

ВПЛИВ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Розглянуто задачу про визначення напруженого стану пружно-пластичної ізотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Досліджено вплив зміцнення матеріалу на загальні характеристики напруженого стану.

Вступ. Модель Леонова – Панасюка – Дагдейла (δ_c -модель), узагальнену на матеріали зі зміцненням [7], використовували при розв'язанні задач про напружений стан пологої ізотропної оболонки з наскрізною [8, с. 145–152] та поверхневою [5] тріщинами. Теоретичні основи деформаційного зміцнення наведено у роботах [4, 6, 9, 11–13], сучасні прикладні проблеми механіки деформаційного зміцнення матеріалів описано в [1].

Постановка задачі. Розглядаємо полого ізотропну оболонку довільної кривини сталого товщини h з внутрішню тріщиною вздовж однієї з ліній головних кривин. Довжина тріщини $2\ell_0$, глибина $h - d_1 - d_2$, де d_1, d_2 – товщини нижнього та верхнього шарів, які визначають розташування тріщини по товщині оболонки (рис. 1).

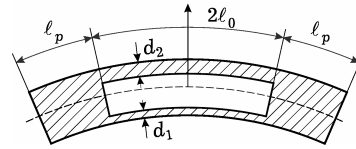


Рис. 1

Оболонка знаходиться під дією розтягувального навантаження, симетричного відносно лінії тріщини. Береги тріщини у процесі деформації між собою не контактують, оболонка перебуває в стані пружної рівноваги.

Будемо вважати, що розміри тріщини великі у порівнянні з товщиною оболонки та малі у порівнянні з іншими її лінійними розмірами. Це дозволяє розглянути задачу за допомогою двовимірної теорії оболонок та моделювати тріщину як математичний розріз серединної поверхні оболонки.

Для виконання умов δ_c -моделі, будемо вважати, що розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу такі, що в околі тріщини по всій товщині вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тоді зони пластичних деформацій будемо моделювати поверхнями розриву переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними зусиллями T та згинним моментом M , розподіленими вздовж пластичних зон лінійно [7, 8]:

$$T(s) = Pb(s), \quad M(s) = Hb(s),$$

де

$$b(s) = (1 - \hat{m}^*) \frac{|s| - \tau^*}{1 - \tau^*} + \hat{m}^*, \quad \hat{m}^* = \frac{\hat{\sigma}_\tau}{\sigma_\tau} = \frac{1}{2}(m^* + 1), \quad \hat{\sigma}_\tau = \frac{\sigma_B + \sigma_\tau}{2},$$

s – координата, вздовж якої розташована тріщина, $s = \frac{x}{\ell}$; $\tau^* = \frac{\ell_0}{\ell}$; $\ell = \ell_0 + \ell_p$; ℓ_p – довжина пластичної зони; σ_B – межа міцності матеріалу;

$m^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_\tau}$ – параметр, що характеризує зміцнення матеріалу; P і H – невідомі сталі, які відповідають одній з умов пластичності Треска:

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \frac{6|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1 \quad \text{або} \quad \left(\frac{P}{h\sigma_\tau}\right)^2 + \frac{4|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1.$$

Також вважаємо, що на подовженні тріщини в області $x \in (-\ell_0, \ell_0)$, $y \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + d_1\right] \cup \left[\frac{h}{2} - d_2, \frac{h}{2}\right]$ діють постійні напруження $\hat{\sigma}_\tau$.

Таким чином, у рамках δ_c -моделі внутрішню тріщину відомої довжини $2\ell_0$ замінюємо наскрізною тріщиною невідомої довжини 2ℓ . На берегах фіктивної тріщини виконуються умови

$$T_2(\ell s) = \begin{cases} T(\ell s) - T_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ T^\ell - T_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases}$$

$$M_2(\ell s) = \begin{cases} M(\ell s) - M_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ M^\ell - M_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases} \quad (1)$$

де $T_2^*(\ell s)$ та $M_2^*(\ell s)$ – зусилля і момент у суцільній оболонці на лінії тріщини; T^ℓ та M^ℓ – зусилля й момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків під тріщиною і над нею. Згідно з нашими припущеннями про напруження у цих зонах вони визначаються за формулами

$$T^\ell = \int_{-h/2}^{d_1-h/2} \hat{\sigma}_\tau dz + \int_{h/2-d_2}^{h/2} \hat{\sigma}_\tau dz = \hat{\sigma}_\tau (d_1 + d_2),$$

$$M^\ell = \int_{-h/2}^{d_1-h/2} \hat{\sigma}_\tau z dz + \int_{h/2-d_2}^{h/2} \hat{\sigma}_\tau z dz = \frac{\hat{\sigma}_\tau}{2} d_1 (d_1 - d_2) (d_1 + d_2 - h).$$

Таким чином, задачу про пружно-пластичну оболонку з внутрішньою тріщиною відомих розмірів зведено до задачі про пружну оболонку з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини.

Побудова системи сингулярних інтегральних рівнянь. У роботі [10] побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для розв'язання пружної задачі про напружений стан оболонки довільної кривини з тріщиною:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{i1}(x-t)\psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{i3}(x-t)\psi_3(t) dt = \pi(\Phi_i^* - \Phi_i(x)), \quad i = 1, 3, \quad (2)$$

де

$$\Phi_1(x) = T_2(x) = Pb(x), \quad \Phi_3(x) = c^2 R_2 M_2(x) = c^2 R_2 Hb(x),$$

$$\Phi_1^* = T_2^*, \quad \Phi_3^* = c^2 R_2 M_2^*,$$

$c^4 = 12(1 - \nu^2)/R_2^2 h^2$; R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні. Ядра системи (2) наведено у роботі [10].

Згідно з граничними умовами (1) праві частини системи є розривними функціями, що ускладнює чисельний розв'язок задачі, а аналітичний робить неможливим. Тому запишемо невідомі функції $\psi_1(t)$ та $\psi_3(t)$ у спеціальному вигляді, який дозволить звести задачу до розв'язання системи СІР з неперервними правими частинами. При цьому буде використано розв'язок задачі для пружно-пластичної пластини з аналогічною тріщиною, наведений нижче.

Задача для пружно-пластичної пластини з тріщиною зводиться до розв'язання наступних рівнянь:

$$\int_{-1}^1 \frac{h_i(x)}{t-x} dx = \pi \Phi_i(x), \quad i = 1, 3. \quad (3)$$

Як доведено у монографії [2], система (3) має обмежений розв'язок, якщо виконується додаткова умова $\int_{-1}^1 \frac{\Phi_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$, з якої отримуємо

$$\frac{P}{2} \left[(1-m^*) \sqrt{\frac{1+\tau^*}{1-\tau^*}} + \frac{m^*+1-2\tau^*}{1-\tau^*} \arccos(\tau^*) \right] + T^\ell \arcsin(\tau^*) = \frac{\pi}{2} T_2^*,$$

$$\frac{H}{2} \left[(1-m^*) \sqrt{\frac{1+\tau^*}{1-\tau^*}} + \frac{m^*+1-2\tau^*}{1-\tau^*} \arccos(\tau^*) \right] + M^\ell \arcsin(\tau^*) = 0.$$

Отримавши P і H з наведених вище рівнянь і підставивши їх до однієї з умов пластичності, отримуємо трансцендентне рівняння відносно τ^* :

$$\begin{aligned} & (\tilde{t}^\ell - 6|\tilde{m}^\ell|) \arcsin(\tau^*) + \frac{m^*+1-2\tau^*}{2-2\tau^*} \arccos(\tau^*) + \\ & + \frac{1-m^*}{2} \sqrt{\frac{1+\tau^*}{1-\tau^*}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_\tau}, \end{aligned}$$

де $\tilde{t}^\ell = \frac{T^\ell}{h\sigma_\tau}$, $\tilde{m}^\ell = \frac{M^\ell}{h^2\sigma_\tau}$, яке можна розв'язати чисельними методами при конкретних значеннях параметрів.

Аналітичний розв'язок рівнянь (3) має вигляд

$$h_1(t) = -T^\ell h_s(t) + Ph_n(t), \quad h_3(t) = -c^2 R_2 M^\ell h_s(t) + c^2 R_2 H h_n(t),$$

де

$$h_s(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\tau^* - t}{\tau^* + t} \cdot \frac{1 + t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1 - t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}} \right|,$$

$$h_n(t) = \frac{m^*+1-2\tau^*}{2(1-\tau^*)} h_s(t) + \frac{t}{\pi} \frac{m^*-1}{2(1-\tau^*)} \ln \left| \frac{1 - (t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})^2}{(\tau^* - t)(\tau^* + t)} \right|.$$

Отже, для того щоб позбутися розривності правих частин системи (2), невідомі функції подамо у вигляді

$$\psi_i(t) = g_i(t) + h_i(t) = g_i(t) + f_i h_n(t) - f_i^\ell h_s(t), \quad i = 1, 3,$$

де

$$f_1 = t = \frac{P}{T_2^*}, \quad f_3 = m = \frac{c^2 R_2 H}{T_2^*}, \quad f_1^\ell = t^\ell = \frac{T^\ell}{T_2^*}, \quad f_3^\ell = m^\ell = \frac{c^2 R_2 M^\ell}{T_2^*},$$

$h_i(t)$ – аналітичні розв'язки рівнянь

$$\int_{-1}^1 \frac{h_i(t)}{t-x} dt = \pi f_i(x),$$

де

$$f_i(x) = \begin{cases} -a_i + b(x), & \tau^* < |x| < 1, \\ -a_i, & |x| < \tau^*, \end{cases} \quad i = 1, 3.$$

Константи a_i визначаємо з умов існування розв'язків цих рівнянь за формулами

$$a_i = f_i \hat{a} + f_i^\ell \frac{2}{\pi} \arcsin(\tau^*),$$

де

$$\hat{a} = \frac{1-m^*}{\pi} \sqrt{\frac{1+\tau^*}{1-\tau^*}} + \frac{m^*+1-2\tau^*}{\pi(1-\tau^*)} \arccos(\tau^*).$$

Підставимо невідомі функції $\psi_1(t)$ та $\psi_3(t)$ у систему (2), поділивши обидва її рівняння на T_2^* (враховуючи те, що $M_2^* = 0$, за постановкою задачі), та отримуємо систему СІР з неперервними правими частинами відносно невідомих t , m , $g_1(t)$ та $g_3(t)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1,3} \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{jp}(x-t)g_p(t) dt + f_j \left[\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{jj}^r(x-t)h_n(t) dt + \pi \hat{a} \right] + \\ & + f_i \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{ji}(x-t)h_n(t) dt = \pi c_j + f_i^\ell \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{ji}(x-t)h_s(t) dt + \\ & + f_j^\ell \left[\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{jj}^r(x-t)h_s(t) dt - 2 \arcsin(\tau^*) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де $j = 1, 3$, $i = 3, 1$, $i \neq j$, $c_1 = 1$, $c_3 = 0$.

Чисельний розв'язок задачі. Для чисельного розв'язання системи будемо використовувати метод механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях проміжку інтегрування. Таким чином, кожне рівняння системи СІР (4) зведемо до $n+1$ лінійного алгебраїчного рівняння відносно значень невідомих підінтегральних функцій у вибраних точках (вузлах інтерполяційного полінома): $x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(n+1)}\right)$, $m = 1, \dots, n+1$ (зовнішні вузли), $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, \dots, n$ (внутрішні вузли):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{p=1,3} \sum_{k=1}^n K_{jp}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_p(y_k) + \\ & + \frac{f_i}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{ji}(x_m - y_k)h_n(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \\ & + f_j \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{jj}^r(x_m - y_k)h_n(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \hat{a} \right] = \\ & = c_j + \frac{f_i^\ell}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{ji}(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \\ & + f_j^\ell \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{jj}^r(x_m - y_k)h_s(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} - \frac{2}{\pi} \arcsin(\tau^*) \right], \end{aligned}$$

де $j = 1, 3$, $i = 3, 1$, $i \neq j$, $c_1 = 1$, $c_3 = 0$.

Система сумісна і не вироджена, для її розв'язання можна використати метод Гаусса. Розв'язавши систему, перевіряємо виконання умови пластичності. Якщо вона не виконується з заданою точністю, змінюємо значення τ^* та розв'язуємо задачу відносно нового наближення.

На рис. 2 зображено залежність відносного розміру пластичної зони τ^* від відносного рівня зовнішнього навантаження $n_0 = \sigma_0/\sigma_\tau$ для циліндричної оболонки з внутрішньою тріщиною при значеннях параметра $m^* = 1, 1.5, 2$, що характеризує зміцнення матеріалу, при цьому $d_1/h = 0.3$, $d_2/h = 0.1$, $\ell_0/R_2 = 0.1$. Суцільна лінія відповідає повздовжній тріщині, штрихова – поперечній.

На рис. 3 зображено залежність τ^* від реальної довжини тріщини ℓ_0/R_2 для циліндричної оболонки при $n_0 = 0.6$, $m^* = 1, 1.5, 2$.

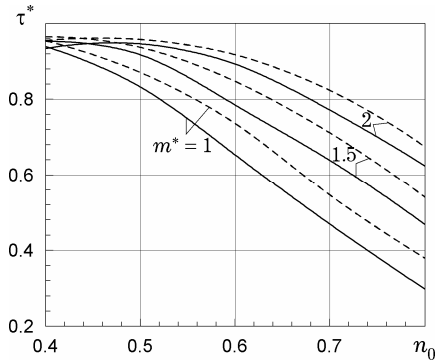


Рис. 2

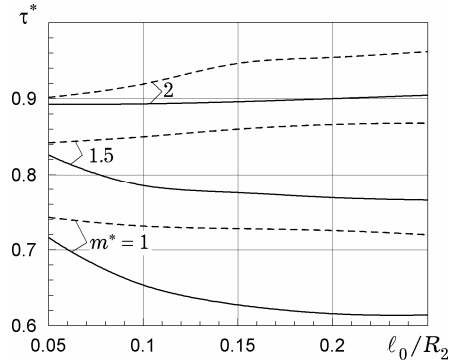


Рис. 3

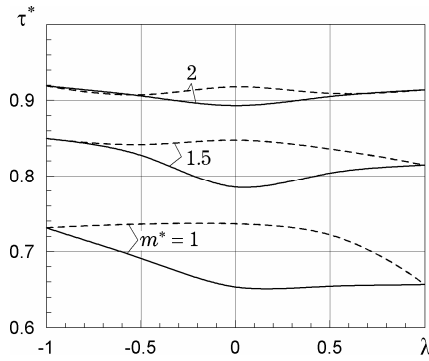


Рис. 4

На рис. 4 зображено залежність τ^* від кривини оболонки λ при $d_1/h = 0.3$, $d_2/h = 0.1$, $\ell_0/R_2 = 0.1$, $n_0 = 0.6$ для значень $m^* = 1, 1.5, 2$.

Зазначимо, що, якщо у вираз для $b(x)$ підставимо значення $m^* = 1$, отримаємо випадок ідеально пружно-пластичного матеріалу. Для цього матеріалу результати співпали з наведеними у роботі [3].

Оскільки $\tau^* = \ell_0/\ell = 1 - \ell_p/\ell$, то чим ближче значення τ^* до одиниці, тим меншою є довжина пластичної зони ℓ_p . З отриманих результатів можна зробити висновок, що внаслідок зміцнення матеріалу довжина пластичної зони внутрішньої тріщини (як повздовжньої, так і поперечної) зменшується.

Очевидно, що для сферичної (псевдосферичної) оболонки повздовжня та поперечна тріщина не відрізняються, оскільки $R_1 = R_2$, про що й свідчить рис. 4. У розглянутому випадку для повздовжньої тріщини найменше значення ℓ_p досягається у псевдосферичній оболонці, найбільше – у циліндричній. Для поперечної тріщини при $m^* = 1$ найменше значення ℓ_p приймає у циліндрі, найбільше – у сфері. При подальшому зміцненні найменше значення ℓ_p набуде у псевдосфері, найбільше – в оболонці від'ємної кривини при $\lambda = -0.5$.

1. Бастун В. Н., Каминский А. А. Прикладные проблемы механики процессов деформационного упрочнения конструкционных металлических материалов // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 10. – С. 12–51.

Te same: Bastun V. N., Kaminskii A. A. Applied problems in the mechanics of strain hardening of structural metallic materials // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, No. 10. – P. 1092–1129.

2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 639 с.

3. Гордієнко М. М. Напружено-деформований стан пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини з тріщинами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Донецьк, 2009. – С. 79–94.
4. Данилов В. Л. К формулировке закона деформационного упрочнения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 6. – С. 146–150.
5. Довбня Е. Н., Яртемик В. В., Гурьева И. В. Напряженное состояние упруго-пластической изотропной оболочки с поверхностной трещиной с учетом упрочнения материала // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАНУ. – 2009. – **19**. – С. 65–71.
6. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – Москва: Физматлит, 2003. – 704 с.
7. Каминский А. А., Галатенко Г. В. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 4. – С. 54–60.
Te same: Kaminskii A. A., Galatenko G. V. Investigation of fatigue crack growth in materials with hardening // Int. Appl. Mech. – 1984. – **20**, No. 4. – P. 346–351.
8. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
9. Прагер В. Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 325–335.
10. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 212–249.
11. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening // Acta mech. – 1965. – **1**, No. 2. – P. 81–92.
12. Golub V. P., Kobzar Yu. M., Fernati P. V. An approach to constructing a rheological model of a strain-hardening medium // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 776–784.
Te same: Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Об одном подходе к построению реологической модели среды с упрочнением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 7. – С. 81–97.
13. Khan A., Kamili M., Jackson G. On the evolution of isotropic and kinematic hardening with finite plastic deformation. Part 1 // Int. J. Plasticity. – 1999. – **15**. – P. 1265–1275.

ВЛИЯНИЕ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Решена задача определения напряженного состояния упруго-пластической изотропной оболочки произвольной кривизны с внутренней трещиной с учетом упрочнения материала. Получена система сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно методом механических квадратур. Исследовано влияние упрочнения материала на основные характеристики напряженного состояния.

EFFECT OF HARDENING OF MATERIAL ON THE STRESS STATE OF ELASTICO-PLASTIC SHELL WITH INTERNAL CRACK

The problem on the stress state of elastico-plastic isotropic shell of any curvature with internal crack with regard for material hardening is solved. A system of singular integral equations which is solved numerically by the mechanical quadratures method is obtained. Influence of material hardening on the basic characteristics of the stress state is studied.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
06.12.10