

МІЖФАЗНЕ КРУГОВЕ ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ ВЗАЄМОДІЇ З КУСКОВО-ОДНОРІДНИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ

Задачу про кругове абсолютно жорстке включення довільної форми, яке знаходиться з одним трансверсально-ізотропним півпростором в умовах повного зчеплення і в умовах гладкого контакту з – іншим, зведено до системи двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Одержано розв'язки цієї системи у явному вигляді, що дало можливість визначити поле напружень і зміщень в околі включення під довільним навантаженням. Визначено залежності поступальних і колових зміщень включення від рівнодійних навантажень, головних моментів та пружних властивостей півпросторів. Досліджено асимптотику напружень в околі включення і визначено напрямки найбільшої і найменшої концентрації напружень.

Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження в основному обмежувались або двовимірними анізотропними середовищами [6, 7, 9, 16, 17, 20], або кусково-однорідними ізотропними просторами та осесиметричними задачами для трансверсально-ізотропних просторів [3, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 25, 26]. Що стосується загальніших випадків, зокрема кусково-однорідних анізотропних просторів, а також неосесиметричних задач для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, то відомі лише чисельно-аналітичні розв'язки [13, 21, 22, 25] задач про тріщини, які базуються на результатах праць [11, 23, 24].

Нижче з використанням розривного розв'язку для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [5, 19] задачу про кругове включення довільної форми, яке знаходиться в змішаних умовах повного зчеплення і гладкого контакту з різними трансверсально-ізотропними півпросторами, зведено до системи п'яти двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) у просторі узагальнених функцій повільного зростання $S'(\mathbb{R}^3)$. На основі узагальнення результатів праці [4] побудовано аналітичний розв'язок вказаної системи у просторі $S'(\mathbb{R}^3)$, що дало можливість отримати розв'язок поставленої задачі за будь-якого навантаження та визначити поведінку напружень в околі включень. Одержано залежності поступальних і колових зміщень включень від навантаження за різних видів їх взаємодії із середовищем та від пружних характеристик півпросторів.

1. Формулювання та системи СІР задачі. Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область Ω . До включення прикладене довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування поверхонь включення після деформації описують функції

$$\begin{aligned} \zeta_6^\pm &= \zeta_6^0 + \vartheta_0^\pm(x, y), & (x, y) \in \Omega, & & \zeta_k^\pm &= \zeta_k^0, & k &= 4, 5, \\ \zeta_4^0 &= \delta_x - \phi_z y, & \zeta_5^0 &= \delta_y + \phi_z x, & \zeta_6^0 &= \delta_z + \phi_y x + \phi_x y, & & (1) \end{aligned}$$

$\vartheta_0^\pm(x, y)$ задають форму включення відповідно при $z = \pm 0$; $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ і ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z – поступальні переміщення включення і кути повороту включення навколо відповідних осей. Нехай верхня грань включення $z = +0$ зчеплена з півпростором, а нижня грань $z = -0$ знаходиться в умовах гладкого кон-

такту з іншим півпростором. Відомими в області Ω в цьому випадку будуть такі функції:

$$\begin{aligned}\chi_6^\pm(x, y) &= \vartheta^\pm(x, y) + (1 \pm 1)\zeta_6^0, & \vartheta^\pm &= \vartheta_0^+ \pm \vartheta_0^-, \\ \xi_4^+(x, y) &= \zeta_4^0, & \xi_5^+(x, y) &= \zeta_5^0, & \xi_2^-(x, y) &= \xi_3^-(x, y) = 0, & (x, y) &\in \Omega.\end{aligned}\quad (2)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}\chi_k^\pm(x, y) &= \langle w_k(x, y) \rangle^\pm = \xi_k^+(x, y) \pm \xi_k^-(x, y), & k &= 1, \dots, 6, \\ \xi_k^\pm(x, y) &= w_k(x, y, \pm 0), & \mathbf{w} &= \{w_k(x, y, z)\}_{k=1}^6 = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}.\end{aligned}$$

Враховуючи умови $\chi_k^-(x, y) = 0$, $k = 1, \dots, 6$, $(x, y) \notin \Omega$, які відображають факт з'єднання півпросторів поза включенням, поставлену задачу за допомогою останніх п'яти співвідношень (25) з праці [5] зведемо до системи п'яти двовимірних СІР

$$\begin{aligned}(q_{22}^+ - 2)\tau + 2q_{21}D\mathcal{K}[h_1] + q_{22}^-\bar{D}\bar{\mathcal{K}}_0[\bar{\tau}] + q_{23}^+D\bar{D}\bar{\mathcal{K}}[u] + q_{23}^-D^2\mathcal{K}[\bar{u}] &= g_1(x, y), \\ (q_{22}^+ - 2)\bar{\tau} + 2q_{21}\bar{D}\mathcal{K}[h_1] + q_{22}^-\bar{D}\bar{\mathcal{K}}_0[\tau] + q_{23}^+\bar{D}D\mathcal{K}[\bar{u}] + q_{23}^-\bar{D}^2\mathcal{K}[\bar{u}] &= \bar{g}_1(x, y), \\ (q_{33}^+ + 2)u - 2q_{31}\bar{\mathcal{K}}_0[h_1] + q_{32}^+\mathcal{K}[\tau] + q_{32}^-\bar{D}\mathcal{K}[\bar{\omega}\bar{\tau}] - q_{33}^-D\bar{\mathcal{K}}_0[\bar{u}] &= g_2(x, y), \\ (q_{33}^+ + 2)\bar{u} - 2q_{31}\mathcal{K}_0[h_1] + q_{32}^+\mathcal{K}[\bar{\tau}] + q_{32}^-\bar{D}\mathcal{K}[\bar{\omega}\tau] - q_{33}^-D\bar{\mathcal{K}}_0[u] &= \bar{g}_2(x, y), \\ 2q_{41}\mathcal{K}[h_1] + q_{42}(\mathcal{K}_0[\tau] + \bar{\mathcal{K}}_0[\bar{\tau}]) - q_{43}(\bar{D}\mathcal{K}[u] + D\mathcal{K}[\bar{u}]) &= g_3(x, y)\end{aligned}\quad (3)$$

відносно невідомих функцій

$$\begin{aligned}h_1, \quad \tau &= h_3 + ih_2, \quad u = h_4 + ih_5, \\ \{h_k(x, y)\}_{k=1}^5 &= \{\chi_1^-(x, y), \xi_2^+(x, y), \xi_3^+(x, y), \xi_4^-(x, y), \xi_5^-(x, y)\}.\end{aligned}\quad (4)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}g_1 &= 2q_{24}D\chi_6^- + q_{23}^+D\bar{D}\bar{\mathcal{K}}[u_0] + q_{23}^-D^2\mathcal{K}[\bar{u}_0], & u_0 &= \zeta_4^0 + i\zeta_5^0, \\ g_2 &= (2 - q_{23}^+)u_0 - q_{34}D\mathcal{K}[\chi_6^-] - q_{33}^-D\bar{\mathcal{K}}_0[\bar{u}_0], \\ g_3 &= 2\chi_6^+ - 2q_{44}\chi_6^- - q_{43}(\bar{D}\mathcal{K}[u_0] + D\mathcal{K}[\bar{u}_0]), \\ \mathcal{K}[f] &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(x', y')}{r_0} dx' dy', & \mathcal{K}_0[f] &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(x', y')}{\omega} dx' dy', \\ \omega &= (x - x') + i(y - y'), & r_0 &= \sqrt{\omega\bar{\omega}}, & D &= \partial_1 + i\partial_2,\end{aligned}$$

$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z}$; q_{kn} , q_{kn}^\pm – сталі, які виражають через коефіцієнти узагальненого закону Гука [8], наведено в роботі [5]. Величини δ_x , δ_y , δ_z і ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z визначимо із шести рівнянь рівноваги:

$$\iint_{\Omega} \chi_k(x, y) dx dy = P_{4-k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \chi_1(x, y) dx dy &= \begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \end{pmatrix}, \\ \iint_{\Omega} (x\chi_2(x, y) - y\chi_3(x, y)) dx dy &= M_3.\end{aligned}\quad (6)$$

2. Розв'язання задачі. Нехай включення займає кругову область з центром у початку координат: $\Omega = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$. Перейдемо до циліндричної системи координат (ρ, φ, z) і позначимо

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \zeta_3^+ + i\zeta_2^+, & \tilde{u} &= \zeta_4^- + i\zeta_5^-, \\ \zeta_k^\pm(\rho, \varphi) &= w_k^*(\rho, \varphi, \pm 0), & \{w_k^*(\rho, \varphi, z)\}_{k=1}^6 &= \{\sigma_z, \tau_{z\varphi}, \tau_{z\rho}, u_\rho, v_\varphi, w\}.\end{aligned}$$

Враховуючи зв'язок

$$\tau(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = e^{i\varphi} \tilde{\tau}(\rho, \varphi), \quad u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = e^{i\varphi} \tilde{u}(\rho, \varphi), \quad (7)$$

введемо нові невідомі функції

$$\begin{aligned}v_1 &= h_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), & v_2 &= \tau(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)e^{-i\varphi}, \\ v_3 &= u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)e^{-i\varphi},\end{aligned} \quad (8)$$

які розшукуватимемо у вигляді

$$v_k(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^k(\rho) e^{in\varphi}, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}V_n^k &= \Phi_n[v_k] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_k(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \\ V_{-n}^1 &= \bar{V}_n^1, & \bar{V}_{-n}^2(\rho) &= \Phi_n[\bar{v}_2].\end{aligned}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n^3 &= \rho^{-n-1} \partial_\rho [\rho^{n+1} V_n^3], & \tilde{\bar{V}}_{-n}^3 &= \rho^{n-1} \partial_\rho [\rho^{1-n} \bar{V}_{-n}^3], & \partial_\rho &\equiv \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ W_{k,n}[f] &= \int_0^a f(r) W_{k,n}^*(\rho, r) r dr, & W_{k,n}^*(\rho, r) &= \int_0^\infty J_k(\rho t) J_n(rt) dt, \\ G_{1n} &= 2q_{24} \Theta_n^- + 2c_n \rho^n + 4\tilde{q}_{12} i \phi_z \delta_{n,0} W_{00}[1], \\ G_{2n} &= 2q_{24} \Theta_n^- + 2(\bar{c}_0 - 2\tilde{q}_{12} i \phi_z W_{00}[1]) \delta_{n,0}, \\ G_{3n} &= i \phi_z (\rho(2 - q_{33}^+) + 2q_{33}^- W_{10}[1]) \delta_{n,0} - 2q_{34} W_{n+1, n+1}[\tilde{\Theta}_n^-], \\ G_{4n} &= i \phi_z (\rho(2 - q_{33}^+) + 2q_{33}^- W_{10}[1]) \delta_{n,0} + (q_{33}^+ - 2) \bar{\Delta}_{xy} \delta_{n,1} + \\ &\quad + 2q_{34} W_{n+1, n+1}[\tilde{\Theta}_n^-], \\ G_{5n} &= 4\delta_z \delta_{n,0} + 2\bar{\phi}_{yx} \rho \delta_{n,1} + 2\Theta_n^+ - 2q_{44} \Theta_n^-, \\ \Theta_n^\pm &= \Phi_n[\vartheta_0^\pm], & \tilde{\Theta}_n^\pm &= \rho^n \partial_\rho [\rho^{-n} \Theta_n^\pm], \\ \Delta_{xy} &= \delta_x + i\delta_y, & \phi_{yx} &= \phi_y + i\phi_x,\end{aligned}$$

$\delta_{k,n}$ – символ Кронекера; сталі c_n визначаються із умов

$$\int_0^a \tilde{V}_n^3(\rho) d\rho = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Справджується таке твердження.

Теорема. Для того щоб функції $h_k(x, y) \in S'(\mathbb{R}^2)$, $k = 1, \dots, 5$, були розв'язками системи рівнянь (3), необхідно та достатньо, щоб при $n \geq 0$ справджувались в $S'(\mathbb{R}^2)$ такі рівності ($\rho \in [0, a]$):

$$\begin{aligned}
& W_{n,n} [2q_{21} V_n^1 + q_{23}^+ \tilde{V}_n^3 + q_{23}^- \tilde{\bar{V}}_{-n}^3] + (2 - q_{22}^+) W_{n,n+1} [V_n^2] + \\
& \quad + q_{22}^- W_{n,n-1} [\bar{V}_{-n}^2] = G_{1n}, \\
& W_{n,n} [2q_{21} V_n^1 + q_{23}^+ \tilde{V}_n^3 + q_{23}^- \tilde{\bar{V}}_{-n}^3] + q_{22}^- W_{n,n+1} [V_n^2] + \\
& \quad + (2 - q_{22}^+) W_{n,n-1} [\bar{V}_{-n}^2] = G_{2n}, \\
& q_{32}^+ W_{n+1,n+1} [V_n^2] - q_{32}^- W_{n+1,n-1} [\bar{V}_{-n}^2] - W_{n+1,n} [2q_{31} V_n^1 + (2 + q_{33}^+) \tilde{V}_n^3 + \\
& \quad + q_{33}^- \tilde{\bar{V}}_{-n}^3] = G_{3n}, \\
& q_{32}^+ W_{n-1,n-1} [\bar{V}_{-n}^2] - q_{32}^- W_{n-1,n+1} [V_n^2] + W_{n-1,n} [2q_{31} V_n^1 + (2 + q_{33}^+) \tilde{\bar{V}}_{-n}^3 + \\
& \quad + q_{33}^- \tilde{V}_n^3] = G_{4n}, \\
& W_{n,n} [2q_{41} V_n^1 + q_{43} (\tilde{V}_n^3 + \tilde{\bar{V}}_{-n}^3)] + q_{42} (W_{n,n+1} [V_n^2] + W_{n,n-1} [\bar{V}_{-n}^2]) = G_{5n}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Д о в е д е н н я. Перейдемо в системі (3) до полярних координат і застосуємо скінченне перетворення Фур'є. Тоді, враховуючи подання (7)–(9), формулу [10]

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2s\rho \cos(\phi - \psi) + r^2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k(\phi - \psi)} \int_0^{\infty} J_k(\rho t) J_k(rt) dt,$$

теорему про згортку і співвідношення

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\varphi n} d\varphi}{\rho - r e^{\pm i\varphi}} = \pm W_{n \pm 1, n}^*(\rho, r),$$

одержані шляхом контурного інтегрування, після очевидних перетворень одержимо систему рівнянь (11). Доведення завершує те, що оператор Φ_n є ізоморфізмом в $S'(\mathbb{R}^2)$. \diamond

Розглянемо систему (11) спочатку при $n = 0$. Ввівши позначення

$$\begin{aligned}
U_{10} &= V_0^1(\rho), \quad U_{k0} = (V_0^2(\rho) + (-1)^k \bar{V}_0^2(\rho))/2, \quad k = 2, 3, \\
U_{k0} &= (\tilde{V}_0^3(\rho) + (-1)^k \tilde{\bar{V}}_0^3(\rho))/2, \quad k = 4, 5, \quad (12)
\end{aligned}$$

після очевидних перетворень зведемо (11) до двох незалежних систем

$$\begin{aligned}
q_{21} W_{00} [U_{10}] + (1 - q_{22}) W_{01} [U_{20}] + q_{23} W_{00} [U_{40}] &= Q_{10}, \\
-q_{31} W_{10} [U_{10}] + q_{32} W_{11} [U_{20}] - (1 + q_{33}) W_{10} [U_{40}] &= Q_{20}, \\
q_{41} W_{00} [U_{10}] - q_{42} W_{01} [U_{20}] + q_{43} W_{00} [U_{40}] &= Q_{10}, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \tilde{q}_{11}) W_{01} [U_{30}] + \tilde{q}_{12} W_{00} [U_{50}] &= \tilde{Q}_{10}, \\
\tilde{q}_{21} W_{11} [U_{30}] - (1 + \tilde{q}_{11}) W_{10} [U_{50}] &= \tilde{Q}_{20}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} Q_{10} &= (G_{10} + G_{20})/4, & Q_{20} &= (G_{30} + G_{40})/4, & Q_{30} &= G_{50}/2, \\ \tilde{Q}_{10} &= (G_{10} - G_{20})/4, & \tilde{Q}_{20} &= (G_{30} - G_{40})/4. \end{aligned}$$

Введемо оператори

$$\begin{aligned} \Pi_k[f] &= \rho^{k-1} \mathfrak{I}_*[\rho^{2-k} f], & \Pi_k^*[f] &= -\rho^{k-2} \partial_\rho \mathfrak{I}_*[\rho^{2-k} f], & k &= 1, 2, \\ \mathfrak{I}_*[f] &= \int_a^\rho \frac{f(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, & \mathfrak{I}_0[f] &= \int_0^\rho \frac{f(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \\ S_1[f] &= \partial_\rho \Pi_1 \int_0^\rho f(\rho) d\rho, & S_2[f] &= \mathfrak{I}_0[\rho f], \end{aligned}$$

і перейдемо в системах (13), (14) до нових невідомих функцій

$$\begin{aligned} \eta_{k0}(\rho) &= \Pi_1[U_{k0}], & U_{k0}(\rho) &= \pi^{-1} \Pi_1^*[\eta_{k0}], & k &= 1, 4, 5, \\ \eta_{k0}(\rho) &= \Pi_2[U_{k0}], & U_{k0}(\rho) &= \pi^{-1} \Pi_2^*[\eta_{k0}], & k &= 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Для цього застосуємо до першого і третього з рівнянь системи (13) і до першого з рівнянь системи (14) оператор S_2 , до других рівнянь обох систем – оператор S_1 , і продовжимо невідомі функції на проміжок $(-a, 0]$:

$$\eta_{k0}(-\rho) = \eta_{k0}(\rho), \quad k = 1, 4, 5, \quad \eta_{k0}(-\rho) = -\eta_{k0}(\rho), \quad k = 2, 3.$$

У результаті замість (13), (14) одержимо системи СІР

$$\mathbf{B} \ell_0[\boldsymbol{\eta}(t)] + \mathbf{A} \ell_1[\boldsymbol{\eta}(t)] = \mathbf{f}(\rho), \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} \ell_0[\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)] + \tilde{\mathbf{A}} \ell_1[\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)] = \tilde{\mathbf{f}}(\rho). \quad (17)$$

Тут введено позначення

$$\ell_0[f] = \int_{-a}^a f(t) \frac{\operatorname{sgn}(\rho - t) + \operatorname{sgn}(t)}{2} dt,$$

$$\ell_1[\boldsymbol{\eta}] = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \boldsymbol{\eta}(t) \ln \left| \frac{t}{\rho - t} \right| dt,$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 - q_{22} & 0 \\ q_{31} & 0 & 1 + q_{33} \\ 0 & -q_{42} & 0 \end{Bmatrix} = \{a_{kj}\}_{k,j=1}^3,$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} q_{21} & 0 & q_{23} \\ 0 & q_{32} & 0 \\ q_{41} & 0 & q_{43} \end{Bmatrix} = \{b_{kj}\}_{k,j=1}^3,$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} 1 - \tilde{q}_{11} & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{q}_{11} \end{Bmatrix} = \{\tilde{a}_{kj}\}_{k,j=1}^2, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{21} & 0 \end{Bmatrix} = \{\tilde{b}_{kj}\}_{k,j=1}^2,$$

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}_{k=1}^3 = \{\eta_{10}, \eta_{20}, \eta_{40}\}, \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \{\tilde{\eta}_k\}_{k=1}^2 = \{\eta_{30}, \eta_{50}\},$$

$$\mathbf{f} = \{f_k\}_{k=1}^3, \quad f_k = S_2[Q_{k0}], \quad k = 1, 3, \quad f_2 = S_1[Q_{20}],$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \{\tilde{f}_k\}_{k=1}^2, \quad \tilde{f}_1 = S_2[\tilde{Q}_{10}], \quad \tilde{f}_2 = S_2[\tilde{Q}_{20}].$$

Зробивши підстановки

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(\rho) &= \mathbf{S}\boldsymbol{\eta}^*(\rho), & \boldsymbol{\eta}^*(\rho) &= \{\eta_k^*(\rho)\}_{k=1}^3, \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}}(\rho) &= \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^*(\rho), & \tilde{\boldsymbol{\eta}}^*(\rho) &= \{\tilde{\eta}_k^*(\rho)\}_{k=1}^2,\end{aligned}\quad (18)$$

матричні рівняння (15), (16) подамо у вигляді

$$\ell_0[\boldsymbol{\eta}^*(\rho)] + \mathbf{J}\ell_1[\boldsymbol{\eta}^*(\rho)] = \mathbf{f}^*(\rho), \quad (19)$$

$$\ell_0[\tilde{\boldsymbol{\eta}}^*(\rho)] + \tilde{\mathbf{J}}\ell_1[\tilde{\boldsymbol{\eta}}^*(\rho)] = \tilde{\mathbf{f}}^*(\rho), \quad (20)$$

де

$$\mathbf{f}^*(\rho) = (\mathbf{BS})^{-1}\mathbf{f}(\rho) = \{f_k^*(\rho)\}_{k=1}^3, \quad (\mathbf{BS})^{-1} = \{t_{kj}\}_{k,j=1}^3,$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(\rho) = (\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{S}})^{-1}\tilde{\mathbf{f}}(\rho) = \{\tilde{f}_k^*(\rho)\}_{k=1}^2, \quad (\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{S}})^{-1} = \{\tilde{t}_{kj}\}_{k,j=1}^2.$$

Матриці \mathbf{J} , \mathbf{S} , $\tilde{\mathbf{J}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$ визначаються із умов

$$\mathbf{AS} = \mathbf{BSJ}, \quad \det|\mathbf{A} - \mathbf{JB}| = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{J}}, \quad \det|\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{B}}| = 0$$

і мають вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{vmatrix}, & \mathbf{S} &= \begin{vmatrix} a_{23} & m_{12} & m_{12} \\ 0 & \lambda_0 & -\lambda_0 \\ -a_{21} & m_{32} & m_{32} \end{vmatrix}, \\ \lambda_0 &= \sqrt{\lambda_*}, & \lambda_* &= \frac{a_{21}m_{12} + a_{23}m_{32}}{b_{22}}, & m_{12} &= \frac{b_{33}a_{12} - b_{13}a_{32}}{m_1}, \\ m_{32} &= \frac{b_{11}a_{32} - b_{31}a_{12}}{m_1}, & m_1 &= b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31}, \\ \tilde{\mathbf{J}} &= \begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\lambda}_0 \end{vmatrix}, & \tilde{\mathbf{S}} &= \begin{vmatrix} \tilde{a}_{22}\tilde{b}_{21}^{-1} & \tilde{a}_{22}\tilde{b}_{21}^{-1} \\ \tilde{\lambda}_0 & -\tilde{\lambda}_0 \end{vmatrix}, \\ \tilde{\lambda}_0 &= \sqrt{\tilde{\lambda}_*}, & \tilde{\lambda}_* &= \frac{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}}{\tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}}.\end{aligned}$$

При цьому для відомих комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів [1] виконуються нерівності

$$\lambda_* > 0, \quad \tilde{\lambda}_* > 0. \quad (21)$$

Функції $\eta_j^*(\rho)$, $j = 1, 2, 3$, $\tilde{\eta}_j^*(\rho)$, $j = 1, 2$, згідно з умовами (21) слід розшукувати в класі функцій з інтегровою особливістю на одному із кінців інтервалу [2], тому розв'язки систем (19), (20) подамо так:

$$\begin{aligned}\eta_j^*(\rho) &= \Re_j[\partial_\rho f_j^*(\rho)], & j &= 1, 2, 3, \\ \tilde{\eta}_j^*(\rho) &= \tilde{\Re}_j[\partial_\rho \tilde{f}_j^*(\rho)], & j &= 1, 2.\end{aligned}\quad (22)$$

Тут введено позначення

$$\Re_1[f] = f, \quad \Re_j[f] = \frac{1}{\alpha_*} \left(f(\rho) - \frac{\lambda_j \omega_j(\rho)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\omega_j(t)} \frac{dt}{t - \rho} \right),$$

$$\omega_j(\rho) = \left(\frac{a + \rho}{a - \rho} \right)^{\gamma_j}, \quad \lambda_j = (-1)^j \lambda_0, \quad \gamma_j = (-1)^j \alpha_0, \quad j = 2, 3,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \arctg \lambda_0, \quad \alpha_* = 1 + \lambda_0^2,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{R}}_j[f] &= \frac{1}{\tilde{\alpha}_*} \left(f(\rho) - \frac{\tilde{\lambda}_j \tilde{\omega}_j(\rho)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\tilde{\omega}_j(t)} \frac{dt}{t-\rho} \right), \\ \tilde{\omega}_j(\rho) &= \left(\frac{a+\rho}{a-\rho} \right)^{\tilde{\gamma}_j}, \quad \tilde{\lambda}_j = (-1)^{j+1} \tilde{\lambda}_0, \quad \tilde{\gamma}_j = (-1)^{j+1} \tilde{\alpha}_0, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{\alpha}_0 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \tilde{\lambda}_0, \quad \tilde{\alpha}_* = 1 - \tilde{\lambda}_0^2.\end{aligned}$$

Враховуючи формули (18), (22), розв'язки системи (19), (20) подамо у вигляді

$$\eta_j(\rho) = \frac{1}{\pi} \sum_{k,m=1}^3 \beta_{km}^{(j)} \mathfrak{R}_k[\partial_\rho f_m(\rho)], \quad \beta_{km}^{(j)} = s_{jk} t_{km}, \quad j, m, k = 1, 2, 3, \quad (23)$$

$$\tilde{\eta}_j(\rho) = \frac{1}{\pi} \sum_{k,m=1}^2 \tilde{\beta}_{km}^{(j)} \tilde{\mathfrak{R}}_k[\partial_\rho \tilde{f}_m(\rho)], \quad \tilde{\beta}_{km}^{(j)} = \tilde{s}_{jk} \tilde{t}_{km}, \quad j, m, k = 1, 2. \quad (24)$$

Нехай $n \geq 1$. Позначимо

$$\begin{aligned}U_{kn}^*(\rho) &= (\tilde{V}_n^2 + (-1)^k \tilde{V}_{-n}^2)/2, \\ U_{k+2,n}^*(\rho) &= (\tilde{V}_n^3 + (-1)^k \tilde{V}_{-n}^3)/2, \quad k = 2, 3, \\ U_{1n}^*(\rho) &= V_n^1, \quad \tilde{V}_n^2 \equiv -\rho^{1-n} \tilde{\partial}_\rho \{ \rho^{2n} q_a[\rho^{-n-1} V_n^2] \}, \\ q_a[f] &\equiv \int_\rho^a s f(s) ds, \quad \tilde{\partial}_\rho \equiv \frac{1}{\rho} \partial_\rho.\end{aligned} \quad (25)$$

Тоді, враховуючи властивості

$$W_{m,n+1}[V_n^2] = -W_{m,n-1}[\tilde{V}_n^2], \quad \int_0^a \tilde{V}_n^2(\rho) \rho^n d\rho = 0, \quad (26)$$

співвідношення, що випливають із властивостей функцій Бесселя [10]:

$$\begin{aligned}W_{n+\ell,n}[U_{pn}^*] &= (-1)^{n-1} \rho^{n+\ell} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \{ \rho^{-1-\ell} W_{1+\ell,1}[U_{pn}] \}, \quad p = 1, 4, 5, \quad \ell = 1, 0, -1, \\ W_{n+\ell,n-1}[U_{pn}^*] &= (-1)^{n-1} \rho^{n+\ell} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \{ \rho^{-1-\ell} W_{1+\ell,0}[U_{pn}] \}, \\ & \quad p = 2, 3, \quad \ell = 1, 0, -1, \quad (27)\end{aligned}$$

відносно нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}U_{pn}(\rho) &= \rho^{-1} q_a^{n-1}[\rho^{-n} U_{pn}^*], \quad p = 1, 4, 5, \\ U_{pn}(\rho) &= q_a^{n-1}[\rho^{1-n} U_{pn}^*], \quad p = 2, 3,\end{aligned}$$

після очевидних перетворень із (11) одержимо дві системи

$$\begin{aligned}q_{21} W_{11}[U_{1n}] + (1 - q_{22}) W_{10}[U_{2n}] + q_{23} W_{11}[U_{4n}] &= Q_{1n}, \\ -q_{31} W_{01}[U_{1n}] + q_{32} W_{00}[U_{2n}] - (1 + q_{33}) W_{01}[U_{4n}] &= Q_{2n}, \\ q_{41} W_{11}[U_{1n}] - q_{42} W_{10}[U_{2n}] + q_{43} W_{11}[U_{4n}] &= Q_{1n},\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}(1 - \tilde{q}_{11}) W_{10}[U_{3n}] + \tilde{q}_{12} W_{11}[U_{5n}] &= \tilde{Q}_{1n}, \\ \tilde{q}_{21} W_{00}[U_{3n}] - (1 + \tilde{q}_{11}) W_{01}[U_{5n}] &= \tilde{Q}_{2n}.\end{aligned} \quad (29)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}
Q_{1n} &= q_{24} W_{10} [\tilde{\Theta}_n^-] + \rho(\Psi_{1,n} + \Psi_{2,n}), \\
\tilde{\Theta}_n^\pm(\rho) &= \rho^n q_a^{n-1} [\rho^{-2n-1} \partial_\rho \rho^n \Theta_n^\pm], \\
Q_{2n} &= -q_{34} W_{00} [\tilde{\Theta}_n^-] + \frac{1}{2} \rho(c_* + \Psi_{4,n} + \mathcal{I}_0[\rho^2 \Psi_{3,n}]), \\
\mathcal{I}_0[f(\rho)] &= \tilde{\partial}_\rho \rho^2 \int_0^\rho s^{-1} f(s) ds, \\
Q_{3n} &= W_{10} [\tilde{\Theta}_n^+ - q_{44} \tilde{\Theta}_n^-] + \rho \Psi_{5,n}, \quad \tilde{Q}_{1n} = \frac{1}{2} \rho(\Psi_{1,n} - \Psi_{2,n}), \\
\tilde{Q}_{2n} &= \frac{1}{2} \rho(c_* - \Psi_{4,n} + \mathcal{I}_0[\rho^2 \Psi_{3,n}]), \\
\Psi_{k,n}(\rho) &= (1 - \delta_{n,1}) \sum_{j=1}^{n-2} \rho^{2j} c_{k,j}^* ((2j)!)^{-1} + \delta_{n,1} c_{0,j}^*,
\end{aligned}$$

$c_{0,2}^* = c_n$, $c_{0,1}^* = c_{0,3}^* = 0$, $c_{0,4}^* = (q_{33}^+ - 2)\Delta_{xy}$, $c_{0,5}^* = \phi_{yx}$; c_n, c_* , $c_{k,j}^*$, $j = 1, \dots, n-2$, $k = 1, \dots, 5$, – сталі, які визначаємо відповідно з умов (10), (27) і умов

$$\tilde{\partial}_\rho^j \{\rho^{-1} U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}, \rho^{-1} U_{4n}, \rho^{-1} U_{5n}\} = 0.$$

Застосуємо до першого і третього рівнянь системи (28) і до першого рівняння системи (29) оператор S_2 , а до других рівнянь обох систем – оператор S_1 . Тоді, ввівши нові невідомі функції і продовживши їх на проміжок $(-a, 0)$:

$$\begin{aligned}
\eta_{kn}(\rho) &= \Pi_2[U_{kn}(\rho)], \quad U_{kn}(t) = \pi^{-1} \Pi_2^*[\eta_{kn}(\rho)], \quad \eta_{kn}(-\rho) = -\eta_{kn}(\rho), \\
& k = 1, 4, 5, \\
\eta_{kn}(\rho) &= \Pi_1[U_{1n}(\rho)], \quad U_{kn}(\rho) = \pi^{-1} \Pi_1^*[\eta_{kn}(\rho)], \quad \eta_{1n}(-\rho) = \eta_{1n}(\rho), \\
& k = 2, 3, \tag{30}
\end{aligned}$$

системи (28), (29) зведемо до систем (16), (17), в якій

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_{1n}(\rho), \eta_{2n}(\rho), \eta_{4n}(\rho)\}, \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \{\tilde{\eta}_{3n}(\rho), \tilde{\eta}_{5n}(\rho)\}, \tag{31}$$

$$\mathbf{f} = \{S_2[Q_{1n}], S_1[Q_{2n}], S_2[Q_{3n}]\}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \{S_2[\tilde{Q}_{1n}], S_1[\tilde{Q}_{2n}]\}. \tag{32}$$

При цьому функції (31) визначаються формулами (23), (24) з урахуванням (32). Отже, співвідношення

$$\begin{aligned}
V_0^1(\rho) &= U_{10}, \quad V_0^2(\rho) = U_{20} + U_{30}, \quad \bar{V}_0^2(\rho) = U_{20} - U_{30}, \\
V_n^1(\rho) &= (-1)^{n-1} \rho^n \tilde{\partial}_\rho^{n-1} [\rho^{-1} U_{1n}], \\
\bar{V}_{-n}^2(\rho) &= (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} (U_{2n} - U_{3n}), \\
V_n^2(\rho) &= (-1)^{n-1} \rho^n \partial_\rho \rho^{-n} q_a [\rho^{2n} \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \rho^{-2} (U_{2n} + U_{3n})], \\
V_n^3(\rho) &= (-1)^{n-1} W_{n+1,n} [\rho^n \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \{\rho^{-1} (U_{4n} + U_{5n})\}], \\
\bar{V}_{-n}^3(\rho) &= (-1)^n W_{n-1,n} [\rho^n \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \{\rho^{-1} (U_{4n} - U_{5n})\}], \quad n > 0,
\end{aligned}$$

формули (15), (30) та розвинення (9) визначають розв'язки системи (11).

3. Осесиметричне включення. Кількість доданків у розвиненнях (9) безпосередньо залежить від форми включень і, як правило, є обмеженою. Нехай, наприклад, форма включення є осесиметричною:

$$\mathfrak{G}_0^\pm(x, y) = \mathfrak{G}_0(x^2 + y^2), \quad F_n^\pm(\rho) = \Phi_n[\mathfrak{G}^\pm] = \delta_{n,0} F^\pm(\rho).$$

Тоді в розвиненні (9) залишаться три доданки при $n = -1, 0, 1$. Напруження і дотичні переміщення набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle^- &= -\frac{1}{\pi\rho} \partial_\rho \mathfrak{I}_*[\rho\eta_{10}] - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ e^{i\varphi} \partial_\rho \mathfrak{I}_*[\rho\eta_{11}] \}, \\ (\tau_{z\rho} + i\tau_{z\varphi}) \Big|_{z=+0} &= -\frac{1}{\pi\rho} \partial_\rho \mathfrak{I}_*[\eta_{20} + \eta_{30}] - \frac{\rho}{\pi} e^{i\varphi} \partial_\rho \rho^{-2} \mathfrak{I}_*[\rho(\eta_{21} + \eta_{31})] - \\ &\quad - \frac{1}{\pi\rho} e^{-i\varphi} \partial_\rho \mathfrak{I}_*[\rho(\bar{\eta}_{21} - \bar{\eta}_{31})], \\ (u_\rho + iu_\varphi) \Big|_{z=-0} &= -\frac{1}{\pi\rho} \mathfrak{I}_*[\eta_{40} + \eta_{50}] - \frac{2}{\pi} \mathfrak{I}_*[\operatorname{Re}(\eta_{41} e^{i\varphi}) + i \operatorname{Im}(\eta_{51} e^{i\varphi})]. \end{aligned} \quad (33)$$

Функції $\eta_{kn}(\rho)$, наприклад, для монетоподібного включення мають вигляд

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= \mu_{11} + \mu_{12} \omega_{2,3}^+(\rho), & \eta_{20} &= \mu_{22} \omega_{2,3}^-(\rho), & \eta_{40} &= \mu_{41} + \mu_{42} \omega_{2,3}^+(\rho), \\ \eta_{30} &= i\mu_{31} \{ a\tilde{\omega}_{1,2}^-(\rho) - \rho\tilde{\alpha}_0 \tilde{\omega}_{1,2}^+(\rho) \}, & \eta_{50} &= i\mu_{51} \{ a\tilde{\omega}_{1,2}^+(\rho) - \rho\tilde{\alpha}_0 \tilde{\omega}_{1,2}^-(\rho) \}, \\ \eta_{11} &= \tilde{\mu}_{10} + \tilde{\mu}_{11} \rho \omega_{2,3}^+(\rho) + \tilde{\mu}_{12} \omega_{2,3}^-(\rho), & \eta_{21} &= \tilde{\mu}_{21} \omega_{2,3}^+(\rho) + \tilde{\mu}_{22} \rho \omega_{2,3}^-(\rho), \\ \eta_{31} &= \tilde{\mu}_{31} \tilde{\omega}_{1,2}^+(\rho) + \tilde{\mu}_{32} \rho \tilde{\omega}_{1,2}^-(\rho), & \eta_{51} &= \tilde{\mu}_{51} \rho \tilde{\omega}_{1,2}^+(\rho) + \tilde{\mu}_{52} \tilde{\omega}_{1,2}^-(\rho), \\ \eta_{41} &= \tilde{\mu}_{40} + \tilde{\mu}_{41} \rho \omega_{2,3}^+(\rho) + \tilde{\mu}_{42} \omega_{2,3}^-(\rho), & \omega_{2,3}^\pm(\rho) &= \omega_2^+(\rho) \pm \omega_2^-(\rho), \\ \tilde{\omega}_{1,2}^\pm(\rho) &= \tilde{\omega}_1^+(\rho) \pm \tilde{\omega}_2^-(\rho), & \mu_{11} &= P_3 n_2 \beta_{11}^{(1)} (2am_{10}(1+q_{33}))^{-1} + hm_* s_{11}/2, \\ \mu_{12} &= -P_3 n_2 \lambda_0 \beta_{11}^{(3)} (4\pi am_{10}(1+q_{33}))^{-1} + hm_* s_{12}/2, \\ \mu_{22} &= -P_3 q_{31} (4\pi \alpha_0 q_{32} m_{10})^{-1} + hm_* s_{22}/2, & \mu_{31} &= M_3 \tilde{\lambda}_0 (16\pi a^3 \tilde{\alpha}_0)^{-1}, \\ \mu_{41} &= P_3 n_2 \beta_{11}^{(3)} (2am_{10}(1+q_{33}))^{-1} + hm_* s_{31}/2, & m_{10} &= q_{21} q_{43} - q_{23} q_{41}, \\ \mu_{42} &= -P_3 n_1 \lambda_0 \beta_{11}^{(3)} (4\pi am_{10}(1+q_{33}))^{-1} + hm_* s_{32}/2, & m_* &= 1 - m_{10}^{-1}, \\ \mu_{51} &= M_3 \tilde{\lambda}_0^2 \tilde{q}_{21} (16\pi a^3 \tilde{\alpha}_0 (1 + \tilde{q}_{22}))^{-1}, \\ n_1 &= q_{43} q_{31} + q_{23} q_{42}, & n_2 &= q_{41} (q_{22} - 1) - q_{21} q_{42}, \\ s_{jk} &= 2(q_{24} \beta_{k1}^{(j)} - q_{44} \beta_{k3}^{(j)}), & s_{jk}^0 &= c_1 \beta_{k1}^{(j)} + 2\bar{\Phi}_{yx} \beta_{k3}^{(j)}, \\ s_{jk}^\pm &= (c_* \pm q_{33}^0 \bar{\Delta}_{xy})/2, & q_{33}^0 &= 1 - (q_{33} + \tilde{q}_{22})/2, \\ \tilde{\mu}_{10} &= s_{11}^0, & \tilde{\mu}_{11} &= s_{12}^0, & \tilde{\mu}_{12} &= -(\beta_{22}^{(1)} s^+ + 2\alpha_0 a \tilde{\mu}_{11}), \\ \tilde{\mu}_{22} &= s_{22}^0, & \tilde{\mu}_{32} &= c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(1)}, & \tilde{\mu}_{21} &= \beta_{22}^{(2)} s^+ - 2\alpha_0 a s_{22}^0, \\ \tilde{\mu}_{31} &= \tilde{\beta}_{22}^{(1)} s^- - 2\tilde{\alpha}_0 a c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(1)}, & \tilde{\mu}_{32} &= c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(1)}, & \tilde{\mu}_{40} &= s_{31}^0, \\ \tilde{\mu}_{41} &= s_{32}^0, & \tilde{\mu}_{42} &= -(\beta_{22}^{(3)} s^+ + 2\alpha_0 a s_{32}^0), \\ \tilde{\mu}_{51} &= c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(2)}, & \tilde{\mu}_{52} &= \tilde{\beta}_{22}^{(2)} s^- - 2\tilde{\alpha}_0 a c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(2)}, \end{aligned}$$

h – товщина включення. Невідомі сталі c_1, c_* і величини $\bar{\Delta}_{xy}, \bar{\Phi}_{yx}$ визначаємо із умов (5), (6), (10), (26), які можна подати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{a}{3} \tilde{\mu}_{10} + \mathfrak{x}_1 (a s_{12}^0 - \alpha_0 \beta_{22}^{(1)} s^+) &= \frac{\bar{M}_{21}}{4a^2}, \\ \beta_{22}^{(2)} s^+ - \alpha_0 a s_{22}^0 &= \frac{\bar{P}_{21}}{4\mathfrak{x}_1 a}, \quad \mathfrak{x}_1 = \frac{2\pi\alpha_0}{\lambda_0}, \\ \tilde{\beta}_{22}^{(1)} s^+ - \alpha_0 a c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(1)} &= -\frac{\bar{P}_{21}}{4\tilde{\mathfrak{x}}_1 a}, \quad \tilde{\mathfrak{x}}_1 = \frac{2\pi\tilde{\alpha}_0}{\tilde{\lambda}_0}, \\ \frac{a}{3} \tilde{\mu}_{10} + \mathfrak{x}_1 (a s_{32}^0 - \alpha_0 \beta_{22}^{(3)} s^+) + \tilde{\mathfrak{x}}_1 (c_1 \tilde{\beta}_{11}^{(2)} + \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_{22}^{(2)} s^-) &= 0.\end{aligned}$$

Для величин δ_z, ϕ_z мають місце формули

$$\delta_z = -\frac{P_3(\beta_{11}^{(3)} + \beta_{21}^{(3)}\mathfrak{x}_1)}{2\pi a \mathfrak{x}_1}, \quad \phi_z = \frac{M_3 \tilde{q}_{21}}{16\pi a^3 \tilde{\mathfrak{x}}_1 (1 - \tilde{q}_{22})}. \quad (34)$$

Розвинення (33) та інтегральні співвідношення для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [5] дозволяють записати вирази для напружень у площині з'єднання півпросторів при $\rho > a$:

$$\begin{aligned}\sigma_z \Big|_{z=0} &= \frac{2q_{14}}{\pi} \int_0^a \frac{t \eta_{20}(t) - 2\rho \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \eta_{21}(t))}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt + v_1^*(\rho, \varphi), \\ (\tau_{z\rho} + i\tau_{z\phi}) \Big|_{z=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\tau_0(\rho, t, \varphi)}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt + v_2^*(\rho, \varphi).\end{aligned} \quad (35)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}\tau_0(\rho, t, \varphi) &= \rho^2 q_{21} \eta_{20}(t) - 2t \operatorname{Re}(e^{i\varphi} (q_{21} \eta_{11}(t) - q_{23} \eta_{41}(t))) - \\ &\quad - 2it \tilde{q}_{12} \operatorname{Im} e^{i\varphi} \eta_{11}(t), \\ v_1^*(\rho, \varphi) &= \frac{8q_{12}}{\pi \rho^3} \int_0^a \frac{\operatorname{Re}(e^{i\varphi} (\eta_{21}(t) + \eta_{21}(t))) t^2}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt + \\ &\quad + q_{14} \frac{2ha^2}{\pi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^2} \mathbf{D} \left(\frac{a}{\rho} \right), \\ v_2^*(\rho, \varphi) &= \frac{2}{\pi \rho^2} \int_0^a \frac{\tau_1(\rho, t, \varphi) t}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt + \frac{1}{\pi} \left(\partial_\rho + i \frac{\partial_\varphi}{\rho} \right) \times \\ &\quad \times \int_0^a \tau_2(\rho, t, \varphi) \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - t^2}}{\rho} - 1 \right) \frac{dt}{t} + \frac{a^2}{\pi} \left(\partial_\rho + \frac{i\partial_\varphi}{\rho} \right) (e^{-i\varphi} q_{23}^+ \delta_{xy} + \\ &\quad + e^{i\varphi} q_{23}^- \bar{\delta}_{xy}) \frac{1}{\rho^2} \mathbf{D} \left(\frac{a}{\rho} \right) + \frac{2i\phi_z a}{\pi} \tilde{q}_{12} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} \mathbf{K} \left(\frac{a}{\rho} \right),\end{aligned}$$

$$\tau_1 = e^{i\varphi} (q_{23} \bar{\eta}_{11}(t) - \tilde{q}_{12} \bar{\eta}_{11}(t)) - q_{21} (\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \eta_{11}(t)) + i\rho \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \eta_{11}(t))),$$

$$\tau_2 = q_{23}^+ e^{i\varphi} (\eta_{41}(t) + \eta_{51}(t)) - q_{23}^- e^{-i\varphi} (\bar{\eta}_{41}(t) + \bar{\eta}_{51}(t)),$$

$$\mathbf{D}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \text{повні еліптичні інтеграли.}$$

Використавши результати роботи [2], неважко встановити наступні асимптотичні розвинення при $\rho \rightarrow a + 0$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{t^k \omega_{2,3}^\pm(t)}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt = \frac{a^{k-3/2}}{8^{k+1}} \left(\frac{(2\alpha_0 - 1)(2a)^{\alpha_0}}{(\rho - a)^{1/2+\alpha_0}} \pm \frac{(2\alpha_0 + 1)(2a)^{-\alpha_0}}{(\rho - a)^{1/2-\alpha_0}} + \frac{1 \mp 1}{\sqrt{\rho - a}} \right) + O(\rho^{\varepsilon-1/2-\alpha_0}).$$

На основі цих асимптотичних розвинень одержимо асимптотичні подання розв'язків при $\rho \rightarrow a + 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_z \Big|_{z=0} &= k_{11}(a - \rho)^{-1/2-\alpha_0} + k_{12}(a - \rho)^{-1/2} + k_{13}(a - \rho)^{-1/2+\alpha_0} + \\ &\quad + O(\rho^{\varepsilon-1/2-\alpha_0}), \quad \varepsilon > 0, \\ \tau_{z\rho} \Big|_{z=0} &= k_{21}(a - \rho)^{-\alpha_0-1/2} + k_{22}(a - \rho)^{-1/2} + \\ &\quad + k_{23}(a - \rho)^{\alpha_0-1/2} + O(\rho^{\varepsilon-1/2-\alpha_0}), \\ \tau_{z\varphi} \Big|_{z=0} &= k_{31}(a - \rho)^{-\tilde{\alpha}_0-1/2} + k_{32}(a - \rho)^{-1/2} + \\ &\quad + k_{33}(a - \rho)^{\tilde{\alpha}_0-1/2} + O(\rho^{\varepsilon-1/2-\tilde{\alpha}_0}). \end{aligned} \quad (36)$$

Коефіцієнти k_{jn} подамо у вигляді

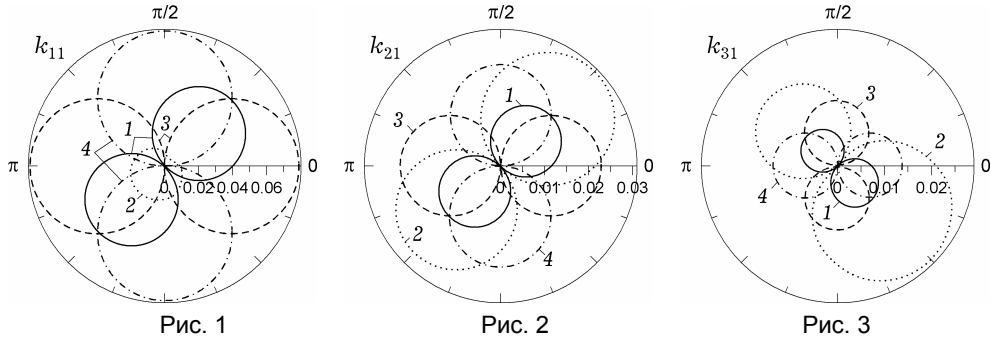
$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{q_{12}}{4\lambda_0} (2\alpha_0 - 1)(2a)^{\alpha_0-1/2} (\mu_{22} - 2 \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (\tilde{\mu}_{22}a + \tilde{\mu}_{21})]), \\ k_{13} &= -\frac{q_{12}}{2\lambda_0} (2\alpha_0 + 1)(2a)^{-\alpha_0-1/2} (\mu_{22} + 2 \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (\tilde{\mu}_{22}a + \tilde{\mu}_{21})]), \\ k_{12} &= \frac{q_{12}}{2\lambda_0} (2a)^{-1/2} (\mu_{22} - 2a \operatorname{Re} [e^{i\varphi} \tilde{\mu}_{22}]), \\ k_{32} &= -\frac{\tilde{q}_{12}}{4\tilde{\lambda}_0} (2a)^{-1/2} (\tilde{\alpha}_0 \mu_{51} - 2 \operatorname{Im} [e^{i\varphi} \tilde{\mu}_{52}]), \\ k_{21} &= \frac{2\alpha_0 - 1}{8\lambda_0} (2a)^{\alpha_0-1/2} \{ a q_{21} \mu_{12} - q_{23} \mu_{42} - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (a q_{21} \tilde{\mu}_{11} + q_{23} (a \tilde{\mu}_{41} + \tilde{\mu}_{42}))] \}, \\ k_{23} &= \frac{2\alpha_0 + 1}{8\lambda_0} (2a)^{-\alpha_0-1/2} \{ a q_{21} \mu_{12} - q_{23} \mu_{42} - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (a q_{21} \tilde{\mu}_{11} + q_{23} (a \tilde{\mu}_{41} - \tilde{\mu}_{42}))] \}, \\ k_{22} &= \frac{(2a)^{-1/2}}{2\lambda_0} \{ \lambda_0 (a q_{21} \mu_{11} - q_{23} \mu_{41}) - \\ &\quad - \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (2a q_{21} \tilde{\mu}_{10} + q_{23} (\tilde{\mu}_{42} + 2a \lambda_0 \tilde{\mu}_{40}))] \}, \\ k_{31} &= \frac{\tilde{q}_{12}}{8\tilde{\lambda}_0} (2\tilde{\alpha}_0 - 1)(2a)^{\tilde{\alpha}_0-1/2} \{ \mu_{51} (1 - \tilde{\alpha}_0) - 2 \operatorname{Im} [e^{i\varphi} (a \tilde{\mu}_{51} + \tilde{\mu}_{52})] \}, \\ k_{33} &= \frac{\tilde{q}_{12}}{8\tilde{\lambda}_0} (2\tilde{\alpha}_0 + 1)(2a)^{-\tilde{\alpha}_0-1/2} \{ \mu_{51} (1 + \tilde{\alpha}_0) - 2 \operatorname{Im} [e^{i\varphi} (a \tilde{\mu}_{51} - \tilde{\mu}_{52})] \}. \end{aligned}$$

Отже, в асимптотичному поданні напружень в околі включення містяться три доданки. Біпружні сталі α_0 і $\tilde{\alpha}_0$ згідно з нерівностями (21) задовольняють умови

$$0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}, \quad 0 < \tilde{\alpha}_0 < \frac{1}{2}.$$

У випадку однорідного простору $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 1/4$, а показники особливостей у поданнях (36) відповідно будуть $3/4, 1/2, 1/4$.

3. Аналіз результатів числового дослідження і висновки. На рис. 1–3 подано залежності коефіцієнтів відповідно k_{11}, k_{21}, k_{31} (які можна вважати узагальненнями коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)) від кута $\varphi \in [0, 2\pi)$ у полярній системі координат для комбінацій матеріалів гексогенної системи [1]: апатиту (матеріал $m1$) і берилію (матеріал $m2$), при різних значеннях векторів \mathbf{P} і \mathbf{M} . Суцільні криві 1 і точкові криві 2 на всіх рисунках відповідають значенням векторів $\mathbf{P}_1 = (1/2, 1/2, 1/2)$, $\mathbf{M}_1 = (1/2, 1/2, 1/2)$, при цьому суцільні криві побудовано для комбінації матеріалів $m1-m2$, а точкові – для комбінації матеріалів $m2-m1$. Пунктирні криві 3 і штрихпунктирні криві 4 на усіх рисунках побудовано для комбінації матеріалів $m1-m2$ відповідно при значеннях векторів $\mathbf{P}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{M}_2 = (0, 1, 0)$ і $\mathbf{P}_3 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{M}_3 = (1, 0, 0)$. При наявності в навантаженнях дотичних складових: $P_{1,2} \neq 0, M_{1,2} \neq 0$, всі три коефіцієнти k_{11}, k_{21}, k_{31} суттєво залежать від полярного кута φ . Для кожного зі значень векторів \mathbf{P} і \mathbf{M} із графіків можна визначити осі в площині включення, відносно яких значення вказаних коефіцієнтів є симетричними, а також можна визначити такі значення кута φ , при яких КІН досягають мінімального та максимального значення, що дає можливість визначити напрямки найбільшої та найменшої концентрації напружень в околі включення. Так, наприклад, при $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ і $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ (лінії 1, 2) коефіцієнти k_{11} (рис. 1) і k_{21} (рис. 2) досягають мінімального значення, близького до нуля, при кутах $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, коефіцієнт k_{31} (рис. 3) – при кутах $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Напрямки максимальних значень КІН при розглянутих навантаженнях перпендикулярні до напрямків мінімальних значень $k_{j1}, j = 1, 2, 3$. При цьому значення k_{11} виявляються значно більшими для комбінації матеріалів $m1-m2$, ніж для комбінації $m2-m1$, значення $k_{j1}, j = 2, 3$, навпаки, – значно більші для комбінації $m2-m1$.



Наведемо залежності поступальних і кругових переміщень включення від компонент векторів \mathbf{P} і \mathbf{M} , радіуса a і товщини включення h :

$$\delta_z = c_z \frac{P_3}{a} - 0.447 \cdot h, \quad \phi_z = s_z \frac{M_3}{a^3},$$

$$\delta_x + i\delta_y = c_x \frac{P_1 - iP_2}{a} + c_y \frac{M_2 - iM_1}{a^2},$$

$$\phi_y + i\phi_x = s_x \frac{P_1 - iP_2}{a^2} + s_y \frac{M_2 - iM_1}{a^3}.$$

Коефіцієнти в цих формулах та біпружні сталі α_0 і $\tilde{\alpha}_0$ для комбінації матеріалів $m1$ – $m2$ приймають значення

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.328, & \tilde{\alpha}_0 &= 0.316, \\ c_z &= 1.613 \cdot 10^{-11}, & c_x &= -8.169 \cdot 10^{-11}, & c_y &= 3.975 \cdot 10^{-11}, \\ s_x &= -2.257 \cdot 10^{-11}, & s_z &= -6.754 \cdot 10^{-12}, & s_y &= 2.093 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Для комбінації матеріалів $m2$ – $m1$ одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.155, & \tilde{\alpha}_0 &= 0.203, \\ c_z &= 2.352 \cdot 10^{-11}, & c_x &= -2.783 \cdot 10^{-11}, & c_y &= 3.506 \cdot 10^{-12}, \\ s_z &= -2.473 \cdot 10^{-12}, & s_x &= -4.971 \cdot 10^{-14}, & s_y &= 1.699 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Отже, при змішаних умовах на гранях включення заміна місцями пів-просторів істотно впливає на концентрацію напружень в околі включення і на значення поступальних і кругових переміщень включення.

Аналогічно можуть бути отримані розв'язки задач про інші види дефектів, наприклад, про частково відшаровані включення.

1. Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, вып. 2. – С. 289–314.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
4. Кривий О. Ф. Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 173–183.
5. Кривий О. Ф. Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 23–35.
Te same: Kryvyy O. F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531.
6. Кривий О. Ф. Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–65.
7. Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
Te same: Krivoi A. F., Popov G. Ya. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 6. – P. 626–634.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
9. Назаров С. А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. математика и механика. – 1998. – **62**, № 5. С. 957–962.
10. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
11. Свекло В. А. Задача типа Бусинеска для анизотропного полупространства // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 5. – С. 908–913.
12. Силованюк В. П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
13. Barber J. R., Ting T. C. T. Three-dimensional solutions for general anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. – 2007. – **55**. – P. 1993–2006.
14. Bigoni D., Serkov S. K., Valentini M., Movchan A. B. Asymptotic models of dilute composites with imperfectly bonded inclusions // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 24. – P. 3239–3258.
15. Fabrikant V. I. A new form of the Green function for a transversely isotropic body // Acta Mecanica. – 2004. – **167**, No. 2. – P. 101–111.

16. Hasegawa H., Kisaki M. The stress field caused by a circular cylindrical inclusion in a transversely isotropic elastic solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, No. 6. – P. 825–831.
17. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 317–335.
18. Hu H. C. On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Phys. Sinica. – 1953. – **9**, No. 2. – P. 130–144.
19. Kryvyy O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 387–398.
20. Monastyrskyy B., Kaczyński A. Contact interaction of two elastic half-spaces with circular recess // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 47–57.
21. Pan E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic elastic bimaterials with imperfect interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, No. 2. – P. 180–190.
22. Phan A. V., Gray L. J., Kaplan T. Residue approach for evaluating the 3D anisotropic elastic Green's function: multiple roots // Eng. Anal. with Boundary Elements. – 2005. – **9**, No. 6. – P. 570–576.
23. Willis J. R. The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1972. – **25**. – P. 368–385.
24. Willis J. R. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – **6**, No. 5. – P. 253–263.
25. Xian-Fang Li, Tian-You Fan. The asymptotic stress field for a rigid circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **40**, No. 2. – P. 331–342.
26. Yuan F. G., Yang S., Yang B. Three-dimensional Green's functions for composite laminates // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **38**. – P. 8019–8035.

МЕЖФАЗНОЕ КРУГОВОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Задача о круговом абсолютно жестком включении произвольной формы, находящемся в условиях полного сцепления с одним трансверсально-изотропным пространством и в условиях гладкого контакта – с другим, сведена к системе двумерных сингулярных интегральных уравнений. Получены решения указанной системы в явном виде, что позволило определить поля напряжений и смещений в окрестности включения при произвольном нагружении. Получены зависимости поступательных и круговых перемещений включения от равнодействующих нагружения, главных моментов и упругих свойств полупространств. Исследована асимптотика напряжений в окрестности включения и определены направления наибольшей и наименьшей концентрации напряжений.

INTERFACE CIRCULAR INCLUSION UNDER THE MIXED INTERACTION CONDITIONS WITH PIECE-WISE HOMOGENEOUS TRANSVERSELY-ISOTROPIC SPACE

The problem about a circular absolutely rigid inclusion of arbitrary form, which is under the full cohesion condition with one transversely-isotropic semi-space and under the smooth contact with another ones, is reduced to a systems of 2D singular integral equations. The exact solutions of this systems are obtained, which allows determining the fields of stresses and displacements in the vicinity of inclusion under arbitrary loading. The dependences of translational and circular displacements of inclusion on the resultant loadings, the principal moments and elastic properties of semi-spaces are obtained. The stress asymptotes in the vicinity of inclusion are investigated and the directions for the maximum and minimum stress concentrations are determined.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
18.03.11