4 R_2)K_0(\chi_3 R_1) - K_0(\chi_4 R_1)K_0(\chi_3 R_2)\right],$$

$$E_5 = \chi_4 S_2\left[K_0(\chi_4 R_1)I_0(\chi_3 R_2) - K_0(\chi_4 R_2)I_0(\chi_3 R_1)\right],$$

$$E_6 = \chi_4 S_2\left[K_0(\chi_4 R_1)I_0(\chi_4 R_2) - K_0(\chi_4 R_2)I_0(\chi_4 R_1)\right],$$

$$N_{1j} = \chi_3 S_1\left[(D_{13}D_{22} - D_{12}D_{23})I_0(\chi_3 R_j) - (D_{22}D_{11} - D_{21}D_{12})K_0(\chi_3 R_j)\right] +$$

$$+ \chi_4 S_2(D_{21}D_{13} - D_{23}D_{11})I_0(\chi_4 R_j),$$

$$N_{2j} = \chi_3 S_1\left[(D_{21}D_{14} - D_{11}D_{24})K_0(\chi_3 R_j) - (D_{23}D_{14} - D_{24}D_{13})I_0(\chi_3 R_j)\right] +$$

$$+ \chi_4 S_2(D_{21}D_{13} - D_{23}D_{11})K_0(\chi_4 R_j),$$

$$N_{3j} = \chi_4 S_2[(D_{22}D_{11} - D_{21}D_{12})K_0(\chi_4 R_j) + (D_{21}D_{14} - D_{11}D_{24})I_0(\chi_4 R_j)] +$$
$$+ \chi_3 S_1(D_{22}D_{14} - D_{24}D_{12})I_0(\chi_3 R_j),$$
$$N_{4j} = \chi_4 S_2[(D_{14}D_{23} - D_{13}D_{24})I_0(\chi_4 R_j) + (D_{13}D_{22} - D_{12}D_{23})K_0(\chi_4 R_j)] +$$
$$+ \chi_3 S_1(D_{22}D_{14} - D_{24}D_{12})K_0(\chi_3 R_j), \qquad j = 1, 2,$$

а $K_0(\chi_3 R_1)$ – модифіковані функції Бесселя третього роду нульового порядку; $I_0(\chi_3 R_1)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового порядку.

На основі співвідношень (1), (2), (5), (11) для ненульових компонент тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ та хімічного потенціалу μ одержуємо

$$\sigma_{rr}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2A_1A_2}\left\{C_1\left[\chi_3 B_1 I_0(\chi_3 r) - 2GA_1(1 + A_2)\frac{1}{r}I_1(\chi_3 r)\right] -\right.$$
$$- Z_1\left[\chi_3 B_1 K_0(\chi_3 r) + 2GA_1(1 + A_2)\frac{1}{r}K_1(\chi_3 r)\right] +$$
$$+ C_2\left[\chi_4 B_2 I_0(\chi_4 r) - 2GA_1(A_2 - 1)\frac{1}{r}I_1(\chi_4 r)\right] -$$
$$\left. - Z_2\left[\chi_4 B_2 K_0(\chi_4 r) + 2GA_1(A_2 - 1)\frac{1}{r}K_1(\chi_4 r)\right]\right\},$$
$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2A_1A_2}\left\{C_1\left[\chi_3 B_3 I_0(\chi_3 r) + 2GA_1(1 + A_2)\frac{1}{r}I_1(\chi_3 r)\right] +\right.$$
$$+ Z_1\left[-\chi_3 B_3 K_0(\chi_3 r) + 2GA_1(1 + A_2)\frac{1}{r}K_1(\chi_3 r)\right] +$$
$$+ C_2\left[\chi_4 B_4 I_0(\chi_4 r) + 2GA_1(A_2 - 1)\frac{1}{r}I_1(\chi_4 r)\right] +$$
$$\left. + Z_2\left[-\chi_4 B_4 K_0(\chi_4 r) + 2GA_1(A_2 - 1)\frac{1}{r}K_1(\chi_4 r)\right]\right\},$$
$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2A_1A_2}\{\chi_3 B_3[C_1 I_0(\chi_3 r) - Z_1 K_0(\chi_3 r)] +$$
$$+ \chi_4 B_4[C_2 I_0(\chi_4 r) - Z_2 K_0(\chi_4 r)]\},$$
$$\mu = \mu_0 - \frac{\beta}{2A_1A_2}\{\chi_3 S_1[C_1 I_0(\chi_3 r) - Z_1 K_0(\chi_3 r)] -$$
$$- \chi_4 S_2[C_2 I_0(\chi_4 r) - Z_2 K_0(\chi_4 r)]\},$$

де

$$B_3 = \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)A_1(1 + A_2) + 2\beta^2\beta_1,$$
$$B_4 = \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)A_1(A_2 - 1) - 2\beta^2\beta_1.$$

Приповерхнева неоднорідність компонент тензора напружень і хімічного потенціалу характеризується двома параметрами $\ell_1 = 1/\chi_3$ і $\ell_2 = 1/\chi_4$, які пов'язані з урахуванням локального зміщення маси та з впливом дисипативних процесів. Величини ℓ_1 та ℓ_2 залежать не тільки від параметра β взаємозв'язку процесів деформування та локального зміщення маси, але й від параметрів β_1, β_2, α, що характеризують дисипативні процеси та зміну хімічного потенціалу, спричинену локальним зміщенням маси, а також від модулів пружності та величин P_0 і ρ_0.

За умови нехтування взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану (1) розв'язок сформульованої задачі суттєво спрощується:

$$\sigma_{rr}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + C_1\left[\sqrt{\Lambda\beta_1}\, I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) - 2G\frac{1}{r} I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right)\right] -$$

$$- Z_1\left[\sqrt{\Lambda\beta_1}\, K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) + 2G\frac{1}{r} K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right)\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + C_1\left[\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) + 2G\frac{1}{r} I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right)\right] -$$

$$- Z_1\left[\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) - 2G\frac{1}{r} K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right)\right],$$

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P_0}{\rho_0} + \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\left[C_1 I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) - Z_1 K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right)\right], \qquad (12)$$

$$u_r(r) = C_1 I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right) + Z_1 K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, r\right),$$

$$\Pi_{Mr}(r) = C_2 I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, r\right) + Z_2 K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, r\right),$$

$$\mu = \mu_0 - \sqrt{\alpha\beta_2}\left[C_2 I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, r\right) - Z_2 K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, r\right)\right]. \qquad (13)$$

Тут

$$C_1 = \frac{1}{D_{12}^* D_{21}^* - D_{11}^* D_{22}^*}\left[D_{22}^* R_1\left(p_1^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right) - D_{21}^* R_2\left(p_2^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right)\right],$$

$$Z_1 = \frac{1}{D_{12}^* D_{21}^* - D_{11}^* D_{22}^*}\left[D_{12}^* R_1\left(p_1^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right) - D_{11}^* R_2\left(p_2^+ - \frac{P_0}{\rho_0}\right)\right],$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta_2}\,\eta}\left[K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_2\right)(\mu_0 - \mu_1^+) - K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_1\right)(\mu_0 - \mu_2^+)\right],$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta_2}\,\eta}\left[I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_2\right)(\mu_0 - \mu_1^+) - I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_1\right)(\mu_0 - \mu_2^+)\right],$$

$$D_{1i}^* = R_i\sqrt{\Lambda\beta_1}\, I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, R_i\right) - 2G I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, R_i\right),$$

$$D_{2i}^* = R_i\sqrt{\Lambda\beta_1}\, K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, R_i\right) + 2G K_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}\, R_i\right), \qquad i = 1, 2,$$

$$\eta = K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_2\right) I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_1\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_2\right) K_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}\, R_1\right).$$

Слід зауважити, що хоча в рівняннях стану (1) знехтувано взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси, розподілам напружень (12) та хімічного потенціалу (13) властива приповерхнева неоднорідність, яка зумовлена протіканням дисипативних процесів. При цьому параметри $\ell_{1*} = \sqrt{\Lambda / \beta_1}$, $\ell_{2*} = \sqrt{\alpha / \beta_2}$ – це характерні віддалі таких неоднорідностей. Параметр ℓ_{1*} визначається співвідношенням між коефіцієнтом β_1 і модулями пружності, а також величинами P_0 та ρ_0, а параметр ℓ_{2*} – співвідношенням між коефіцієнтами β_2 та α.

Графіки, наведені на рис. 1 і рис. 2, ілюструють відповідно розподіли нормованих напружень $\sigma_{\theta\theta*} = \dfrac{\sigma_{\theta\theta} + P_0/\rho_0}{p_1^+ - P_0/\rho_0}$ при $p_2^+ = p_1^+$ (рис. 1) та хімічного потенціалу $\mu_* = \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - \mu_1^+}$ при $\mu_1^+ = \mu_2^+$ (рис. 2) у порожнистому циліндрі. Криві на рис. 1 відповідають значенням параметра $\alpha_* = \sqrt{\dfrac{\beta_1}{\Lambda}}\,R_2 = 20, 30, 80$, а на рис. 2 – $\gamma_* = \sqrt{\dfrac{\beta_2}{\alpha}}\,R_2 = 8, 15, 35$. При цьому $\beta_* = \dfrac{K_*}{G} = 10$, $\delta = \dfrac{R_1}{R_2} = 0,8$. Напруження $\sigma_{\theta\theta*}$ є стискувальними.

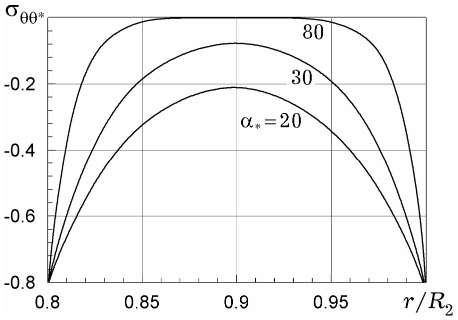

Рис. 1

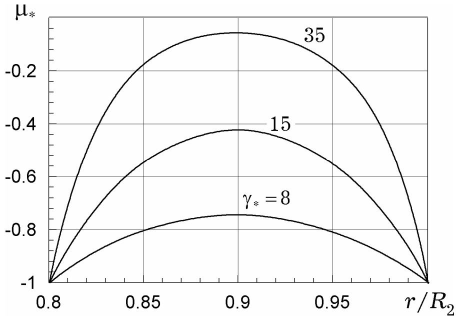

Рис. 2

Бачимо, що зі збільшенням величини α_*, яка пропорційна до зовнішнього радіуса циліндра, область приповерхневої неоднорідності зменшується. Для циліндрів «малих радіусів» неоднорідність у розподілі напружень істотна в усій області, а для циліндрів «великих радіусів» напруження відрізняються від нуля лише у вузькій приповерхневій області. Характер розподілу напружень σ_{zz*} подібний до розподілу $\sigma_{\theta\theta*}$. Зазначимо, що неоднорідність розподілу напружень – наслідок дисипативних процесів, які протікали в тілі, тоді, як неоднорідність розподілу хімічного потенціалу спричинена локальним зміщенням маси.

Висновки. На основі запропонованої раніше математичної моделі механіки пружних деформівних систем, в якій формування приповерхневої неоднорідності пов'язується з дисипативними процесами та локальним зміщенням маси, вивчено осесиметричний стаціонарний напружено-деформований стан нескінченного ізотропного порожнистого циліндра.

Результати проведених досліджень показали, що приповерхнева неоднорідність розподілу напружень та хімічного потенціалу порожнистого циліндра характеризується двома параметрами. Один з них пов'язаний з урахуванням локального зміщення маси, а інший – наслідок протікання у тілі дисипативних процесів. Показано, що навіть за нехтування у рівняннях стану ефектами взаємовпливу процесів деформування та локального зміщення маси, розподілам компонент тензора напружень і хімічного потенціалу властива приповерхнева неоднорідність, зумовлена впливом дисипативних процесів.

Одержані результати дозволяють встановлювати напружено-деформований стан пружних деформівних тіл з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності, а також розраховувати і прогнозувати на цій основі параметри міцності та надійності елементів конструкцій і приладів.

1. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – **2**, Вып. 7. – С. 1399–1409.
2. *Бойко З.* Напружено-деформований стан пружного півпростору за врахування дисипативних процесів під час формування приповерхневої неоднорідності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 47–54.
3. *Бойко З.* Приповерхнева неоднорідність напружено-деформованого стану суцільного циліндра за врахування дисипативних процесів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 19–28.
4. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-ґрадієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
5. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В.* Математична модель термомеханіки з урахуванням дисипативних процесів при формуванні приповерхневих явищ // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 65–71.
6. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В.* Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 55–65.
   Те саме: *Burak Ya. I., Moroz H. I., Boiko Z. V.* On the energy approach and thermodynamic foundations of the variational formulation of boundary-value problems of thermomechanics with regard for near-surface phenomena // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 629–641.
7. *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
8. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
9. *Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т., Чекурін В., Кондрат В., Чернуха О., Мороз Г., Червінка К.* Фізико-математичне моделювання складних систем / Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
10. *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. – Москва: Наука, 1982. – 584 с.
11. *Грицина О., Нагірний Т., Червінка К.* Локально-ґрадієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – № 3. – С. 72–83.
12. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 169–177.
    Те саме: *Kondrat V. F., Hrytsyna O. R.* Equations of thermomechanics of deformable bodies with regard for irreversibility of local displacement of mass // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 4. – P. 492–502.
13. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
14. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Онуфрик Т. М., Повстенко Ю. З.* Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – № 2. – С. 36–43.
15. *Burak Ya. I., Chaplya E. Ya.* Thermodynamic aspects of subsurface phenomena in thermoelastic systems // Mater. Sci. – 2006. – **42,** No. 1. – P. 34–41.
    Те саме: *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 1. – С. 39–44.
16. *Chowdhury K. L., Glockner P. G.* On thermoelastic dielectrics // Int. J. Solids and Struct. – 1977. –**13**. – P. 1173–1182.
17. *Collet B.* Shock waves in deformable ferroelectric materials // The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua: Proc. IUTAM-IUPAP Symp, Paris, 1983 / Ed. G. A. Maugin. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – P. 157–163.
18. *Eringen A. C., Edelen D. G. B.* On nonlocal elasticity // Int. J. Engng. Sci. – 1972. – **10**, No. 3. – P. 233–248.
19. *Eringen A. C.* Nonlocal continuum field theories. – Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
20. *Eringen A. C.* Nonlocal continuum mechanics based on distributions // Int. J. Engng. Sci. – 2006. – **44**, No. 3-4. – P. 141–147.

21. *Eringen A. C.* Polar and nonlocal theories of continua. – Istanbul: Boğaziçi Univ., 1974. – 137 p.
22. *Lazar M., Maugin G. A.* A note on line forces in gradient elasticity // Mech. Res. Commun. – 2006. – **33**, No. 5. – P. 674–680.
23. *Lazar M., Maugin G. A.* Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity// Int. J. Engng. Sci. – 2005. – **43**, No. 13-14. – P. 1157–1184.
24. *Li X. F., Yang J. S., Jiang Q.* Spatial dispersion of short surface acoustic waves in piezoelectric ceramics // Acta Mechanica. – 2005. – **180**, No. 1-4. – P. 11–20.
25. *Maugin G. A.* Nonlocal theories or gradient-type theories: A matter of convenience? // Arch. Mech. – 1979. – **31**. – P. 15–26.
26. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elasticity. – 1972. – **2**, No. 4. – P. 217–282.
27. *Santaoja K.* Gradient theory from the thermomechanics point of view // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**, No. 4-6. – P. 557–566.
28. *Tang Z., Shen S., Atluri S. N.* Analysis of materials with strain-gradient effects: a meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only // Comput. Model. Eng. & Sci. – 2003. – **4**, No. 1. – P. 177–196.
29. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1962. – **11**. – P. 385–414.
30. *Truesdell C., Toupin R. A.* The classical field theory. – Berlin: Springer, 1960. – P. 226–793. – (Handbuch der Physik / Ed. S. Flügge. – Vol. III/1).

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ПРИПОВЕРХНОСТНУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Сформулированы базовые соотношения математической модели механики упругих деформируемых систем, которая описывает формирование приповерхностной неоднородности, связанной как с процессом локального смещения массы, так и с диссипативными процессами. На этом основании решена задача о стационарном напряженно-деформированном состоянии бесконечного полого цилиндра. Показано, что приповерхностная неоднородность распределения напряжений и химического потенциала характеризуется двумя параметрами. Один из них связан с локальным смещением массы, другой – есть следствием протекания в теле диссипативных процессов.

EFFECT OF DISSIPATIVE PROCESSES ON THE NEAR-SURFACE INHOMOGENEITY OF HOLLOW CYLINDER

Basic relations of mathematical model of mechanics of deformable elastic systems, which describes formation of the near-surface inhomogeneity, caused by both the process of local mass displacement and dissipative processes, are formulated. On this basis the problem for the stationary stress-strain state of an infinite hollow cylinder is solved. It is shown that the near-surface inhomogeneity of stresses and chemical potential distribution is characterized by two parameters. One of them is connected with the local mass displacement, other – is the consequence of dissipative processes in the body.

[1] Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Зеленоґур. ун-т, Зелена Ґура, Польща

Одержано
25.01.11