

РОЗВИТОК ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ВІД МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ РОЗДІЛУ ДВОХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ

В умовах плоскої деформації методом Вінера–Гопфа виконано розрахунок зони передруйнування, що прилягає до кутової точки межі розділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Зона моделюється відрізком розриву нормального переміщення. Досліджено залежність довжини зони передруйнування та її розкриття у кутовій точці від навантаження, кута зламу межі розділу і пружних параметрів середовищ. На основі деформаційного критерію досліджено умови зрушення тріщини.

Відповідно до сучасних уявлень про руйнування крихких тіл перед фронтом тріщини утворюється зона передруйнування, яка є областю послаблених міжчастинкових зв'язків. Після досягнення деякої граничної відстані між окремими шарами матеріалу в зоні передруйнування сили зчеплення між ними не можуть протистояти розтягувальному напруженню: відбувається розрив зв'язків, що приводить до поширення тріщини.

Визначення умов зрушення міжфазних тріщин у кусково-однорідних тілах становить значний інтерес для механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань, будівельних матеріалів і конструкцій. Проте переважна більшість робіт з цієї теми присвячена тріщинам, розташованим на плоскій межі розділу середовищ [10, 14, 21]. У той же час недостатньо досліджено виявляється більш загальна задача про міжфазну тріщину, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу середовищ.

Кутова точка межі розділу двох різних середовищ є концентратором напружень зі степеневу сингулярністю [6], порядок якої визначається найменшим на інтервалі $(-1, 0)$ коренем відповідного характеристичного рівняння. Поширення міжфазної тріщини з кутової точки істотно змінює характер напружено-деформованого стану (НДС) в околі вершини кута, зокрема, на певних інтервалах кута зламу межі розділу середовищ характеристичне рівняння може мати комплексно спряжені корені, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції напружень і переміщень [2, 17]. Кожному кореню з інтервалу $(-1, 0)$ відповідає сингулярний член у розвиненні напружень в асимптотичні ряди в околі кутової точки. Найчастіше, досліджуючи тонку структуру вершини тріщини, обмежуються одним – найбільшим членом асимптотичного розвинення.

Концентрація напружень у кутовій точці приводить до появи в її околі зони передруйнування. На початковій стадії, коли її розмір значно менший від довжини тріщини, конфігурація зони передруйнування суттєво залежить від характеру НДС поблизу вершини тріщини, який визначається асимптотичним розв'язком аналогічної задачі без зони передруйнування. В роботах [4, 5, 11, 13] виконано розрахунок модельних зон передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу двох різних середовищ. У [3] здійснено розрахунок початкової зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних матеріалів з урахуванням в асимптотичному розвиненні напружень лише одного доданка зі степеневу особливістю. У той же час залишились недослідженими діапазони кутів зламу, яким відповідають осцилюючі сингулярні доданки у розвиненні напружень.

Мета цієї роботи полягає в розрахунку зони передруйнування на повному інтервалі кутів зламу та дослідженні її впливу на умови зрушення тріщини, а також у перевірці обґрунтованості нехтування сингулярними доданками нижчого порядку у розвиненні напружень в околі кутової точки.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про розрахунок початкової зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини, яка поширюється з кутової точки по межі розділу двох пружних середовищ з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Використовуючи відому δ_c -модель [8], зону передруйнування моделюватимемо розрізом, протилежні береги якого притягуються сталими напруженнями σ_0 . На розрізі допускається стрибок лише нормальної складової переміщення, стрибком дотичного переміщення нехтуємо.

На початковому етапі розвитку довжина ℓ зони передруйнування значно менша від довжини L тріщини і всіх інших розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною, що складається із двох клинів з межею розділу у формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінченна тріщина, вздовж іншої – лінія розриву нормального переміщення (рис. 1).

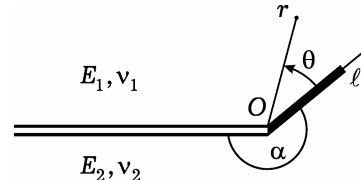


Рис. 1

На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без зони передруйнування. Цей розв'язок визначається коренями характеристичного рівняння λ_i , дійсні частини яких лежать в інтервалі $(-1, 0)$. Характеристичне рівняння має вигляд [2]

$$D(\lambda) = 0, \tag{1}$$

де

$$D(\lambda) \equiv -(1 + \alpha_1)^2 t_1 - 4(1 + \alpha_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \alpha_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \alpha_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Результати числового аналізу рівняння (1) наведено на рис. 2. Обчислення виконано для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, суцільні криві відповідають значенням відношень $E_1/E_2 = 0.1$, штрихові – $E_1/E_2 = 0.25$, штрихпунктирні – $E_1/E_2 = 0.5$. Коренів λ_i з дійсними частинами в інтервалі $(-1, 0)$ може бути два або три (див. рис. 2). Відповідно поведінку напружень в околі вершини кута визначатимуть два або три сингулярні доданки. При цьому існує інтервал кутів зламу $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, для яких рівняння (1) має у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ два комплексно спряжені корені. Значення $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ для різних відношень модулів пружності середовищ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ наведено у табл. 1.

Нижче при розрахунках параметрів зони передруйнування розрізнятимемо випадки наявності лише дійсних або дійсних і комплексних коренів характеристичного рівняння.

Таблиця 1. Інтервал кутів зламу межі розділу середовищ, яким відповідають комплексні корені рівняння (1) у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$.

E_1/E_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268

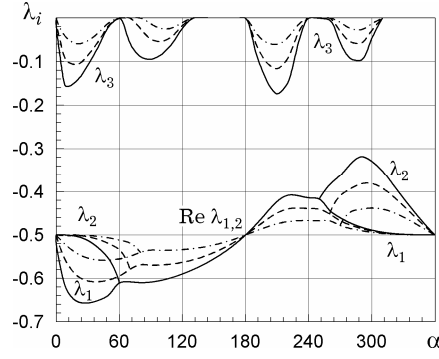


Рис. 2. Залежність показника сингулярності напружень λ_i від кута α зламу межі розділу середовищ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

Припускаючи, що береги тріщини вільні від навантаження, з урахуванням моделювання зони передруйнування відрізком розриву нормального переміщення приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \theta = 0 : & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, & \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = -\alpha : & \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 2\pi - \alpha : & \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r < \ell, & \quad \sigma_\theta(r, 0) = \sigma_0, \\ \theta = 0, \quad r > \ell, & \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \sigma_\theta = \sum_i C_i F(\lambda_i) r^{\lambda_i} + o(1/r), \quad (4)$$

де $\langle f \rangle$ – стрибок величини f ;

$$F(\lambda) = \frac{1}{X} \frac{e(1 + \alpha_2)}{\Delta} [2t_1 \psi_1 + e(1 + \alpha_2)((\lambda + 2)\psi_2 - \psi_3)],$$

$$X = 4 \sqrt{\frac{2\pi(1 + e\alpha_2)}{(e + \alpha_1)}},$$

$$\psi_1 = \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)[(e - 1)\lambda - (1 + \alpha_1)] - (e - 1)(\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_2 = 2\lambda \sin^2 \alpha \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + \cos(\lambda + 2)\alpha \sin 2\lambda\pi - \sin \lambda(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_3 = \sin \lambda \alpha [\lambda \cos 2\lambda\pi + 2 \cos(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)],$$

$$\Delta = e(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)t_6 - \frac{1}{2} e^2 (1 + \alpha_2)^2 t_7 +$$

$$+ 2e(1 + \alpha_2)(e - 1)(\lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \cdot t_8 + \sin \lambda \alpha \cdot t_9),$$

$$t_6 = \lambda \sin \alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin \lambda \alpha \cos 2\lambda\pi,$$

$$t_7 = (\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha),$$

$$t_8 = (\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_9 = (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\alpha.$$

Гранична умова на нескінченності (4) містить сталі C_i , які характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і які вважаємо заданими за умовою задачі. Припускаємо, що на межі розділу діє розтягувальне нормальне напруження $\sigma_0 > 0$, яке забезпечує відривні деформації, необхідні для утворення зони передруйнування. Проте у випадку комплексних коренів λ_i рівняння (1) ця умова не може бути виконана внаслідок осцилюючої поведінки напружень при наближенні до вершини тріщини, але, як показує досвід численних досліджень міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це не перешкоджає отримувати фізично коректні результати на певній відстані від кутової точки.

Біля кінця зони передруйнування для напружень і переміщень реалізується асимптотика, яка є асимптотично найбільшим розв'язком однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, що містить на плоскій межі розділу середовищ півнескінченну пряму лінію розриву нормального переміщення. Зокрема, має місце асимптотика:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \ell + 0: \quad \sigma_\theta \sim \frac{\alpha_1 + 1 + e(1 + \alpha_2)}{2(e + \alpha_1)} \cdot \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(r - \ell)}}, \quad (5)$$

де k_I – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який необхідно знайти в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від вихідної тим, що замість першої з умов (3) використовуємо умову

$$\theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 - \sum_i C_i F(\lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad (6)$$

а на нескінченності напруження спадають швидше, ніж $1/r$. Друга задача – аналогічна задача без зони передруйнування, розв'язок якої відомий [2, 3], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Розв'язок рівняння Вінера – Гопфа. Для побудови розв'язку першої задачі використовуємо метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [7, 9]. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука та крайових умов (2) перетворення Мелліна та врахувавши другу з умов (3) та умову (6), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа у комплексній області, що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma_0}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} = -A \operatorname{tg} p\pi G(p) \Phi^-(p), \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2, \quad (7)$$

де

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho\ell, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho\ell, \theta=0} \rho^p d\rho,$$

$$G(p) = \frac{(1 + \alpha_1) D_1(p) \cos p\pi}{AD(-1 - p) \sin p\pi}, \quad A = \frac{(1 + \alpha_1)[e + \alpha_1 + 1 + e\alpha_2]}{2(e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)},$$

$$D_1(p) = e(1 + \alpha_2)\Delta_1\Delta_2 - (1 + \alpha_1)\Delta_3\Delta_4,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа.

Функція $G(it)$ є дійсною додатною парною функцією t , яка прямує до 1 при $t \rightarrow \pm\infty$, тому можна факторизувати $G(p)$ за формулою Гахова [1]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases}$$

Враховуючи також факторизацію $\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{\mathcal{K}^+(p)\mathcal{K}^-(p)}$, $\mathcal{K}^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$ ($\Gamma(p)$ – гамма-функції Ейлера), рівняння (7) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{K}^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\frac{\mathcal{K}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \\ - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} \left[\frac{\mathcal{K}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} \right] = \\ = - \frac{A\Phi^-(p)}{\mathcal{K}^-(p)G^-(p)} + \frac{\sigma_0 \mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)(p+1)} - \\ - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(p + \lambda_i + 1)(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)}, \quad \operatorname{Re} p = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ліва частина рівняння (8) – функція, аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а права – у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Тоді відповідно з принципом аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах.

З (5) за допомогою теореми абелевого типу [7] отримаємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{x_1 + 1 + e(1 + x_2)}{2(e + x_1)} \cdot \frac{k_l}{\sqrt{-2p\ell}}, \quad p \rightarrow \infty, \quad (9)$$

звідки випливає, що ліва і права частини рівняння (8) на нескінченності перетворюються в нуль. Тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулеві у всій комплексній площині змінної p , що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (8):

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) = - \frac{pG^+(p)}{\mathcal{K}^+(p)} \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\frac{\mathcal{K}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i}}{(p + \lambda_i + 1)} \left[\frac{\mathcal{K}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} p < 0, \\ \Phi^-(p) = \frac{\mathcal{K}^-(p)G^-(p)}{A} \left\{ \frac{\sigma_0 \mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)(p+1)} - \right. \\ \left. - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(p + \lambda_i + 1)(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Розрахунок зони передруйнування. Відповідно до отриманого розв'язку (10) рівняння Вінера – Гопфа має місце асимптотика:

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} - \frac{\sigma_0 \mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)} \right\}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Порівнюючи цей вираз з (9), знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці зони передруйнування:

$$k_I = \sqrt{2\ell} \frac{2(e + x_1)}{x_1 + 1 + e(1 + x_2)} \left\{ \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} - \frac{\sigma_0 \mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)} \right\}.$$

Приймаючи далі умову обмеженості напружень в кінці зони передруйнування, покладемо, що $k_I = 0$, та отримаємо наступні трансцендентні рівняння для визначення її довжини $x = \ell/L$ (в одиницях довжини тріщини) в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (1) у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$:

а) якщо характеристичне рівняння має два або три дійсні корені, то йому відповідає рівняння для x вигляду

$$\sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) x^{\lambda_i} = \frac{N(0)}{\sigma}, \quad (11)$$

де

$$n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}}, \quad N(\lambda) = \frac{\mathcal{K}^+(-\lambda - 1)}{(\lambda + 1)G^+(-\lambda - 1)}, \quad \sigma = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\sigma_0};$$

б) якщо ж характеристичне рівняння має два комплексно спряжені ($\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$, $C_1 = \bar{C}_2 = (K_I + iK_{II})/\sqrt{2\pi} L^{i\lambda_m}$) і один або жодного дійсного кореня, то рівняння для x набуває вигляду

$$x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi) + n_3 M x^{\lambda_3} = \frac{S}{\sigma}, \quad (12)$$

де

$$\varphi = \arg(F(\lambda_1)), \quad \xi = \arg(N(\lambda_1)), \quad \psi = \arctg n, \quad n = \frac{K_{II}}{K_I},$$

$$\sigma = \frac{|K| L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi} \sigma_0}, \quad n_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3 L^{\lambda_3}}{|K| L^{\lambda_r}},$$

$$M = \frac{F(\lambda_3)N(\lambda_3)}{2|F(\lambda_1)||N(\lambda_1)|}, \quad S = \frac{N(0)}{2|F(\lambda_1)||N(\lambda_1)|}.$$

Тут, згідно з широко вживаною в теорії міжфазних тріщин термінологією, введено комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень $K = K_I + iK_{II}$ і фазовий кут ψ , який характеризує ступінь змішування мод навантаження, хоч K_I і K_{II} через асиметрію досліджуваного тіла не можна вважати за КІН нормального відриву і поперечного зсуву [16].

Результати числових розрахунків довжини зони передруйнування наведено на рис. 3 і рис. 4. Згідно з обчисленнями, довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у рівняння через безрозмірний параметр σ і множники n_i , що характеризують відносний внесок різних коренів характеристичного рівняння і залежать від конфігурації навантаження та будови досліджуваного кусково-однорідного тіла. Довжина зони передруйнування тим більша, чим менша адгезія складових матеріалів.

Зазначимо, що всі обчислення графіків, наведених на рис. 3–8, як і на рис. 2, виконано при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

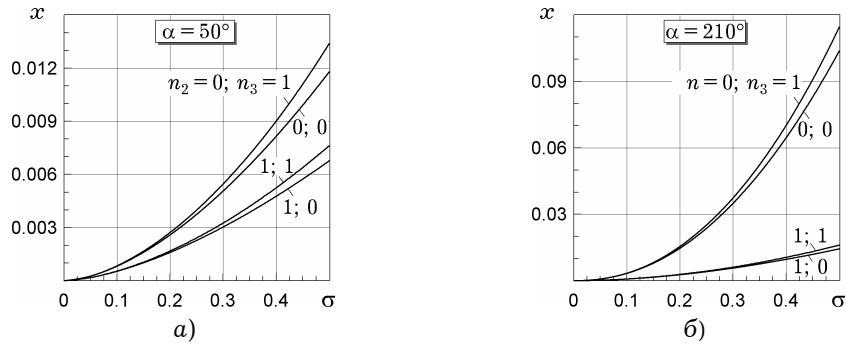


Рис. 3. Залежність довжини зони передруйнування x від безрозмірного параметра навантаження σ при $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

Розрахунки показують істотний вплив на обчислену довжину зони доданка, що відповідає кореню λ_2 , а також значно менший внесок доданка, що відповідає кореню λ_3 . Наявність такого впливу не є несподіваною. Він зумовлений тим, що зшивання розв'язків внутрішньої і зовнішньої задач здійснюється через асимптотики зовнішнього розв'язку, подані у напруженні (4) сумою сингулярних доданків з різними показниками сингулярності. При цьому зшивання розв'язків здійснюється на відстанях, набагато більших від розміру зони передруйнування, де відмінність внесків сингулярних доданків з різними показниками менша, ніж в області її виникнення.

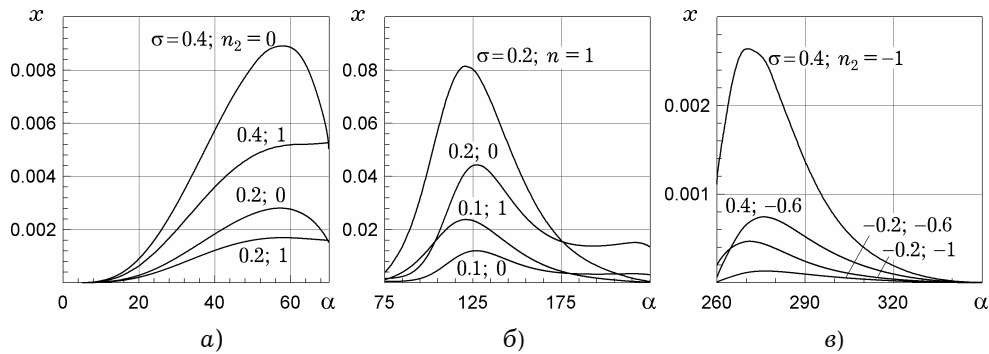


Рис. 4. Залежність довжини зони передруйнування x від кута зламу α межі розділу середовищ при $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $n_3 = 0$.

Згідно з рис. 3б і рис. 4б, на розмір зони передруйнування впливає конфігурація навантаження, яка задається в рівнянні (12) параметром змішування мод n . Як бачимо на рис. 4, довжина зони передруйнування істотно залежить від кута зламу α межі розділу середовищ, причому існують кути, що залежать від конфігурації навантаження, при яких розмір зони передруйнування є максимальним, тобто відповідна орієнтація прикладених до тіла зовнішніх сил сприяє розвитку зони передруйнування і, отже, подальшому поширенню тріщини.

Оцінимо похибку обчислення довжини зони передруйнування внаслідок нехтування доданками з сингулярними членами нижчого порядку при кутах, близьких до α_{\min} або α_{\max} , коли $\lambda_1 \approx \lambda_2$ та $C_1 \approx C_2$. Нехтування в (11)

другим і третім доданками приводить до рівняння $F(\lambda_1)N(\lambda_1)x_1^{\lambda_1} \approx \frac{N(0)}{\sigma}$, а нехтування тільки третім доданком – до рівняння $2F(\lambda_1)N(\lambda_1)x_2^{\lambda_1} \approx \frac{N(0)}{\sigma}$.

Звідси випливає, що точнішим є значення $x_2 \approx 2^{-1/\lambda_1} x_1$, і, оскільки $-0.7 \leq$

$\leq \lambda_1 \leq -0.3$, то очікуване значення x_2 виявляється відповідно в декілька разів більшим від x_1 ($2.7x_1 \leq x_2 \leq 10x_1$). Проте чим більша різниця між λ_1 і λ_2 та λ_3 , тим меншим буде внесок у довжину зони передруйнування доданків, що відповідають кореням характеристичного рівняння λ_2 і λ_3 .

Розкриття зони передруйнування і зрушення тріщини. Отриманий вище розв'язок рівняння Вінера – Гопфа можна використати для знаходження розкриття зони передруйнування в околі вершини тріщини. Дійсно, з визначення (7) трансформанти $\Phi^-(p)$ маємо для шуканого розкриття – стрибка нормального переміщення $\langle u_0(0,0) \rangle$ – таке співвідношення:

$$\delta = -\frac{4(1 - \nu_1^2)\ell}{E_1} \Phi^-(0).$$

Використовуючи (10)–(12), знаходимо наступні вирази для розкриття:

а) якщо рівняння (1) має тільки дійсні корені в інтервалі $(-1, 0)$, тоді

$$\delta = -\frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G(0)}} \sigma \sigma_0 \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} x^{\lambda_i+1}; \quad (13)$$

б) при наявності комплексних коренів рівняння (1) маємо

$$\delta = -\frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G(0)}} \sigma \sigma_0 \left[2 |F(\lambda_1)| |N(\lambda_1)| \left| \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} \right| x^{\lambda_r+1} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi + \zeta) + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} x^{\lambda_3+1} \right], \quad (14)$$

де

$$G(0) = \frac{1 + \alpha_1}{A\pi} \frac{e(1 + \alpha_2)g_1(\sin 2\alpha - 2\alpha) - (1 + \alpha_1)g_2(\sin 2\alpha + 2(2\pi - \alpha))}{2e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1)(g_2 + 2\alpha\pi) - e^2(1 + \alpha_2)^2 g_1 - (1 + \alpha_1)^2 g_2},$$

$$g_1 = \sin^2 \alpha - (2\pi - \alpha)^2, \quad g_2 = \sin^2 \alpha - \alpha^2, \quad \zeta = \arg \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}.$$

Розрахунки зведеного розкриття зони передруйнування

$$\delta' = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)\sigma_0} \frac{\delta}{L}$$

подано на рис. 5 і рис. 6. При одному й тому ж навантаженні розкриття δ' істотно залежить від кута зламу межі розділу середовищ, досягаючи декількох максимумів при кутах, близьких до 40° , 120° і 275° .

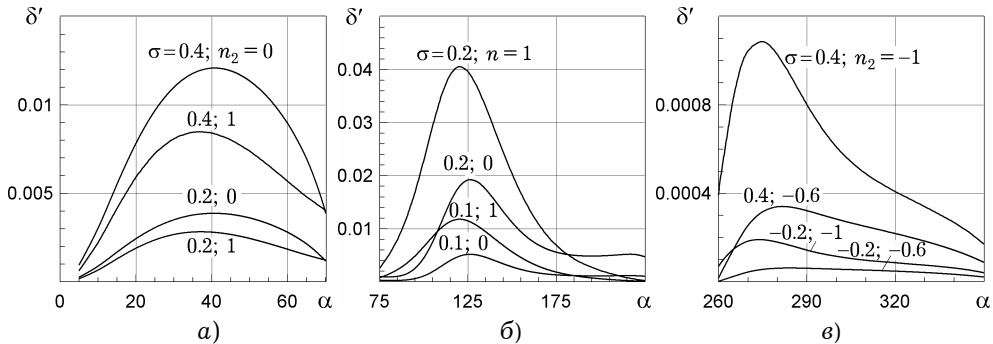


Рис. 5. Залежність зведеного розкриття тріщини δ' від кута зламу α межі розділу середовищ при $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $n_3 = 0$.

Порівнюючи рис. 4 і рис. 5, відзначимо кореляцію між довжиною і розкриттям зони передруйнування, хоч існує невелика відмінність кутів, на які припадають їх максимуми. Привертає увагу також те, що довжина і розкриття зони передруйнування є дуже малими при кутах, близьких до α_{\min} і α_{\max} , при яких змінюється характер коренів рівняння (1), так що за таких кутів зламу можна очікувати максимальну міцність з'єднання.

Розкриття зони передруйнування залежить від відношення модулів Юнга матеріалів з'єднаних частин тіла (рис. 6), проте ця залежність є менш вагомою порівняно із залежністю від кута зламу та навантаження. Існування ж залежності δ' від відношення E_1/E_2 пов'язане з різною деформованістю з'єднаних матеріалів.

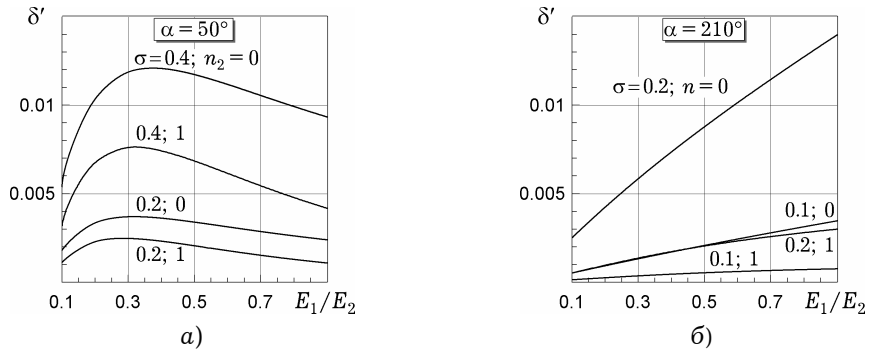


Рис. 6. Залежність розкриття тріщини δ' від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів E_1/E_2 при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $n_3 = 0$.

Відповідно до δ_c -моделі [8], зрушення тріщини відбувається при досягненні в околі її вершини критичного значення розкриття (КРТ), яке для однорідного матеріалу є характеристикою його тріщиностійкості. У випадку міжфазної тріщини КРТ залежить не лише від властивостей з'єднаних матеріалів, але й від властивостей адгезійного шару. В останні роки широкої популярності набула модель когезійної зони [12, 15, 18–20], у якій розглядається поширення міжфазної тріщини у з'єднувальному матеріалі з урахуванням модельної залежності «сила зчеплення – розділення», що зв'язує напруження у когезійній зоні зі стрибком переміщення. В моделі використовуються два параметри – критичні значення стрибків нормального δ_n і дотичного δ_t переміщень, які використовуються для задання зрушення тріщини. Модель зони передруйнування, що розглядається у цій роботі, припускає стрибок лише нормального переміщення, тому приймемо, що зрушення тріщини відбувається після досягнення стрибком нормального переміщення у зоні передруйнування у кутовій точці критичного значення δ_n . Прирівнюючи знайдене вище розкриття зони (13) або (14) до її критичного значення, можна визначити відповідне значення граничного навантаження σ_k , при якому відбувається зрушення тріщини.

На рис. 7 і рис. 8 наведено результати розрахунку залежності граничного параметра навантаження $\sigma_k = C_{1k} L^{\lambda_1} / \sigma_0$ ($\sigma_k = |K_k| L^{\lambda_r} / \sqrt{2\pi} \sigma_0$ – у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння) від зведеної довжини тріщини $L' = \frac{4(1 - \nu_1^2) \sigma_0 L}{E_1 \delta_n}$ і кута зламу межі розділу середовищ.

Згідно з рис. 7, величина граничного навантаження швидко спадає при збільшенні довжини тріщини. Як і слід було очікувати, σ_k виявляється тим меншим, чим меншим є критичне розкриття зони передруйнування δ_n .

На рис. 8 бачимо, що граничне навантаження слабо залежить від кута зламу межі розділу середовищ, за винятком кутів, близьких до α_{\min} і α_{\max} , що узгоджується із залежністю довжини зони від кута зламу. З аналізу кривих на рис. 7а випливає, що нехтування в (13) доданком з n_2 може призвести до заниження очікуваного граничного навантаження до 25%, у той же час вплив на величину σ_k доданка з n_3 є незначним.

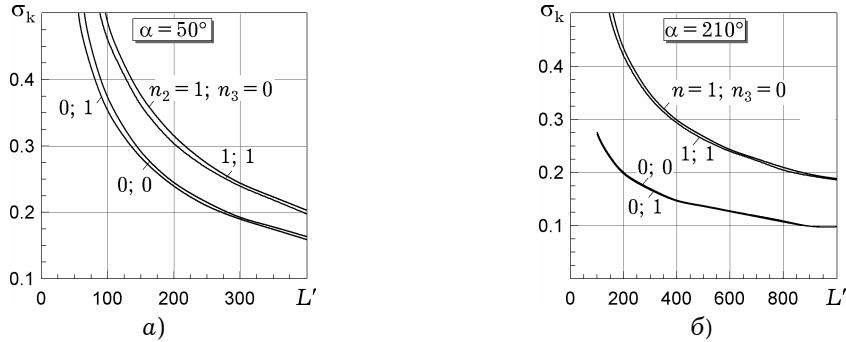


Рис. 7. Залежність граничного навантаження σ_k від зведеної довжини тріщини L' при $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

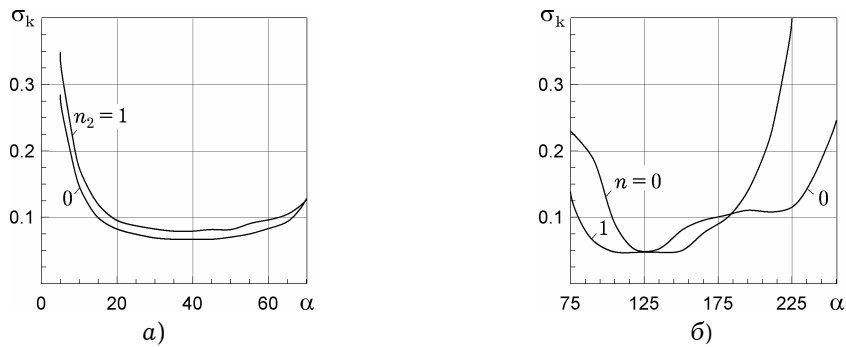


Рис. 8. Залежність граничного навантаження σ_k від кута зламу α межі розділу середовищ при $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $n_3 = 0$.

Зазначимо, що розглянута модель зрушення тріщини реалізується при виконанні покладеної в основу розв'язання задачі умови, що розмір зони залишається набагато меншим, ніж довжина тріщини, і тому стосується руйнування тіл з малорозвиненою зоною передруйнування при будь-якому рівні навантаження аж до руйнівного.

Висновки. Методом Вінера – Гопфа в умовах плоскої деформації знайдено розв'язок задачі про розрахунок зони передруйнування у адгезійному шарі на межі розділу двох пружних ізотропних матеріалів у кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу. Отримано рівняння для визначення довжини зони та її розкриття у кутовій точці. Досліджено їх залежність від параметрів з'єднаних матеріалів, величини і конфігурації навантаження та кута зламу межі поділу матеріалів. Виявлено кореляцію між довжиною зони передруйнування і її розкриттям. На основі деформаційного критерію досліджено залежність граничного навантаження від довжини тріщини і кута зламу межі розділу середовищ. Встановлено кути зламу, при яких очікується максимальна міцність з'єднання. Разом з тим, вимагає окремого вивчення можливість розвитку зони передруйнування і подальшого розвитку тріщини поза межею розділу в одному із з'єднаних матеріалів.

Результати дослідження засвідчили, що вплив сингулярних членів нижчого порядку у розвиненнях напружень в околі вершини тріщини може бути за певних умов досить істотним, тому нехтування ними, що, як правило, роблять при розв'язуванні задач лінійної механіки руйнування, може призвести до істотних похибок в оцінюванні граничних навантажень, які ведуть до руйнування композиційних матеріалів і конструкцій.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Діхтяренко Ю. В. Особливості напруженого стану в околі кутової точки межі розділу середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина / Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Материалы XIX Междунар. науч. школы. – Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2009. – С. 98–100.
3. Дудик М., Діхтяренко Ю. Про модель зони передруйнування у кутовій точці межі розділу середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 285–288.
4. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А., Дудик М. В. О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
5. Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 111–119.
 Те саме: Kamins'kyi A. O., Kipnis L. A., Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Investigation of the prefracture zone at the tip of a mode I crack reaching a nonsmooth interface of an elastic media // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 128–139.
6. Луцки О. Н. О поведении корней уравнения, определяющего особенность напруженного состояния в окрестности вершины составного клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 5. – С. 82–92.
7. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит. – 1962. – 279 с.
8. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
10. Bjerken C., Persson C. A numerical method for calculating stress intensity factors for interface cracks in bimetals // Eng. Fract. Mech. – 2001. – **68**. – P. 235–246.
11. Dudik M. V., Kipnis L. A., Pavlenko A. V. Analysis of plastic slip lines at the tip of a crack terminating at the interface of different media // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 2. – С. 197–202.
 Те саме: Дудик М. В., Кіпніс Л. А., Павленко А. В. Расчёт пластических линий скольжения в конце трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 90–95.
12. Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimetals // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**. – P. 1805–1817.
13. Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Dudik M. V. Initial development of the prefracture zone near the tip of a crack reaching the interface between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 2. – С. 176–182.
 Те саме: Каминский А. А., Кипнис Л. А., Дудик М. В. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 74–81.
14. Nakatani A., Drugan W. J., Van der Gissen E., Needleman A. Crack tip fields at a ductile single crystal-rigid material interface // Int. J. Fract. – 2003. – **122**. – P. 131–159.
15. Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1987. – **54**. – P. 525–531.
16. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 98–103.
17. Theocaris P. S., Gdoutos E. E. Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 6. – P. 763–773.

18. *Tvergaard V.* Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids // *Eng. Fract. Mech.* – 2003. – **70**. – P. 1859–1868.
19. *Tvergaard V.* Predictions of mixed mode interfacial crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 2004. – **52**. – P. 925–940.
20. *Tvergaard V., Hutchinson J. W.* The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1992. – **40**. – P. 1377–1397.
21. *Yang Q. S., Peng X. R., Kwan A. K. H.* Strain energy release for interfacial cracks in hybrid beams // *Mech. Research Commun.* – 2006. – **33**. – P. 796–803.

**РАЗВИТИЕ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ОТ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ
В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ УПРУГИХ СРЕД**

В условиях плоской деформации методом Винера – Хопфа выполнен расчет зоны предразрушения вблизи угловой точки границы раздела двух различных упругих сред, из которой выходит межфазная трещина. Зона моделируется отрезком разрыва нормального смещения. Исследована зависимость длины зоны предразрушения и ее раскрытия в угловой точке от нагрузки, угла раствора границы раздела и упругих параметров сред. На основе деформационного критерия исследованы условия сдвига трещины.

**DEVELOPMENT OF PREFRACTURE ZONE FROM INTERFACIAL CRACK
AT THE ANGULAR POINT OF INTERFACE OF TWO ELASTIC MEDIA**

The calculation of the prefracture zone near the angular point of interface of two different elastic media from which the interfacial crack goes out are done by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. This zone is modeled by line of a normal displacement rupture. The dependences of the length of prefracture zone and its opening at the angular point on the loading, angle of interface fracture and elastic parameters of media are investigated. On the basis of deformation criterion the crack starting conditions are investigated.

Уманськ. держ. пед. ун-т, Умань

Одержано
15.11.10