

## МОДЕЛЮВАННЯ ВЛАСНИХ І ВЗАЄМНИХ ПРОВІДНОСТЕЙ ВУЗЬКИХ КАНАВОК НА ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО КОНУСА ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Канавки на поверхні ідеально провідного скінченного конуса моделюються ім-педансними смужками. З використанням функції Гріна задачі про осесиметричне електромагнітне збудження ідеально провідного конуса (випадок Е-поляризації) отримано наближені вирази для власних і взаємних провідностей канавок, в яких враховано вплив краю. На цій основі досліджено залежності дійсних і уявних значень власних та взаємних провідностей кільцевих канавок від їх положення на поверхні скінченного конуса. Порівнянням їх з аналогічними характеристиками для напівнескінчених конусів показано, що вплив краю конуса може бути істотним і його необхідно враховувати при розрахунку розсіювальних властивостей скінчених конічних структур з кільцевими канавками.

**Вступ.** Нанесення вузьких канавок на випромінюючу поверхню антен дозволяє керувати такими важливими характеристиками антен, як діаграма спрямованості та вхідний опір [5]. Методи наближеного визначення їх впливу на електродинамічні характеристики антен базуються на визначенні власних та взаємних провідностей канавок на підставі розв'язку простих модельних крайових задач електродинаміки. Визначення власних і взаємних провідностей кільцевих канавок, нанесених на напівнескінченні ідеально провідні конічні поверхні, а також вивчення їх впливу на формування діаграм спрямованості, подано в [1, 4]. У цій статті розглянемо вплив краю на властивості власних і взаємних провідностей кільцевих канавок, нанесених на поверхню скінченного конуса.

**Постановка задачі.** Розглянемо у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$  ідеально провідну скінченну конічну поверхню  $Q: \{r \in (0, c); \theta = \gamma; \varphi = [0, 2\pi)\}$  (див. рис. 1). Нехай на зовнішній поверхні  $Q$  розміщено  $N$  кільцевих канавок нескінченно малої глибини з шириною  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  (причому  $\Delta_j \ll \lambda$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі), які моделюємо ім-педансними смужками. Відстань від вершини конуса до лінії центрального перерізу  $j$ -ї смужки  $r = r_j$ .

Конус збуджуємо смужкою магнітного струму [3]:

$$J_{0\varphi}^{(m)}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{I_{0\varphi}^{(m)}(r)}{r^2} \frac{\delta(\theta - \gamma)}{\sin \gamma}, & r \in (d_1, d_2), \\ 0, & r \notin (d_1, d_2), \end{cases} \quad (1)$$

де  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака;  $d_1, d_2$  – координати країв смужки;  $I_{0\varphi}^{(m)}(r)$  – амплітуда магнітного струму.

Джерело (1) збуджує симетричні  $TM$ -хвилі з відмінними від нуля компонентами  $(E_r, E_\theta, H_\varphi)$ . Залежність від часу у вигляді множника  $e^{-i\omega t}$  надалі опускаємо.

Магнітну компоненту поля запишемо у вигляді

$$H_\varphi(r, \theta) = i\omega \varepsilon \int_0^c \int_0^\gamma [J_{0\varphi}^{(m)}(r', \theta') + J_\varphi^{(m)}(r', \theta')] G(r, \theta; r', \theta') r \sin \theta' dr' d\theta'. \quad (2)$$

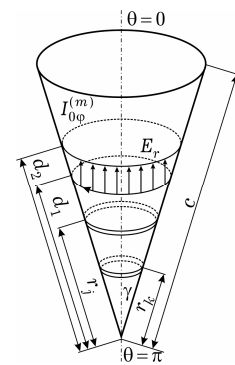


Рис. 1

Тут  $G(r, \theta, r', \theta')$  – функція Гріна, яку знаходимо з розв'язку крайової задачі

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} G(r, \theta; r', \theta') + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} G(r, \theta; r', \theta') + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} G(r, \theta; r', \theta') \right) - \frac{G(r, \theta; r', \theta')}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ & + k^2 G(r, \theta; r', \theta') = - \frac{1}{r' \sin \theta'} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta G(r, \theta; r', \theta') \right) = 0, \quad r, \theta \in \mathbb{Q},$$

де  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$  ( $\epsilon, \mu$  – діелектрична та магнітна проникності середовища, в якому знаходиться конус);  $J_\phi^{(m)}(r', \theta')$  – густина магнітних струмів, індукованих у кільцевих канавках:

$$J_\phi^{(m)}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{E_{jr}(r, \gamma) \delta(\theta - \gamma)}{r \sin \gamma}, & r, \theta \in (r_j - \Delta_j/2; r_j + \Delta_j/2), \\ 0, & r, \theta \notin (r_j - \Delta_j/2; r_j + \Delta_j/2), \end{cases} \quad (4)$$

$E_{jr}(r, \gamma)$  – невідома радіальна компонента напруженості електричного поля в  $j$ -й канавці,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Зауважимо, що  $H_\phi(r, \theta)$  – магнітна компонента поля (2), є розв'язком крайової задачі (3) з правою частиною у вигляді

$$F(r, \theta) = -i\omega\epsilon [J_{0\phi}^{(m)}(r, \theta) + J_\phi^{(m)}(r, \theta)],$$

що безпосередньо впливає з рівнянь Максвелла і граничних умов для тангенціальної складової електричного поля на поверхні  $\mathbb{Q}$ .

Шукану функцію Гріна запишемо так:

$$G(r, \theta; r', \theta') = G_0(r, \theta; r', \theta') + G_1(r, \theta; r', \theta'). \quad (5)$$

Тут  $G_0(r, \theta; r', \theta')$  – функція Гріна напівнескінченного ідеально провідного конуса  $\mathbb{Q}^\infty : \{r \in (0, \infty); \theta = \gamma; \phi \in [0, 2\pi)\}$ , а  $G_1(r, \theta; r', \theta')$  описує поправку, яку вносить край конуса.

Функція  $G_0(r, \theta; r', \theta')$  має вигляд [3]

$$\begin{aligned} G_0(r, \theta; r', \theta') &= \\ &= \frac{2}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{r'}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n P_{v_n-1/2}^1(\cos \theta) P_{v_n-1/2}^1(\cos \theta')}{(v_n^2 - 1/4) P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial v} P_{v-1/2}^1(\cos \gamma) \Big|_{v=v_n}} \times \\ &\times \begin{cases} I_{v_n}(sr) K_{v_n}(sr'), & r \leq r', \\ K_{v_n}(sr) I_{v_n}(sr'), & r \geq r', \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

де  $s = -ik$ ;  $I_{v_n}(\cdot)$ ,  $K_{v_n}(\cdot)$  – модифікована функція Бесселя і функція Макдональда відповідно;  $P_{v_n-1/2}^1(\cdot)$  – функція Лежандра;  $P_{v_n-1/2}^1(\cdot)$  – приєднана функція Лежандра першого порядку;  $v_n$  – додатні корені трансцендентного рівняння  $P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Функцію  $G_1(r, \theta; r', \theta')$  визначаємо з розв'язку крайової задачі, отриманої в [2]:

$$\Delta G_1(r, \theta; r', \theta') - \frac{G_1(r, \theta; r', \theta')}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 G_1(r, \theta; r', \theta') = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta [G_0(r, \theta; r', \theta') + G_1(r, \theta; r', \theta')] \right\} = 0, \quad r, \theta \in \mathbb{Q}. \quad (7)$$

Підставимо вирази (1), (4) у формулу (2). Припустимо, що невідомі величини  $E_{jr}(r, \gamma)$  в межах вузьких канавок змінюються незначно. Тому при обчисленні інтеграла (2) замінимо їх наближеними значеннями у центрі середніх перерізів  $E_{jr}(r, \gamma) \approx E_{jr}(r_j, \gamma)$ . Тоді вираз (2) наближено перепишемо у вигляді

$$H_\phi(r, \gamma) = \sum_{j=1}^N E_{rj}(r_j, \gamma) Y_j(r) + H_\phi^{(p)}(r, \gamma). \quad (8)$$

Тут

$$Y_j(r) = Y_j'(r) + Y_j''(r), \quad (9)$$

$$Y_j'(r) = i\omega \varepsilon \int_{r_j - \Delta_j/2}^{r_j + \Delta_j/2} G_0(r, \gamma; r', \gamma) dr', \quad (10')$$

$$Y_j''(r) = i\omega \varepsilon \int_{r_j - \Delta_j/2}^{r_j + \Delta_j/2} G_1(r, \gamma; r', \gamma) dr', \quad (10'')$$

$$H_\phi^{(p)}(r, \gamma) = i\omega \varepsilon \int_{d_1}^{d_2} I_{0\phi}^{(m)}(r') [G_0(r, \gamma; r', \gamma) + G_1(r, \gamma; r', \gamma)] \frac{dr'}{r'}. \quad (11)$$

Вирази (9), (10) мають розмірність провідності, а формула (11) визначає магнітну компоненту поля, що збуджує джерело (1) на конусі  $\mathbb{Q}$ , коли на ньому відсутні канавки.

Невідомі значення струмів в канавках можна знайти наближено розв'язавши скінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку запишемо у вигляді

$$E_{kr}(r_k) Z_k^{-1} = \sum_{j=1}^N E_{jr}(r_j) Y_{jk} + H_\phi^{(p)}(r_k, \gamma), \quad (12)$$

де  $r = r_k$  – радіальна координата середнього перерізу  $k$ -ї канавки на конусі,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $Y_{jk} = Y_j(r_k)$  – провідності канавок на скінченному конусі: власні – при  $j = k$  і взаємні – при  $j \neq k$ ;  $Y'_{jk}$  – провідності канавок на напівнескінченному конусі,  $Y''_{jk}$  – поправки, обумовлені краєм конуса;  $Z_k$  – імпеданс навантаження  $k$ -ї канавки.

**Аналіз числових результатів.** Дослідимо власні і взаємні провідності канавок на поверхні напівнескінченного конуса  $Y'_{jk}$ , а також поправки  $Y''_{jk}$ , зумовлені впливом краю конуса. При обчисленні вважатимемо, що хвильовий опір середовища, в якому знаходиться конус,  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 1 [\text{Ом}]$ , а безрозмірна ширина канавок на напівнескінченному і скінченному конусах  $k\Delta_j = 0.05$ .

Для обчислення власних і взаємних провідностей канавок на поверхні напівнескінченного конуса використовуємо формули (6), (10'), а поправки, які вносить край скінченного конуса знаходимо, розв'язуючи крайову задачу (7) методом аналітичної регуляризації [6] і використовуючи формулу (10''). У зв'язку з малою безрозмірною шириною канавок, підінтегральні функції в (10) заміняємо їх значеннями на лінії середнього перерізу канавки. При обчисленні власних провідностей канавок з використанням формули (6) при  $r' = r = r_k$  обмежувалися скінченим числом членів ряду  $M \leq 40$ , а для забезпечення збіжності приймали, що  $r' \rightarrow r_k$  ( $r' \neq r_k$ ).

На рис. 2 наведено залежності дійсної та уявної частин власної провідності канавки  $Y'_{11}$ , що знаходиться на напівнескінченному конусі (суцільні криві) і поправки  $Y''_{11}$  (пунктирні криві), зумовленої краєм скінченного конуса, від радіальної координати  $kr_1$  – центрального перерізу канавки на конусі. Безрозмірна довжина твірної скінченного конуса  $ks = 24$ . Криві на рис. 2а, рис. 2б відповідають конусу з кутом розхилу  $\gamma = 160^\circ$ , а криві на рис. 2в, рис. 2г – конусу з  $\gamma = 91^\circ$ . Як бачимо, ці залежності мають осцилюючий характер поведінки як функції параметра  $kr_1$ . В околі вершини відносний вклад краю конуса у дійсну частину власної провідності канавки незначний ( $\text{Re } Y''_{11} \rightarrow 0$ ), проте цей вплив зростає при наближенні канавки до краю конуса. З графіків, показаних на рис. 2, бачимо, що при  $kr_1 > 4$  значення поправок  $\text{Re } Y''_{11}$  і  $\text{Im } Y''_{11}$  перевищують відповідно  $\text{Re } Y'_{11}$  і  $\text{Im } Y'_{11}$ , тобто основний внесок у провідність дає другий доданок формули (9). Отже, край конуса за цих умов істотно впливає на власні провідності канавок, визначених для напівнескінченного конуса.

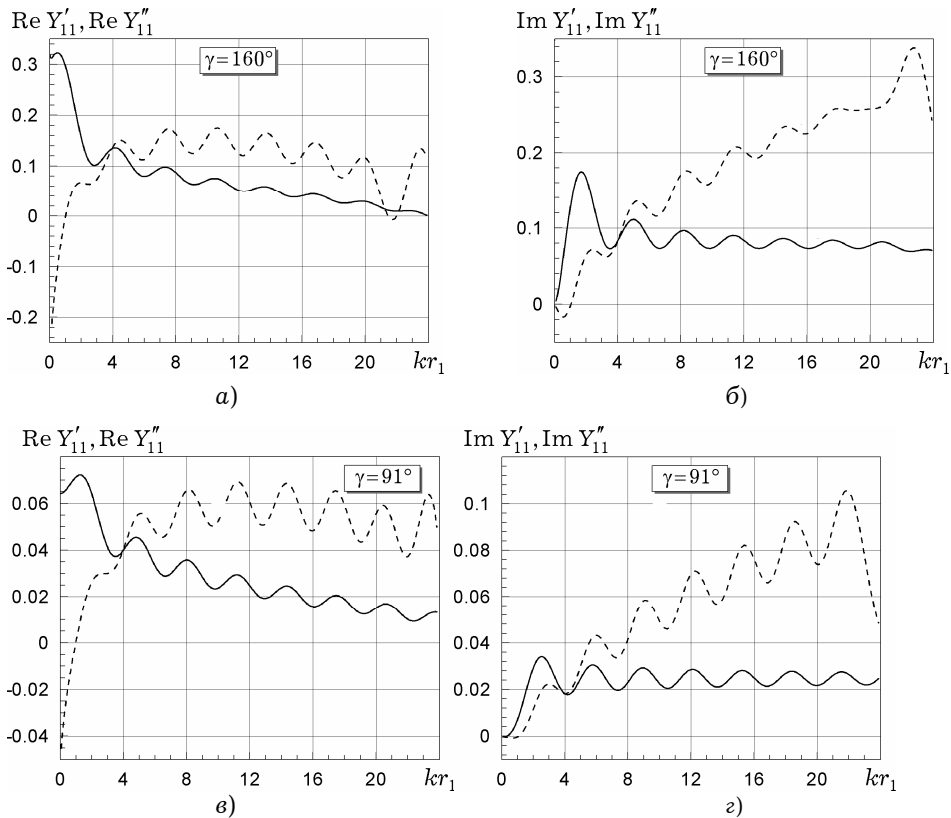


Рис. 2

На рис. 3а, рис. 3в наведено залежності дійсної, а на рис. 3б, рис. 3г – уявної частин взаємної провідності  $Y'_{12}$  (суцільні криві) двох канавок від їх положення на поверхні конуса. Положення однієї з канавок є фіксованим ( $kr_1 = 2$  – на рис. 3а, рис. 3б, і  $kr_1 = 22$  – на рис. 3в, рис. 3г), а положення другої канавки (середній переріз  $kr_2$ ) змінюється уздовж твірної напівнескінченного конуса. Вплив краю конуса з довжиною твірної  $ks = 24$  на взаємну провідність канавок  $Y''_{12}$  показано пунктирними кривими. Усі розрахунки кривих на рис. 3 виконано для конуса з кутом розхилу  $\gamma = 160^\circ$ .

На рис. 3 бачимо, що значення дійсної та уявної частин взаємної провідності осцилюють по мірі зміни положення однієї з канавок. Як і очікувалося, спостерігаємо зростання впливу краю конуса на значення взаємної провідності канавок при наближенні однієї з них до краю (див. пунктирні криві на рис. 3в). Оскільки пунктирні криві на рис. 3в, рис. 3г мають глибокі осциляції, то це дозволяє оптимізувати вплив краю конуса на дійсні та уявні частини взаємних провідностей канавок, змінюючи її розміщення на поверхні конуса.

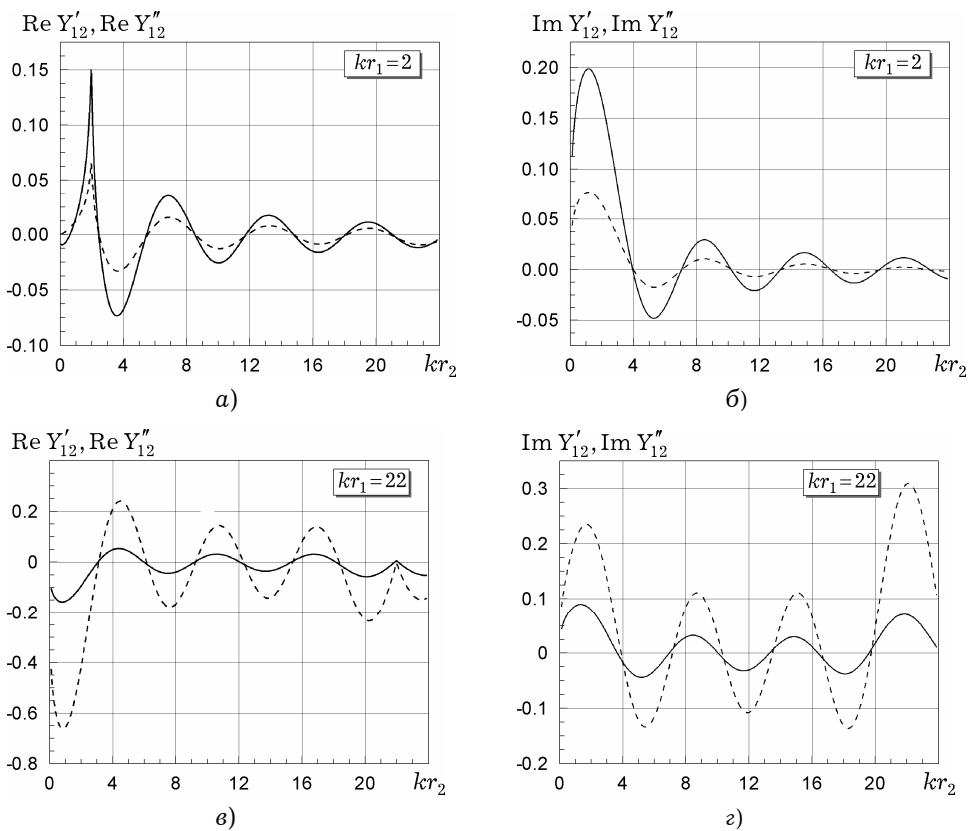


Рис. 3

**Висновки.** Досліджено залежності власних і взаємних провідностей канавок як функції їх положення на поверхні конуса. Показано, що необхідно диференційовано підходити до використання цих характеристик, розрахованих для напівнескінчених конусів, при моделюванні електродинамічних властивостей скінченних конічних розсіювачів, оскільки вплив краю на досліджувані характеристики може бути значним. Як бачимо з наведених тут результатів обчислень, вплив краю на власні провідності є помітним навіть, якщо канавка знаходиться на відстані, більшій ніж  $3\lambda$  ( $\lambda$  – довжина хвилі) від краю конуса, а вплив краю на взаємні провідності спостерігаємо практично в усьому діапазоні зміни положення канавок на конусі.

1. Белецкий А. А., Петров Б. М. Собственные и взаимные проводимости кольцевых щелей на бесконечном идеально проводящем произвольном биконусе // Антенны. – 2001. – Вып. 4 (50). – С. 27–31.
2. Трищук О. Б., Куриляк Д. Б. Симметричное электромагнитное возбуждение конечного проводящего конуса азимутальной щелью // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2009. – **52**, № 7. – С. 71–80.  
Te same: Trishchuk O. B., Kuryliak D. B. Symmetric electromagnetic excitation of a finite conducting cone with azimuthal slot // Radioelectronics and Communication Systems. – 2009. – **52**, No. 7. – P. 389–396.
3. Трищук О. Б., Куриляк Д. Б. Электромагнитное поле полоски магнитного тока на поверхности конечного конуса // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – **15**, № 3. – С. 235–242.  
Te same: Trishchuk O. B., Kuryliak D. B. Electromagnetic field of a magnetic strip on a finite cone // Radio Phys. and Radio Astron. – 2010. – **15**, No. 3. – P. 314–322.
4. Чаплин А. Ф., Тенсин В. С. Поле решетки кольцевых нагруженных щелей на конусе // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1982. – **25**, № 2. – С. 71–74.
5. Hu Z. H., Hall P. S., Kelly J. R., Gardner P. Improved band-notched wideband conical monopole antenna // Microw. Opt. Techn. Let. – 2011. – **53**, No. 8. – P. 1825–1829.
6. Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Sci. – 2008. – **43**, No. 4. – 14 p. – RS4S03, doi:10.1029/2007RS003792.

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ И ВЗАИМНЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ УЗКИХ КАНАВОК НА ПОВЕРХНОСТИ КОНЕЧНОГО КОНУСА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ**

*Канавки на поверхности идеально проводящего конечного конуса моделируются импедансными полосками. Используя функцию Грина задачи для осесимметричного электромагнитного возбуждения идеально проводящего конуса (случай E-поляризации), получены приближенные выражения для собственных и взаимных проводимостей канавок, учитывающие влияние края. На этой основе исследованы зависимости действительных и мнимых значений собственных и взаимных проводимостей кольцевых канавок от их положения на поверхности конечного конуса. Сравнение их с аналогичными характеристиками для полубесконечных конусов показывает, что влияние края конуса может быть существенным и его необходимо учитывать при расчете рассеивающих свойств конечных конических структур с кольцевыми канавками.*

#### **MODELING OF INTRINSIC AND TRANSFER CONDUCTANCES OF NARROW GROOVES ON THE SURFACE OF FINITE CONE UNDER AXISYMMETRIC ELECTROMAGNETIC EXCITATION**

*The grooves on the surface of perfectly conducting finite cone are modeled with the help of impedance strips. Using Green's function of the problem on axially symmetric electromagnetic excitation of the perfectly conducting cone (E-polarization case), the approximate representations for the intrinsic and transfer conductances of the grooves are obtained, which take into consideration the influence of the edge. On this bases the dependences of the real and imaginary values of the intrinsic and transfer conductances of the ring grooves at the surface of the finite and semi-infinite conducting cones as a function of their location are investigated. Comparing these representations with the analogical characteristics for the semi-infinite cone, it is shown that the influence of the conical edge on these characteristics may be significant and must be taken into account in calculating the scattering properties of the finite conical structures with the ring grooves.*

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка  
НАН України, Львів

Одержано  
25.06.10