УДК 536.12: 620.198

В. А. Шевчук

НЕСТАЦІОНАРНА ОДНОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ

На основі аналітичного розв'язку одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проведено дослідження і виявлено закономірності протікання теплового процесу в тілі і покритті при нагріві зовнішнім середовищем.

1. Вступ. Моделюванню і дослідженню процесів теплопровідності і дифузії в тілах з покриттями присвячено багато праць [1–4, 6–13, 16, 17, 19–21, 23–40].

Нестаціонарні крайові задачі теплопровідності у точній постановці для покрить довільної товщини розв'язувались або аналітично [2, 14, 16, 24, 39], або на основі чисельних підходів [6, 29, 31, 34].

Було запропоновано й наближені підходи. У роботі [4] при дослідженні теплоперенесення у скляних покриттях на металевих підкладках враховується лише ґрадієнт температури вздовж товщини покриття, а в роботах [1, 3], які реалізують схему «зосередженої ємності» [22], навпаки, – лише її ґрадієнт уздовж товщини підкладки. У [33] використовується припущення про постійний ґрадієнт концентрації в покритті. У [18] вважається достатнім ураховувати вплив покриття через ефективний коефіцієнт тепловіддачі у граничній умові. У працях [30, 32] спрощення відбувається на етапі аналітичного розв'язування задачі, коли береться до уваги малість товщини покриття. У [9] розроблено асимптотичну математичну модель на основі застосування методу малого параметра. У [40] для випадку неоднорідних покрить отримано асимптотичні формули для малих часів. У [8, 35] при побудові загальної числової схеми розв'язування методом скінченних елементів використовується некласична комбінована модель теплопровідності, яка описується системою диференціальних рівнянь різної вимірності за просторовими змінними. У [38] при застосуванні методу граничних елементів проводиться регуляризація обчислення граничних інтегралів. В [11] використовується підхід, пов'язаний з поданням теплофізичних характеристик через асиметричні функції, що приводить до розв'язування рівнянь з коефіцієнтами типу дельта-функцій Дірака.

Багато авторів використовують концепцію узагальнених граничних умов, які описують вплив покриття на теплоперенесення у тілі [1, 3, 7, 10, 12, 13, 19, 20, 23, 25–29, 36, 37]. Можна зауважити, що підхід, який ґрунтується на моделюванні покрить тонкими оболонками [20], на відміну від моделей [1, 3, 4], дозволяє одночасно враховувати ґрадієнти температурного поля як у покритті, так і в підкладці. У роботах [26, 36, 37] отримано узагальнені граничні умови теплообміну тіла із середовищем через тонке багатошарове покриття.

У цій роботі на основі аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям буде проведено дослідження закономірностей процесу теплоперенесення у системі тіло – покриття при конвективному нагріві зовнішнім середовищем.

2. Постановка задачі. Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для довгого суцільного кругового циліндра радіуса R, $0 \le r \le R$, з n-шаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$. Надалі індексами i, I та II будемо позначати величини, що стосуються відповідно i-го шару покриття, тіла та зовнішнього середовища.

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = a_k \left(\frac{\partial^2 t_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_k}{\partial r} \right), \tag{1}$$

$$t_k \big|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \qquad k \in \{\mathrm{I}\} \cup \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Приймаємо, що на межі покриття – середовище виконується теплообмін відповідно до закону Ньютона:

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial r} = \mu(t_{\mathbf{II}} - t_n) \qquad \text{при} \qquad r = r_n = R + \delta\,, \tag{3}$$

на поверхнях розділу шарів покриття і покриття з тілом мають місце умови ідеального теплового контакту

$$t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial r} \qquad \text{при} \qquad r = r_{i-1} = R + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i \in \{2, \ldots, n\},$$

$$t_1 = t_{\mathbf{I}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_{\mathbf{I}} \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} \qquad \text{при} \qquad r = r_0 = R\,, \tag{4}$$

а на осі циліндра виконується умова симетрії

$$\frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \qquad r = 0\,. \tag{5}$$

Тут t_i, $t_{\mathbf{I}}$, $t_{\mathbf{II}}$ – температури i-го шару покриття, тіла і середовища відповідно; δ_i – товщина i-го шару; $a_k = \lambda_k / \omega_k$, λ_k і ω_k – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності і теплоємності, $k \in \{\mathrm{I}\} \cup \{1, \ldots, n\}$; μ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття $r = R + \delta$.

3. Розв'язок задачі теплопровідності із узагальненою граничною умовою. Узагальнена гранична умова теплопровідності для розглядуваного випадку матиме вигляд [37]

$$-\lambda_{\mathbf{I}} \left(1 - \frac{\delta}{R} + \frac{\mu}{H}\right) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} + \mu(t_{\mathbf{II}} - t_{\mathbf{I}}) = \Omega \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \tau}, \quad t_{\mathbf{I}} \big|_{\tau=0} = t_0 \quad \text{при } r = R\,, \tag{6}$$

де $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i / \lambda_i$ – зведені теплоємність та термоопір цілого покриття.

Зауважимо, що для випадку плоского покриття $(\delta/R = 0)$ при нехтуванні у (6) теплоємністю покриття $(\Omega = 0)$ отримуємо граничну умову, наведену в [18], а при нехтуванні термоопором $(H^{-1} = 0)$ – узагальнену граничну умову [1, 3].

Для розв'язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$\tilde{t}_{\mathbf{I}}(r, s) = \int_0^\infty t_{\mathbf{I}}(r, \tau) e^{-s\tau} \, d\tau\,,$$

де s – параметр перетворення.

Розв'язок рівняння (1) у циліндрі в трансформантах з урахуванням умов (2), (5), (6) має вигляд

$$\tilde{t}_{\mathbf{I}}(r, s) = \frac{t_{\mathbf{II}} I_0(qr)}{s\left[(1 + \chi s) I_0(qR) + h^{-1} q I_1(qR)\right]}, \qquad 0 \le r \le R\,, \tag{7}$$

де $q = \sqrt{\dfrac{s}{a_{\mathbf{I}}}}$; $h^{-1} = \dfrac{\lambda_{\mathbf{I}}}{\mu}\left(1 - \dfrac{\delta}{R} + \dfrac{\mu}{H}\right)$; $\chi = \dfrac{\Omega}{\mu}$; I_0, I_1 – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (7), отримуємо розв'язок задачі для циліндра у вигляді [37]

$$\theta_{\mathbf{I}}(\rho, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{Bi}^* J_0(\rho æ_j) \exp(-æ_j^2 \mathrm{Fo})}{Z(æ_j)}, \qquad 0 \le \rho \le 1, \tag{8}$$

$$Z(æ_j) = J_0(æ_j)\left[(1+2\varepsilon)æ_j^2 + \left(\mathrm{Bi}^* - \varepsilon æ_j^2\right)^2\right], \tag{9}$$

де $æ_j$ − корені рівняння

$$\left(\mathrm{Bi}^* - \varepsilon æ^2\right) J_0(æ) - æ J_1(æ) = 0, \tag{10}$$

$\theta_{\mathbf{I}} = \dfrac{t_{\mathbf{I}} - t_0}{t_{\mathbf{II}} - t_0}$; $\rho = \dfrac{r}{R}$; $\mathrm{Fo} = \dfrac{a_{\mathbf{I}}\tau}{R^2}$; $\mathrm{Bi}^* = \dfrac{\mathrm{Bi}}{1 - \delta/R + \xi\,\mathrm{Bi}}$; $\mathrm{Bi} = \dfrac{\mu R}{\lambda_{\mathbf{I}}}$; $\xi = \dfrac{H^{-1}}{R/\lambda_{\mathbf{I}}}$;

$\varepsilon = \dfrac{\Omega}{\omega_{\mathbf{I}} R(1 - \delta/R + \xi\,\mathrm{Bi})}$; J_0, J_1 − функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Можна зауважити, що у випадку відсутності покриття ($\delta = 0$) формули (8)−(10) співпадають із відповідним розв'язком задачі теплопровідності для однорідного циліндра [15], а у випадку одношарового покриття ($n = 1$) ці формули співпадають із розв'язком, наведеним у [19] для випадку циліндра із однорідним покриттям.

Підставляючи (8) у формули відтворення [37]

$$t_i(r,\tau) = t_{\mathbf{I}}(R,\tau) + \lambda_{\mathbf{I}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{r - r_{i-1}}{\lambda_i} \right) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}(r,\tau)}{\partial r}\bigg|_{r=R}, \quad r_{i-1} \le r \le r_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11}$$

отримуємо вирази для температури в i-му шарі покриття:

$$\theta_i(\rho, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{Bi}^* V_i(\rho, æ_j) \exp(-æ_j^2 \mathrm{Fo})}{Z(æ_j)}, \qquad \frac{r_{i-1}}{R} \le \rho \le \frac{r_i}{R}, \tag{12}$$

$$V_i(\rho, æ_j) = J_0(æ_j) + \frac{\lambda_{\mathbf{I}}}{R} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{\rho R - r_{i-1}}{\lambda_i} \right) æ_j J_1(æ_j), \qquad \theta_i = \frac{t_i - t_0}{t_{\mathbf{II}} - t_0}.$$

Розвиваючи функції Бесселя в асимптотичні ряди [15] у виразі для зображення (7), отримуємо наступний вираз для трансформанти контактної температури при великих s:

$$\tilde{t}_{\mathbf{I}}(R,s) \approx t_{\mathbf{II}}\, h s^{-1} \left[\sqrt{\frac{s}{a_{\mathbf{I}}}} + h(1 + \chi s) - \frac{1}{2R} \right]^{-1}. \tag{13}$$

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до (13), отримуємо вирази для контактної температури при малих часах

для $\Omega \ne 0$, $\mathrm{Bi}^* \ne 1/2$:
$$\theta_{\mathbf{I}}(1,\mathrm{Fo}) \approx \frac{\mathrm{Bi}^*}{\mathrm{Bi}^* - 1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{2\Delta} \left[(1+\Delta) e^{\mathrm{Fo}_2^*} \times \operatorname{erfc}\left(\operatorname{sgn}(1-\Delta)\sqrt{\mathrm{Fo}_2^*}\right) - (1-\Delta) e^{\mathrm{Fo}_1^*} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\mathrm{Fo}_1^*}\right) \right] \right\};$$

для $\Omega \ne 0$, $\mathrm{Bi}^* = 1/2$:
$$\theta_{\mathbf{I}}(1,\mathrm{Fo}) \approx \sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}} - \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \exp\left(\frac{\mathrm{Fo}}{\varepsilon^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Fo}}}{\varepsilon}\right) \right];$$

для $\Omega = 0$, $\mathrm{Bi}^* \ne 1/2$:
$$\theta_{\mathbf{I}}(1,\mathrm{Fo}) \approx \frac{\mathrm{Bi}^*}{\mathrm{Bi}^* - 1/2} \left\{ 1 - \exp\left[(\mathrm{Bi}^* - 1/2)^2 \mathrm{Fo}\right] \times \operatorname{erfc}\left(\mathrm{Bi}^* - 1/2\right)\sqrt{\mathrm{Fo}} \right\};$$

для $\Omega = 0$, $\mathrm{Bi}^* = 1/2$:
$$\theta_{\mathbf{I}}(1,\mathrm{Fo}) \approx \sqrt{\mathrm{Fo}/\pi}. \tag{14}$$

Тут $\Delta = \sqrt{1 - 4\varepsilon(\mathrm{Bi}^* - 1/2)}$; $\mathrm{Fo}_{1,2}^* = \dfrac{(1 \pm \Delta)^2}{4\varepsilon^2} \mathrm{Fo}$.

Слід зазначити, що формула (14) для випадку $\Omega = 0$, $\mathrm{Bi}^* \neq 1/2$ за відсутності покриття ($\delta = 0$) співпадає із відповідною формулою для однорідного циліндра [15].

4. Числові результати та їх аналіз. Таким чином, формулами (8), (12) дається розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям. Його ефективність і достатню точність встановлено порівнянням з точним розв'язком цієї задачі [5] для випадку чотиришарового циліндра [37].

На основі отриманого розв'язку проведемо дослідження закономірностей процесу теплопровідності у системі тіло – багатошарове покриття. Для цього розглянемо модельну задачу для циліндра із тришаровим покриттям при таких співвідношеннях геометричних і теплофізичних параметрів різних шарів покриття:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1, \qquad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2, \qquad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1.$$

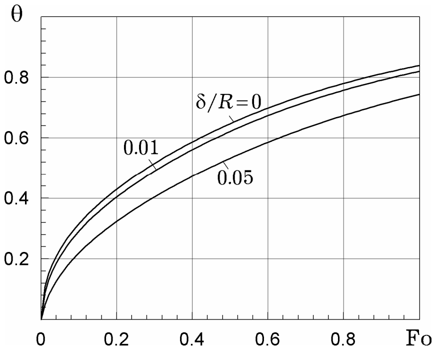

Рис. 1

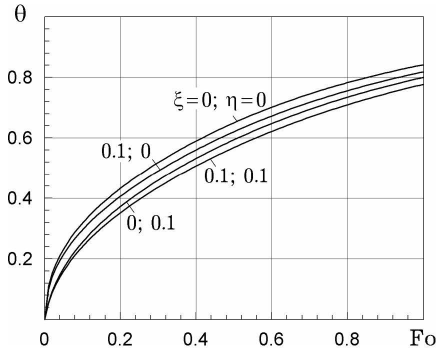

Рис. 2

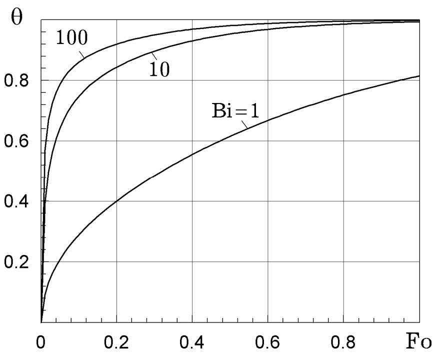

Рис. 3

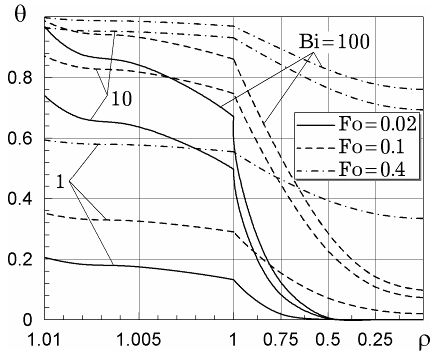

Рис. 4

На рис. 1–3 показано зміну в часі контактної температури $\theta = \theta_{\mathrm{I}}(1, \mathrm{Fo})$ на поверхні циліндр – покриття для випадків різних товщин δ/R покриття (рис. 1), в залежності від ефективного термоопору ξ та ефективної теплоємності покриття $\eta = \Omega/(\omega_{\mathrm{I}} R)$ (рис. 2), а також в залежності від параметра Bi (рис. 3).

Розрахунки для рис. 1 проведено при $\lambda_{\mathrm{I}}/\lambda_1 = 10$, $\omega_{\mathrm{I}}/\omega_1 = 1$, $\mathrm{Bi} = 1$, для рис. 2 – при $\delta/R = 0.01$, $\mathrm{Bi} = 1$, для рис. 3 – при $\lambda_{\mathrm{I}}/\lambda_1 = 10$, $\omega_{\mathrm{I}}/\omega_1 = 1$, $\delta/R = 0.01$.

Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури тіла при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем. Як і слід було очікувати, наявність покриття знижує температуру поверхні тіла (крива $\delta/R = 0$ на рис. 1 – покриття відсутнє). Зі збільшенням товщини покриття (рис. 1), зі зменшенням його теплопровідності та збільшенням теплоємності (рис. 2) зростає його термоізолююча здатність. Збільшення коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покриття приводить до інтенсифікації процесу теплопереносу (рис. 3).

На рис. 4 показано розподіл температури $\theta = \theta_{\mathbf{I}}(\rho, \mathrm{Fo})$ за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для моментів часу $\mathrm{Fo} = 0.02, 0.1, 0.4$ при значеннях $\mathrm{Bi} = 1, 10, 100$, коли $\lambda_{\mathbf{I}}/\lambda_1 = 10$, $\omega_{\mathbf{I}}/\omega_1 = 1$, $\delta/R = 0.01$.

Як бачимо на рис. 4, при більших значеннях Bi розподіл температури вздовж товщини покриття більше відхиляється від рівномірного. Зазначимо, що такий характер розподілу температури за товщиною покриття неможливо отримати за схемою «зосередженої ємності» [1].

5. Висновки. На основі аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проаналізовано вплив геометричних і теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на процес теплоперенесення у системі тіло – багатошарове покриття. У результаті проведеного дослідження виявлено, що визначальними параметрами впливу на контактну температуру є ефективні теплофізичні характеристики покриття – зведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття. Зауважимо, що отриманий замкнений аналітичний розв'язок є відносно простим і зручним для практичного використання та враховує перепад температури за товщиною покриття, що є суттєвим для подальшого розрахунку термонапруженого стану в циліндричних тілах з багатошаровими покриттями.

1. *Аттетков А. В., Беляков Н. С.* Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности // Теплофизика высоких температур. – 2006. – **44**, № 1. – С. 136–140.

   Те саме: *Attetkov A. V., Belyakov N. S.* The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating // High Temperature. – 2006. – **44**, No. 1. – P. 139–143.
2. *Аттетков А. В., Беляков Н. С., Волков И. К.* Температурное поле твердого тела, содержащего цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности, в условиях нестационарного теплообмена // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2006. – № 3. – С. 37–50.
3. *Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К.* Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инж.-физ. журн. – 2001. – **74**, № 3. – С. 81–86.

   Те саме: *Attetkov A. V., Vlasov P. A, Volkov I. K.* The temperature field of a half-space with a thermally thin coating in pulse modes of heat exchange with the environment // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2001. – **74**, No. 3. – P. 647–655.
4. *Бартенев Г. М., Жорник А. И.* Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах // Физика и химия обработки материалов. – 1972. – № 3. – С. 100–108.
5. *Вендин С. В.* О расчете нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода // Инж.-физ. журнал. – 1993. – **65**, № 2. – С. 249–251.

   Те саме: *Vendin S. V.* Calculation of nonstationary heat conduction in multilayer objects with boundary conditions of the third kind // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – **65**, No. 2. – P. 823–825.
6. *Веселовский В. Б.* Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. – Днепропетровск: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. – 436 с.
7. *Гембара В., Гембара Н.* Моделювання теплопровідності та термопружності тонких плит з багатошаровим покриттям // Зб. тез доп. 6-го Міжнар. симп. укр. інж.-механіків у Львові (21–23 травня 2003). – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – С. 150.

8. *Дяконюк Л. М., Муха І. С., Савула Я. Г.* Моделювання і дослідження тепломасо-перенесення у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 101–107.
9. *Евдокимов Д. В., Ивасишина Д. Н., Кочубей А. А., Поляков Н. В.* Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 2006. – С. 141–156.
10. *Зарубин В. С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
11. *Коляно Ю. М., Махоркин И. Н.* О приближенном определении температурных полей в сферических телах с тонкими покрытиями // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 117–123.
12. *Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.* Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 43–50.
13. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // Доп. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 26–31.
14. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.
    Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
15. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
16. *Ляшенко Б. А., Терлецький В. А., Долгов Н. А., Сорока Е. Б.* Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве // Проблемы прочности. – 1998. – № 3. – С. 128–133.
    Те саме: *Lyashenko B. A., Terletskii V. A., Dolgov N. A., Soroka E. B.* Distribution of temperature in a plate with a single layer coating subjected to intense heating // Strength of Mater. – 1998. – **30**, No. 3. – P. 787–792.
17. *Максимук О., Щербина Н.* Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 126–130.
18. *Мотовиловец И. А., Козлов В. И.* Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 263 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 1.
19. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Иващук Д. В.* Исследование напряженного состояния материала при диффузионном насыщении цилиндра с тонким покрытием // Проблемы прочности. – 1974. – **6**, № 7. – С. 3–8.
    Те саме: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Ivashchuk D. V.* Stressed state of the material in diffusion saturation of a cylinder with a thin coating // Strength of Mater. – 1974. – **6**, No. 7. – P. 787–792.
20. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
21. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Іванків К. С.* Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого циліндра з покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 45. – С. 83–88.
22. *Пудовкин М. А., Волков И. К.* Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1978. – 186 с.
23. *Равин В. С.* Об эффективных граничных условиях в задачах стационарной теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 1967. – **12**, № 4. – С. 540–541.
    Те саме: *Ravin V. S.* Effective boundary conditions in stationary heat conduction problems // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1967. – **12**, No. 4. – P. 290–291.
24. *Третьяченко Г. Н., Барило В. Г.* Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.
    Те саме: *Tret'yachenko G. N., Barilo V. G.* Thermal and stressed states of multilayered coatings // Strength of Mater. – 1993. – **25**, No. 1. – P. 34–41.
25. *Флейшман Н. П.* Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.

26. *Шевчук В. А.* Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 116–120.
    Те саме: Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin coating // J. Soviet Math. – 1996. – **81**, No. 6. – P. 3099–3102.
27. *Яцків О. І., Швець Р. М., Бобик Б. Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186–194.
28. *Al Nimr M. A., Alcam M. K.* A generalized boundary condition // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1997. – **33**, No. 1-2. – P. 157–161.
29. *Du F., Lovell M. R., Wu T. W.* Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**, No. 26-27. – P. 4557–4570.
30. *Elperin T., Rudin G.* Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1995. – **38**, No. 17. – P. 3143–3147.
31. *Grzesik W., Bartoszuk M., Nieslony P.* Finite difference analysis of the thermal behaviour of coated tools in orthogonal cutting of steels // Int. J. Machine Tools & Manufacture. – 2004. – **44**. – P. 1451–1462.
32. *Heijnen L. M., Kuijpers T. W., Klostermann J. A.* Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers // High Temperature-High Pressures. – 1988. – **20**, No. 3. – P. 305–313.
33. *Mezin A., Lepage J., Abel P. B.* An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films // Thin Solid Films. – 1996. – **272**. – P. 124–l31.
34. *Sarikaya O., Islamoglu Y., Celik E. C.* Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications // Mater. and Design. – 2005. – **26**. – P. 357–362.
35. *Savula Y. H., Dyyak I. I., Krevs V. V.* Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures // Comput. & Math. Appl. – 2001. – **42**. – P. 1201–1216.
36. *Shevchuk V. A.* Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Computer Sci. – 2002. – **2330**. – P. 500–509.
37. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system «body–multilayer coating» // Heat Transfer Research. – 2006. – **37**, No. 5. – P. 412–423.
38. *Shiah Y. C., Shi Y.-X.* Heat conduction across thermal barrier coatings of anisotropic substrates // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2006. – **33**. – P. 827–835.
39. *Zhang S., Liu Z.* An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2008. – **35**. – P. 1311–1315.
40. *Zhao J., Li Y., Ai X.* Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings // Thin Solid Films. – 2008. – **516**. – P. 7581–7587.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ

На основе аналитического решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности для цилиндра с тонким многослойным покрытием, полученного с применением обобщенных граничных условий, проведено исследование и выявлены закономерности протекания теплового процесса в теле и покрытии при нагреве внешней средой.

NONSTATIONARY ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HEAT CONDUCTION FOR CYLINDER WITH THIN MULTILAYER COATING

Based on the analytical solution of one-dimensional nonstationary problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating, obtained with the use of the generalized boundary conditions, the analysis has been performed and regularities of the heat transfer process in the body and coating under heating by external environment have been revealed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.03.10