УДК 517.98

О. М. Голубчак

ГІЛЬБЕРТОВИЙ ПРОСТІР СИМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

Розглянуто поповнення простору симетричних поліномів на ℓ_1 відносно деякої гільбертової норми і показано, що це поповнення складається з аналітичних функцій на одиничній кулі в ℓ_1.

Вступ. Нехай X – лінійний нормований простір з безумовним базисом $\{e_k\}$ над полем K.

Функцію $f : X \to K$ називають *симетричною*, якщо

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{\sigma(k)}\right)$$

для довільного $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$ і довільної підстановки σ на деякій скінченній підмножині натуральних чисел $\mathbb{N}$.

Функцію $P : X \to K$ називають *поліномом степеня* n, якщо

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_n$$

і $P_k(x) = B_k(x, x, \ldots, x)$ для кожного $1 < k \le n$ для деякої k-лінійної форми $B_k : X \times \ldots \times X \to K$. При цьому $P_0 = \text{const}$ і $P_n(x) \ne 0$.

Симетричні поліноми від скінченної кількості змінних є класичним об'єктом алгебри і комбінаторики (див. [1]). Симетричні поліноми та аналітичні функції на нескінченновимірних нормованих просторах досліджувались у роботах [1–3].

У цій роботі розглянемо поповнення алгебри симетричних поліномів на ℓ_1 відносно деякої природної гільбертової норми і дослідимо питання про область визначення елементів цього поповнення як аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних. Гільбертові простори аналітичних функцій в банаховому просторі досліджувались у [4].

1. Базиси в алгебрі симетричних поліномів. Позначимо через $P_s(X)$ алгебру всіх симетричних поліномів на X. Послідовність $\{Q_n\} \subset P_s(X)$ називають *алгебраїчним базисом* в $P_s(X)$, якщо для кожного $P \in P_s(X)$ існує поліном від скінченної кількості змінних $q(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ такий, що $P(x) = q(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_m(x))$, $x \in X$. Послідовність $\{R_n\} \subset P_s(X)$ називають *лінійним базисом* в $P_s(X)$, якщо кожен поліном $P \in P_s(X)$ подається у вигляді скінченної лінійної комбінації елементів $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$.

Позначимо через (c_{00}, Q) простір скінченних послідовностей над полем раціональних чисел Q і через $\ell_1 = (\ell_1, \mathbb{C})$ – простір абсолютно сумовних послідовностей над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Послідовності $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots, 0, \ldots)$ утворюють безумовний базис в (c_{00}, Q) і ℓ_1.

Позначимо через $P_{00} = P_s(c_{00}, Q) \otimes \mathbb{C}$ алгебру всіх комплекснозначних симетричних поліномів на (c_{00}, Q). Очевидно, що (c_{00}, Q) є підмножиною в

ℓ_1. Тому кожен поліном $P \in P_s(\ell_1)$ можна звузити на (c_{00}, Q) і це звуження, очевидно, буде належати до P_{00}. Позначимо через $Z : P_s(\ell_1) \to P_{00}$ операцію звуження.

Теорема 1. *Оператор звуження* Z *є ізоморфізмом алгебр* $P_s(\ell_1)$ і P_{00}.

Д о в е д е н н я. У роботі [3] показано, що поліноми $P_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^k$, $k = 1, 2, \ldots$, утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. З іншого боку, відомо (див., наприклад, [5]), що $p_k(x) := Z(P_k(x))$ утворюють алгебраїчний базис в P_{00}. Таким чином, Z переводить алгебраїчний базис $P_s(\ell_1)$ в P_{00}. Із загальної алгебри відомо, що Z буде ізоморфізмом алгебр.

Оскільки ізоморфізм алгебр зберігає лінійну мультиплікативну структуру, то Z^{-1} переводить лінійні базиси в лінійні базиси та алгебраїчні базиси в алгебраїчні базиси. Теорему доведено. ♦

Базиси алгебри симетричних поліномів на (c_{00}, Q) добре описані в комбінаториці [5]. Використовуючи ці результати, можемо описати лінійні та алгебраїчні базиси в $P_s(\ell_1)$.

Нехай $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ – розбиття деякого натурального числа n. Тобто $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ і $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n$. Будемо писати $|\lambda| = n$. Розбиття λ часто записують у вигляді $(1^{r_1}, 2^{r_2}, \ldots)$, де показник r_j вказує скільки разів трапляється число j у λ. Позначимо

$$m_\lambda(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_m} x_{k_1}^{\lambda_1} x_{k_2}^{\lambda_2} \ldots x_{k_m}^{\lambda_m},$$

де $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Як було зауважено, поліноми $P_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m^k$ утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. З теореми 1 і [5] маємо наступне

Твердження 1.

1°. *Поліноми* $P_\lambda = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots P_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$, *утворюють лінійний базис в* $P_s(\ell_1)$.

2°. *Поліноми* $H_n = \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda$ *утворюють алгебраїчний базис в* $P_s(\ell_1)$.

3°. *Поліноми* $H_\lambda = H_{\lambda_1} H_{\lambda_2} \ldots H_{\lambda_m}$, $|\lambda| \in \mathbb{N}$, *утворюють лінійний базис в* $P_s(\ell_1)$.

4°. *Нехай* $z_\lambda = \prod_{r \geq 1} (r^{m_r} m_r!)$. *Тоді*

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda. \tag{1}$$

2. Скалярний добуток у просторі $P_s(\ell_1)$. Означимо скалярний добуток на $P_s(\ell_1)$ так, щоб поліноми $\{P_\lambda : |\lambda| \in \mathbb{N}\}$ утворювали ортогональний базис і

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda,$$

де $\delta_{\lambda\mu}$ – символ Кронекера.

Таким чином, якщо $P(x) = \sum a_\lambda P_\lambda(x)$ і $Q(x) = \sum b_\lambda P_\lambda(x)$ – довільні симетричні поліноми, то $\langle P, Q\rangle = \sum a_\lambda b_\lambda z_\lambda$. Позначимо через $H_s(\ell_1)$ поповнення $P_s(\ell_1)$ відносно норми $\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$.

Очевидно, що значення в точці $x \in \ell_1$ породжує функціонал $\delta_x : P \to \to P(x)$, $P \in P_s(\ell_1)$. Розглянемо питання, при яких значеннях x функціонал δ_x буде неперервним.

Припустимо, що для деякого $x \in \ell_1$ функціонал δ_x є неперервним. Тоді його можна продовжити за неперервністю до лінійного функціонала на $H_s(\ell_1)$. За теоремою Рісса існує елемент $R_x \in H_s(\ell_1)$ такий, що

$$\delta_x(P) = P(x) = \langle P, R_x\rangle.$$

Знайдемо цей елемент. Якщо такий елемент R_x існує та оскільки $\frac{P_\lambda}{\|P_\lambda\|} = \frac{P_\lambda}{\sqrt{Z_\lambda}}$ – ортонормований базис в $H_s(\ell_1)$, то

$$\delta_x\left(\frac{P_\lambda}{\sqrt{Z_\lambda}}\right) = \frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{Z_\lambda}} = \left\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{Z_\lambda}}, R_x \right\rangle.$$

Тому

$$R_x = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{\sqrt{Z_\lambda}} \frac{P_\lambda(x)}{\sqrt{Z_\lambda}} = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{Z_\lambda} P_\lambda(x). \qquad (2)$$

Отже, R_x є визначеним для тих елементів x, для яких ряд (2) збігається в $H_s(\ell_1)$. Знайдемо область збіжності цього ряду.

Зауважимо, що

$$|m_\lambda(x)| \le \sup_{\|y\|_{\ell_1}\le 1} |m_\lambda(y)| \|x\|_{\ell_1}^n \le \sup_{\|y\|\le 1} \sum_{k_1\ldots k_m} \left| y_{k_1}^{\lambda_1} \ldots y_{k_m}^{\lambda_m} \right| \|x\|_{\ell_1}^n \le$$

$$\le \sup_{\|y\|\le 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \right)^n \|x\|_{\ell_1}^n = \|x\|_{\ell_1}^n,$$

де $|\lambda| = n$.

Тому, зокрема, $|P_\lambda(x)| \le \|x\|_{\ell_1}^n$. Крім того,

$$|H_n(x)| = \left| \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda(x) \right| \le \sum_{|\lambda|=n} |m_\lambda(x)| \le p(n) \|x\|_{\ell_1}^n,$$

де $p(n)$ – кількість розбиттів числа n.

Отже,

$$\|R_x\|_{H_s} = \left\| \sum_\lambda P_\lambda Z_\lambda^{-1} P_\lambda(x) \right\|_{H_s} \le \sum_n \left\| \sum_{|\lambda|=n} P_\lambda Z_\lambda^{-1} P_\lambda(x) \right\|_{H_s} \le$$

$$\le \sum_n \sum_{|\lambda|=n} \left\| \frac{P_\lambda}{Z_\lambda} \right\|_{H_s} |P_\lambda(x)| \le \sum_n \sum_{|\lambda|=n} |P_\lambda(x)| \le \sum_n p(n) \|x\|_{\ell_1}^n.$$

Оскільки $\left\| \frac{P_\lambda}{Z_\lambda} \right\|_{H_s} \le 1$, то $\|R_x\| \le \sum_n p(n) \|x\|_{\ell_1}^n$. З відомої формули Гарді – Рамануджана – Успенського маємо наступну асимптотичну оцінку для кількості розбиттів $p(n)$ числа n при $n \to \infty$: $p(n) \approx \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}}$. Тому, використовуючи формулу Коші – Адамара, радіус збіжності ряду (2) можемо оцінити так: $r \ge \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\,(p(n))^{1/n}} = 1$. Тобто ряд (2) збігається при $\|x\| \le 1,\ x \in \ell_1$.

Теорема 2. *Кожен елемент* $F \in H_s(\ell_1)$ *задає аналітичну функцію* $F(x)$ *на одиничній кулі в* ℓ_1 *за формулою*

$$F(x) = \delta_x(F) = \langle F, R_x \rangle .$$

1. *Немировский А. С., Семенов С. М.* О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1973. – **92**, № 2. – С. 257–281.
2. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic function on ℓ_1 // Bul. Lond. Mat. Soc. – 2003. – **35**. – P. 55–64.
3. *Gonzales M., Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. Lond. Math. Soc. – 1999. – **59**. – P. 681–697.
4. *Lopushansky O. V., Zagorodnyuk A. V.* Representing measures and infinite-dimensional holomorphy // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **333**, No. 2. – P. 614–625.
5. *Macdonald I. G.* Symmetric functions and orthogonal polynomials. – Providence, (RI): Amer. Math. Soc., 1998. – xv + 53 p. – Univ. Lecture Ser., Vol. 12.

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ℓ_1

Рассмотрено пополнение пространства симметрических полиномов на ℓ_1 *относительно некоторой гильбертовой нормы и показано, что это пополнение состоит из аналитических функций на единичном шаре в* ℓ_1.

HILBERT SPACE OF SYMMETRIC FUNCTIONS ON ℓ_1

The completion of the space of symmetric polynomials on ℓ_1 *with respect to the some Hilbert norm is considered. It is shown that this completion is composed from analytic functions on the unit ball in* ℓ_1.

Івано-Франківськ. коледж
Львів. нац. аграрн. ун-ту, Івано-Франківськ,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.01.10