

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН КОМПОЗИТА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ СПІВВІСНИХ ТРІЩИН НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

В рамках лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла досліджено осесиметричну задачу про руйнування попередньо напруженого композитного матеріалу з періодичною системою паралельних співвісних тріщин нормального відриву. З використанням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціалні функції та апарату інтегральних перетворень Ганкеля задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь, а потім – до розв'язувального інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контурів тріщин та для випадку шаруватого композиту з ізотропними шарами, проаналізовано їх залежності від початкових напружень, механічних характеристик компонентів матеріалу і геометричних параметрів задачі.

1. Вступ. Композиційні матеріали знаходять все більш широке застосування при виготовленні конструкційних елементів механізмів, машин та споруд. Разом з тим, в таких матеріалах і виробках з них часто виникають початкові (залишкові технологічні) поля напружень та деформацій, що зумовлено технологічними процесами їх створення та збирання [13]. Тому однією з актуальних технічних проблем є дослідження впливу зазначених початкових напружень на міцність відповідальних елементів конструкцій. Крім того, в реальних композитах технології їх виготовлення та умови експлуатації призводять до виникнення дефектів – тріщин, розшарувань, непроклеїв тощо. У випадку, коли початкові напруження діють вздовж тріщин, класичні підходи механіки руйнування виявляються непридатними, оскільки при використанні співвідношень лінійної теорії пружності компоненти зусиль, що діють уздовж тріщин, не входять до виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень і величин розкриття тріщин, а тому не враховуються класичними критеріями руйнування типу Гріффітса – Ірвіна чи критичного розкриття тріщин.

Для дослідження закономірностей впливу початкових (або залишкових) напружень на напружено-деформований стан матеріалів з тріщинами в роботах [6–9, 17] було запропоновано підхід в рамках лінеаризованої механіки деформівних тіл з початковими напруженнями. Із використанням зазначеного підходу були отримані розв'язки окремих класів статичних і динамічних задач для ізольованих та взаємодіючих тріщин в тілах з початковими напруженнями [1–5, 14, 15, 22] (див. також огляди в [18–20]). В [1, 2, 5, 16] досліджено лінеаризовані задачі для однорідних ізотропних пружних тіл з періодичними системами тріщин нормального відриву, радіального зсуву та кручення.

У пропонованій роботі розглянуто просторову осесиметричну задачу про напружено-деформований стан попередньо напруженого композитного матеріалу, що містить періодичну систему кругових тріщин нормального відриву, коли початкові напруження діють уздовж площин розташування тріщин. Досліджено тріщини, мінімальні розміри яких істотно більші від розмірів структурних елементів композиту, тобто макротріщин. Крім того, не розглядаємо процеси руйнування, в яких виявляються властивості композитів як кусково-однорідних середовищ (типу руйнування на границі розділу середовищ). За таких припущень застосовуємо відому континуальну модель композитного матеріалу зі зведеними характеристиками трансверсально-ізотропного тіла [12], площини ізотропії якого паралельні площинам розташування тріщин. Оскільки більшість композитів є відносно жорст-

кими матеріалами, будемо використовувати основні співвідношення другого варіанту теорії малих початкових деформацій (за термінологією [7, 9, 17]), для якого початковий стан, зумовлений дією початкових (залишкових) напружень і деформацій, визначається за геометрично лінійною теорією. У зв'язку з цим при використанні лінеаризованих співвідношень для збурень тензора напружень і вектора переміщень можна не робити різниці між координатами недеформованого та початково деформованого стану, а також між компонентами тензорів, що обчислюються в координатах зазначених станів.

2. Постановка задачі. Будемо досліджувати задачу в лагранжевій системі координат x_j , $j = 1, 2, 3$, які в недеформованому стані збігаються з декартовими, а також в отриманих з них кругових циліндричних координатах r, θ, x_3 . У подальшому будемо також використовувати такі позначення: σ_{ij}^0 – компоненти симетричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в недеформованому стані; λ_j – зумовлені початковими напруженнями σ_{ij}^0 коефіцієнти подовження (або скорочення) уздовж координатних осей; t_{ij} – компоненти несиметричного тензора напружень Піоли – Кірхгофа 1-го роду, віднесені до одиничних площинок тіла в недеформованому стані; u_j – компоненти відповідного їм вектора переміщень.

Розглянемо нескінченний ряд співвісних дископодібних тріщин однакового радіуса a , що розміщені в паралельних площинах $x_3 = \text{const} : \{r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, x_3 = 2hn, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (див. рис. 1).

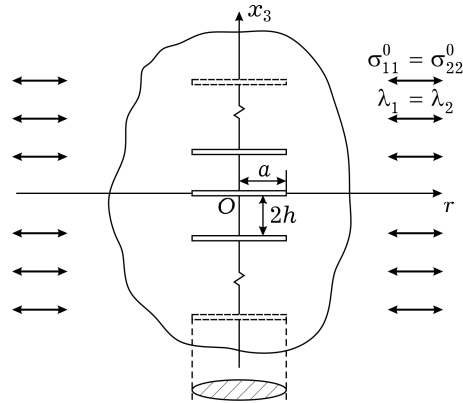


Рис. 1

У тілі під дією початкових (залишкових) напружень розтягу (або стиску) σ_{ij}^0 , які діють у площині $x_3 = \text{const}$, реалізується однорідний початковий стан з напруженнями та переміщеннями, що визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^0 &= 0, & \sigma_{11}^0 &= \sigma_{22}^0 \neq 0, & \sigma_{11}^0 &= \text{const}, \\ u_m^0 &= \delta_{jm} (\lambda_j - 1) x_j, & \lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3, & \lambda_j &= \text{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

Як і в класичній механіці руйнування без початкових напружень [21], під тріщинами нормального відриву розуміємо тріщини, до поверхонь яких симетрично відносно площин розташування тріщин прикладені нормальні навантаження. Таким чином, обмежуючись випадком осесиметричної задачі, маємо на берегах тріщин такі граничні умови:

$$t_{33} = -\sigma(r), \quad t_{3r} = 0, \quad x_3 = (2hn)_{\pm}, \quad r < a, \quad (2)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а нижніми індексами «+» та «-» позначено відповідні береги тріщин. Припускаємо, що збурення параметрів напружено-деформованого стану тіла, зумовлені додатковими навантаженнями на берегах тріщин $\sigma(r)$, суттєво менші від параметрів початкового стану, зумовленого початковими напруженнями σ_{ij}^0 , що дає змогу застосовувати для дослідження задачі лінеаризовані співвідношення [9, 17].

Враховуючи симетрію геометричної та силової схем задачі відносно площини $x_3 = 0$, а також періодичність компонент тензора напружень і вектора переміщень (з періодом $2h$) за змінною x_3 , зведемо початкову задачу для тіла з періодичною системою співвісних тріщин до задачі для шару $0 \leq x_3 \leq h$ з такими умовами на його гранях:

$$\begin{aligned} u_3 &= 0, & x_3 &= 0, & r &> a, \\ t_{33} &= -\sigma(r), & x_3 &= 0, & r &< a, \\ t_{3r} &= 0, & x_3 &= 0, & 0 \leq r < \infty, \\ u_3 &= 0, & t_{3r} &= 0, & x_3 &= h, & 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

У [7, 9] для випадку однорідного початкового стану (1) побудовано подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції; при цьому вигляд цих подань залежить від коренів характеристичного рівняння. Так, у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння ($n_1^0 \neq n_2^0$), який, як правило, реалізується для композитних матеріалів, зазначені подання в круговій циліндричній системі координат мають вигляд

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2), & u_3 &= m_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \\ t_{3r} &= C_{44}^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sqrt{n_1^0}} d_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} d_2^0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right], \\ t_{33} &= C_{44}^0 \left(d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^0 \ell_2^0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), & z_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{n_i^0}} x_3, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\varphi_j, j = 1, 2, 3$, – гармонічні потенціальні функції, що задовольняють рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_j(r, \theta, z_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

а величини $C_{44}^0, m_i^0, \ell_i^0, n_i^0, d_i^0, i = 1, 2$, визначаються вибором моделі матеріалу і залежать від початкових напружень [9]. Зокрема, для лінійної моделі трансверсально-ізотропного матеріалу, яку будемо в подальшому використовувати, маємо

$$\begin{aligned} n_{1,2}^0 &= \frac{1}{2} (\mu_{13} + \sigma_{11}^0)^{-1} (a_{11} + \sigma_{11}^0)^{-1} \{ (a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2) \pm \\ &\quad \pm [(a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2)^2 - \\ &\quad - 4(a_{11} + \sigma_{11}^0)(\mu_{13} + \sigma_{11}^0) \mu_{13} a_{33}]^{1/2} \}, \\ m_j^0 &= [(a_{11} + \sigma_{11}^0) n_j^0 - \mu_{13}] (a_{13} + \mu_{13})^{-1}, \quad C_{44}^0 = \mu_{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_j^0 &= 1 + m_j^0, & j &= 1, 2, \\
a_{11} &= E(1 - v'v'')a^{-1}, & a_{13} &= Ev'(1 + v)a^{-1}, & a_{33} &= E'(1 - v^2)a^{-1}, \\
a &= 1 - v^2 - 2v'v'' - 2vv'v'', & \mu_{12} &= G \equiv G_{12} = \frac{1}{2}E(1 + v)^{-1}, \\
\mu_{13} &= G' \equiv G_{13}, & v &\equiv v_{12}, & v' &\equiv v_{31}, & v'' &\equiv v_{13}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Підставивши подання (4) загальних розв'язків у граничні умови (3), отримуємо формулювання поставленої задачі в термінах потенціальних гармонічних функцій:

$$\begin{aligned}
m_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} &= 0, & z_1 = z_2 = 0, & r > a, \\
C_{44}^0 \left(d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^0 \ell_2^0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right) &= -\sigma(r), & z_1 = z_2 = 0, & r < a, \\
C_{44}^0 \left(d_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + d_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} \right) &= 0, & z_1 = z_2 = 0, & 0 \leq r < \infty, \\
m_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} &= 0, & z_1 = h_1, z_2 = h_2, & 0 \leq r < \infty, \\
C_{44}^0 \left(d_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + d_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} \right) &= 0, & z_1 = h_1, z_2 = h_2, & 0 \leq r < \infty, \\
h_i &\equiv h \frac{1}{\sqrt{n_i^0}}, & i &= 1, 2. \quad (6)
\end{aligned}$$

3. Отримання інтегрального рівняння Фредгольма. У подальшому будемо зводити задачу до системи парних (дуальних) інтегральних рівнянь, а потім до розв'язувального інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Для цього виразимо гармонічні потенціальні функції, що фігурують в (6), у вигляді інтегрального розкладу Фур'є – Ганкеля за координатами z_i, r :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r, z_1) &= \int_0^\infty [A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + A_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \\
\varphi_2(r, z_2) &= \int_0^\infty [B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_2 - z_2) + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_2 - z_2)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Задовольняючи ті граничні умови, які задано на всій області $x_3 = \text{const}$ (останні три із співвідношень (6)), отримуємо такі співвідношення між невідомими функціями $A_i, B_i, i = 1, 2$, що фігурують в (7):

$$A_2(\lambda) = 0, \quad B_1(\lambda) = -\frac{d_1^0 \sqrt{n_2^0}}{d_2^0 \sqrt{n_1^0}} A_1(\lambda), \quad B_2(\lambda) = 0. \quad (8)$$

Перші два із співвідношень (6) приводять до такої системи парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [1 - g(\lambda)] \lambda A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= \Sigma(r), & r &< a, \\
\int_0^\infty A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= 0, & r &> a, \quad (9)
\end{aligned}$$

де

$$g(\lambda) = \frac{1}{k} \left(k_2 \frac{e^{-\mu_2}}{\operatorname{sh} \mu_2} - k_1 \frac{e^{-\mu_1}}{\operatorname{sh} \mu_1} \right), \quad \mu_i \equiv \lambda h_i, \quad i = 1, 2,$$

$$k_1 = \frac{\ell_1^0}{\sqrt{n_2^0}}, \quad k_2 = \frac{\ell_2^0}{\sqrt{n_1^0}}, \quad k = k_1 - k_2, \quad \Sigma(r) = -\frac{k_1 \sigma(r)}{k C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0}. \quad (10)$$

Будемо розв'язувати систему парних інтегральних рівнянь (9) методом підстановки [10], вибираючи розв'язок парних інтегральних рівнянь у вигляді, який дозволяє тотожно задовольнити друге з рівнянь (9):

$$A_1(\lambda) = \int_0^a \omega(t) \sin \lambda t dt, \quad (11)$$

де $\omega(t)$ – невідома функція, неперервна разом зі своєю першою похідною на інтервалі $[0, a]$.

Тоді, підставивши подання (11) у перше з рівнянь (9), отримаємо таке співвідношення:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^a \omega(t) \sin \lambda t dt \right] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^a \omega(t) \sin \lambda t dt \right] g(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda + \Sigma(r). \quad (12)$$

Враховуючи співвідношення

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r J_1(\lambda r)] = \lambda J_0(\lambda r) \quad (13)$$

та значення розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна

$$\int_0^\infty \sin \lambda t J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < t, \\ \frac{t}{r \sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 < t < r, \end{cases} \quad (14)$$

інтеграл в лівій частині (12) зводимо до вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{t \omega(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, \quad r < a. \quad (15)$$

Помноживши обидві частини рівняння (12) на r , а потім виконавши інтегрування $\int_0^r \dots(\rho) d\rho$, отримуємо рівняння

$$\int_0^r \frac{t \omega(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = r \int_0^a \omega(t) \left[\int_0^\infty \sin(\lambda t) g(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dt - \int_0^r \rho \Sigma(\rho) d\rho.$$

Зробивши в лівій частині останнього рівняння підстановку $t = r \sin \theta$, отримуємо рівняння Шльоміляха

$$\int_0^{\pi/2} r \sin \theta \omega(r \sin \theta) d\theta = N(r), \quad r \leq a, \quad (16)$$

де

$$N(r) \equiv r \int_0^a \omega(t) \left[\int_0^\infty \sin(\lambda t) g(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dt - \int_0^r \rho \Sigma(\rho) d\rho.$$

Враховуючи, що рівняння Шльоміляха вигляду

$$\int_0^{\pi/2} f(r \sin \theta) d\theta = N(r)$$

має розв'язок

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[N(0) + x \int_0^{\pi/2} N'(x \sin \theta) d\theta \right]$$

та застосовуючи інтеграл Соніна

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta J_0(\lambda x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} J_{1/2}(\lambda x),$$

з (16) отримуємо рівняння Фредгольма другого роду

$$\omega(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \omega(t) \tilde{\mathcal{K}}(x, t) dt = \frac{1}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \sin \theta \Sigma(x \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (17)$$

де ядро має вигляд

$$\tilde{\mathcal{K}}(x, t) = \tilde{\mathcal{R}}(x - t) - \tilde{\mathcal{R}}(x + t), \quad (18)$$

де

$$\tilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{1}{k} \left[\frac{k_1}{h_1} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2h_1} \right) - \frac{k_2}{h_2} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2h_2} \right) \right],$$

а $\operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2h} \right)$ – дійсна частина від функції $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ (тут $\Gamma(z)$ – гамма-функція).

Вводячи безрозмірні змінні та функції

$$\xi \equiv a^{-1}x, \quad \eta \equiv a^{-1}t, \quad f(\xi) \equiv a^{-1}\omega(a\xi), \quad \mathcal{P}(\xi) \equiv \Sigma(a\xi), \quad (19)$$

зводимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (17) до безрозмірного вигляду

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \mathcal{P}(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1, \quad (20)$$

де ядро має вигляд

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \mathcal{R}(\xi - \eta) - \mathcal{R}(\xi + \eta), \quad (21)$$

де

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{k} \left[\frac{k_1}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) - \frac{k_2}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) \right],$$

$$\beta_1 = a^{-1}h_1, \quad \beta_2 = a^{-1}h_2.$$

4. Асимптотичний розподіл напружень в околі контуру тріщини та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. З розв'язку рівняння (20) з урахуванням (19), (11), (8), (7) та подань (4) розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції можна отримати розподіл напружень і переміщень в матеріалі. Розглянемо значення компонент тензора напружень в площині розташування тріщини $x_3 = 0$ в області поза тріщиною $r > a$. З (4) з урахуванням (7), (11), застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$t_{33}(r, 0) = C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \left\{ -\frac{\omega(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \frac{\omega(0)}{r} + \int_0^a \frac{d}{dt} [\omega(t)] \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{k} \int_0^a \omega(t) \left[\int_0^\infty \left(k_2 \frac{e^{-\mu_2}}{\operatorname{sh} \mu_2} - k_1 \frac{e^{-\mu_1}}{\operatorname{sh} \mu_1} \right) \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right] dt \right\},$$

$$t_{3r}(r, 0) = 0, \quad t_{30}(r, 0) = 0. \quad (22)$$

Як і в класичній механіці руйнування матеріалів без початкових напружень [21], коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини визначаємо як коефіцієнти при сингулярностях в розподілі відповідних компонентів тензора напружень при наближенні до контуру тріщини, тобто

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{33}(r, 0), & K_{II} &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{3r}(r, 0), \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{30}(r, 0). \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді з урахуванням (22) отримуємо такі значення для коефіцієнтів інтенсивності напружень:

$$K_I = -C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \omega(a), \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad (24)$$

де $\omega(a)$ визначається з розв'язку рівняння (17).

Переходячи в (24) до безрозмірних функцій, отримуємо

$$K_I = -C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} f(1), \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad (25)$$

де $f(1)$ визначається з розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (20).

Як бачимо, коефіцієнт інтенсивності напружень K_I залежить як від величин початкових напружень і переміщень (оскільки параметри C_{44}^0 , d_1^0 , ℓ_1^0 , k , а також функція f залежать від коефіцієнтів початкового подовження (скорочення) уздовж координатних осей λ_j , $j = 1, 2, 3$), так і від геометричних параметрів задачі (радіуса тріщин і відстані між ними).

Розглянемо граничний випадок розташування тріщин, коли відстані між ними прямують до нескінченності. Із виразів (18) для ядер інтегральних рівнянь випливає, що

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{K}(x, t) = 0. \quad (26)$$

Тоді з рівнянь (17), використовуючи заміну змінних $t = x \sin \theta$, отримуємо граничне значення функції ω :

$$\omega^\infty(x) \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} \omega(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0} \frac{k_1}{k} \int_0^x \frac{t \sigma(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt. \quad (27)$$

Підставивши співвідношення (27) у вираз (24), отримуємо наступні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для граничного випадку розташування тріщин при $h \rightarrow \infty$:

$$K_I^\infty \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t \sigma(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (28)$$

З виразів (28) бачимо, що в зазначеному граничному випадку розташування тріщин коефіцієнти інтенсивності напружень не залежать від початкових напружень та деформацій, а їх значення повністю збігаються (з точністю до позначень) зі значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманими в задачі про ізольовану тріщину нормального відриву в нескінченному матеріалі з початковими напруженнями [7, 9] і в задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному тілі в рамках механіки руйнування матеріалів без початкових напружень [21].

Зокрема, при навантаженні на берегах тріщин у вигляді $\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}$ з (28) отримуємо

$$K_I^\infty = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}}, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (29)$$

5. Закономірності впливу початкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень. Нижче наводимо результати чисельного розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку нормального навантаження на берегах тріщини вигляду (29). Для чисельного дослідження інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (20) використовували метод Бубнова – Гальоркіна з вибором системи степеневих функцій як системи координатних функцій, чисельне інтегрування проводили за квадратурними формулами Гаусса.

Для прикладу наведено результати чисельного дослідження для випадку шаруватого композиту з ізотропними шарами. У макрооб'ємах такої композит моделюють трансверсально-ізотропним середовищем [13]. Тріщини розташовані в площинах $x_3 = \text{const}$, які паралельні межах поділу шарів. У рамках теорії композитних матеріалів стохастичної структури ефективні макрохарактеристики таких композитів визначають за пружними характеристиками компонентів та їх об'ємною концентрацією в композиті [12]:

$$\begin{aligned}
 E_1^* &= \frac{4\Delta G_{12}^*}{2G_{12}^* \lambda_{33}^* + \Delta}, & E_3^* &= \frac{\Delta}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}, \\
 \nu_{13}^* &= \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}, & \nu_{12}^* &= \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1, \\
 G_{13}^* &= \lambda_{44}^*, & G_{12}^* &= \lambda_{66}^*, & \Delta &= \lambda_{33}^* (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) - 2(\lambda_{13}^*)^2, \\
 \lambda_{13}^* &= \langle \lambda \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) z, \\
 \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) &= \langle \lambda + \mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 z, \\
 \lambda_{33}^* &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - 2\mu_2) z, \\
 \lambda_{44}^* &= \mu_1 \mu_2 \mu_4^{-1}, & \lambda_{66}^* &= \langle \mu \rangle, \\
 z &= (\lambda_4 + 2\mu_4)^{-1}, & \lambda_4 &= c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1, \\
 \mu_4 &= c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1, & \langle \mathfrak{x} \rangle &\equiv c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2.
 \end{aligned} \tag{30}$$

(Шари укладено в площинах $x_1 x_2$; λ_v, μ_v – сталі Ляме v -го шару, $v = 1, 2$; c_v – об'ємна концентрація шарів з пружними властивостями λ_v, μ_v .)

Рис. 2 ілюструє залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_I^∞ (де K_I^∞ – коефіцієнт інтенсивності напружень для випадку ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі) від параметра початкового розтягу (або стиску) λ_1 , зумовленого дією початкових розтягувальних (або стискувальних) напружень σ_{11}^0 , для різних значень відносної піввідстані між тріщинами $\beta = h/a$ при відношенні модулів пружності шарів $E^{(1)}/E^{(2)} = 3$ з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ та при коефіцієнті концентрації $c_1 = 0.3$ для шарів з модулем пружності $E^{(1)}$. При цьому значення $\lambda_1 > 1$ відповідають початковим розтягувальним напруженням, значення $\lambda_1 < 1$ – початковим стискувальним напруженням; при $\lambda_1 = 1$ – початкові напруження відсутні. На рисунку бачимо, що коефіцієнти інтенсивності напружень суттєво залежать від початкових напружень.

На рис. 3 для цього ж матеріалу наведено залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_I^∞ від відношення модулів пружності ізотропних шарів $E^{(1)}/E^{(2)}$. Криві на рисунку побудовано при $\beta = 0.5$ для значень $\lambda_1 = 0.99$ (стискувальні початкові напруження), $\lambda_1 = 1.0$ (відсутні початкові напруження) та $\lambda_1 = 1.2$ (розтягувальні початкові напруження).

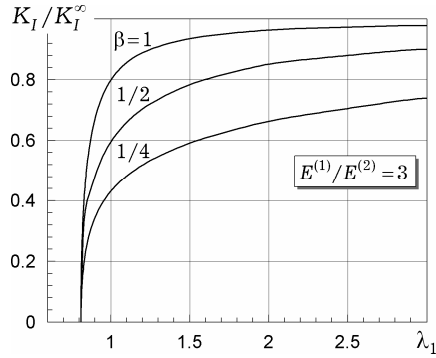


Рис. 2

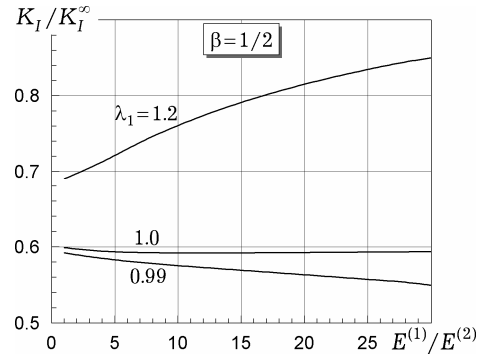


Рис. 3

Розглянемо приклад розрахунку для конкретного шаруватого композиту – алюмоборосилікатного скла в композиції з епоксидномалеїновою смолою, для якого сталі Ляме, що фігурують в (30), мають такі значення [12]

- для скла: $\lambda_1 = 1.94 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_1 = 2.92 \cdot 10^4$ МПа,
- для смоли: $\lambda_2 = 3.69 \cdot 10^3$ МПа, $\mu_2 = 1.14 \cdot 10^3$ МПа.

На рис. 4 для цього матеріалу наведено залежності K_I/K_I^∞ від безрозмірної піввідстані між тріщинами $\beta = h/a$ при коефіцієнті об'ємної концентрації скла $c_1 = 0.3$ для різних значень параметра початкового стиску (або розтягу) λ_1 . На рисунку бачимо, що аналогічно результатам, отриманим в задачі про періодичну систему тріщин в нескінченному матеріалі в рамках механіки руйнування матеріалів без початкових напружень [11], взаємовплив тріщин між собою в композиті з початковими напруженнями призводить до зменшення (особливо суттєвого при малих значеннях β) величин коефіцієнтів інтенсивності напружень порівняно з випадком ізольованої (невзаємодіючої) тріщини в нескінченному тілі.

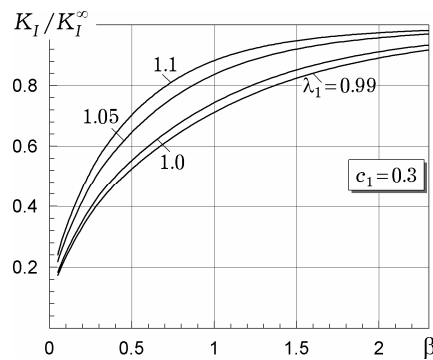


Рис. 4

Так, для $\lambda_1 = 0.99$ при $\beta = 0.05$ значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I у 5.8 разів менше, ніж значення КІН для випадку ізольованої тріщини в просторі K_I^∞ . З іншого боку, при зростанні відстані між

тріщинами їх взаємний вплив швидко послаблюється, а відповідні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для періодичної системи співвісних тріщин прянують до значень, які отримуються для ізольованої тріщини в нескінченному тілі. З точністю, придатною для практичних застосувань, зазначеною взаємодією тріщин можна нехтувати при відстанях між ними, що становлять 8 і більше радіусів тріщини, оскільки відмінність між значеннями K_I та K_I^∞ в цьому випадку для всіх розглянутих значень параметра λ_1 становить менше 5 %.

6. Висновки. На основі дослідженої в роботі задачі про напружений стан поперечно напруженого композитного матеріалу з періодичною системою паралельних співвісних дископодібних тріщин нормального відриву можна зробити наступні висновки:

– для розглянутих композитних матеріалів початкові (залишкові технологічні) напруження, що діють вздовж площин розташування тріщин, суттєво впливають на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин;

– взаємний вплив періодичної системи співвісних тріщин нормального відриву в тілі з початковими напруженнями призводить до зниження (особливо суттєвого для малих значень відстані між тріщинами) значень коефіцієнта інтенсивності напружень K_I у порівнянні зі значенням КІН K_I^∞ , що отримуються в задачі про ізольовану тріщину нормального відриву в необмеженому поперечно напруженому матеріалі;

– при зростанні відстані між тріщинами їх взаємовплив знижується, а значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин прянують до значень, що отримуються у випадку ізольованої тріщини в необмеженому матеріалі. При цьому для практичних розрахунків зазначеним взаємним впливом тріщин можна нехтувати при значеннях відстаней між тріщинами, що перевищують 8 радіусів тріщин;

– характеристики композитного матеріалу (зокрема, співвідношення між модулями пружності матеріалів шарів композиту) досить суттєво впливають на коефіцієнти інтенсивності напружень.

Слід також зазначити, що отримані у роботі результати можуть бути використані при аналізі аналогічної задачі класичної механіки руйнування матеріалів без початкових напружень, оскільки при значенні $\lambda_1 = 1.0$ наведені числові результати відповідають випадку відсутності в тілі початкових (залишкових) напружень.

1. Богданов В. Л. Кручення поперечно напруженого тіла з періодичною системою співвісних дископодібних тріщин // *Машинознавство*. – 2008. – № 4. – С. 3–7.
2. Богданов В. Л. Неосесимметричная задача о периодической системе дискообразных трещин нормального отрыва в теле с начальными напряжениями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 4. – С. 149–159.
3. Богданов В. Л. Осесимметричная задача про приповерхневу тріщину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 2. – С. 45–54.
4. Богданов В. Л. Про кругову тріщину зсуву в напівнескінченному композиті з початковими напруженнями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2007. – **43**, № 3. – С. 27–34.

Te same: Bogdanov V. L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // *Mater. Sci.* – 2007. – **43**, No. 3. – P. 321–330.

5. Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М. Напряженно-деформированное состояние материала с периодической системой соосных круговых трещин радиального сдвига при действии направленных вдоль них усилий // *Прикл. механика*. – 2010. – **46**, № 12. – С. 3–16.

Te same: Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Stress-strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 12. – P. 1339–1350.

6. Гузь А. Н. К линейризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
7. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
8. Гузь А. Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42–45.
9. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5-ти кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 2.)
10. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
11. Хай М. В., Лаушник И. П. О взаимодействии периодической системы дискообразных трещин // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 65–73.
12. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикла Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 3.)
13. Шульга Н. А., Томашевский В. Т. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: «А. С. К.», 1997. – 394 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 6.)
14. Bogdanov V. L. Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // Mech. Adv. Mater. and Struct. – 2008. – **15**, No. 6. – P. 453–460.
15. Bogdanov V. L. Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 371–384.
То саме: Bogdanov V. L. Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 176–185.
16. Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 2. – P. 111–124.
То саме: Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М. Осесимметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
17. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
18. Guz A. N. On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 8. – P. 937–941.
То же: Гузь А. Н. О некоторых неклассических задачах механики разрушения, учитывающих напряжения вдоль трещин // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 8. – С. 138–144.
19. Guz A. N., Dyshel' M. Sh., Nazarenko V. M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 12. – P. 1323–1359.
То же: Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 12. – С. 18–64.
20. Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
21. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.
22. Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H. Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – **104**. – P. 275–289.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СООСНЫХ ТРЕЩИН НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

В рамках линеаризованной механики деформируемого твердого тела исследована осесимметричная задача о разрушении предварительно напряженного композитного материала с периодической системой параллельных соосных трещин нормального отрыва. С использованием представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции и аппарата интегральных преобразований Ганкеля задача сведена к системе парных интегральных уравнений, а потом – к разрешающему интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности контуров трещин и для случая слоистого композита с изотропными слоями, проанализированы их зависимости от начальных напряжений, механических характеристик компонентов материала и геометрических параметров задачи.

INFLUENCE OF INITIAL STRESSES ON THE STRESS STATE OF COMPOSITE WITH A PERIODIC SYSTEM OF PARALLEL COAXIAL CRACKS OF NORMAL RUPTURE

Within the framework of the linearized mechanics of deformable bodies an axially symmetric problem on fracture of prestressed composite with a periodic system of parallel coaxial cracks of normal rupture is studied. Using the representations of general solutions of linearized equilibrium equations via the harmonic potential functions and technique of Hankel integral transformations the problem is reduced to a system of dual integral equations and then to solving a Fredholm second kind integral equation. The representations of the stress intensity factors near the crack edges are obtained and their dependences on the initial stresses, physical-mechanical parameters of composites and geometric parameters are investigated for laminar composites with isotropic layers.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
12.03.11