

**ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

На основі принципу спряження континуумів різної вимірності побудовано інтегральні рівняння для визначення плоского напруженого стану анізотропного пружного тіла із тонкими неоднорідностями будови матеріалу. У числовій схемі розв'язування використано метод граничних елементів і запропоновано нові базові функції для опису приторцевої ділянки неоднорідності та квадратури й нелінійні відображення для ефективного числового визначення відповідних сингулярних і гіперсингулярних інтегралів. Подані числові приклади засвідчили ефективність розробленого підходу при визначенні напруженого стану анізотропних тіл із тріщинами, тонкими пружними та жорсткими включеннями.

**Вступ.** Тонкі неоднорідності структури є одними з найпоширеніших типів дефектів конструкційних матеріалів. До них належать тріщини, тонкі плівкові прошарки, заповнені чужорідними матеріалами порожнини тощо. Часто тонкі неоднорідності свідомо впроваджують у матеріал для покращення, зміни чи підтримання на належному рівні його властивостей (наприклад, зміцнювальні волокна, платівки, наповнювачі та ін.). Із поширенням ін'єкційних технологій заліковування тріщин задача розрахунку напруженого стану тіла з включеннями з урахуванням варіювання механічних і теплофізичних характеристик наповнювача набуває все більшої ваги [6], а додаткове врахування анізотропії властивостей матеріалу є важливим аспектом при дослідженні цього комплексу задач.

На цей час достатньо повно опрацьована математична теорія тріщин в анізотропних середовищах, а докладний виклад методики розв'язування відповідних задач за допомогою інтегральних рівнянь на основі комплексних потенціалів С. Г. Лехніцького та огляд відповідних літературних джерел можна знайти у монографії [1]. Основи теорії тонких пружних прямолінійних включень, механічні властивості яких можуть змінюватися у найширшому спектрі від абсолютної податності (тріщини) до абсолютної жорсткості, в анізотропних середовищах відображено у монографії [10], де також подано широкий огляд досліджень, що стосуються цієї теми. Перші результати у цьому напрямі були отримані у працях [8, 11], причому у граничних випадках було отримано інтегральні рівняння задач про тріщину або абсолютно жорстке включення в анізотропному середовищі. Тонкі абсолютно жорсткі включення в анізотропних середовищах розглядалися також у роботах [3, 23] та ін. Так, у монографії [23] подано детальний огляд використання розвинутого пізніше *Stroh formalism*'у [22] для аналізу плоских задач теорії пружності анізотропного тіла із тріщинами чи жорсткими плівковими включеннями. Моделі податного та гнучкого прямолінійних включень в анізотропному матеріалі та розв'язки відповідних задач для безмежного середовища подано у праці [13].

Зазначені роботи, однак, обмежуються конкретними геометричними характеристиками тіла і включення чи властивостями матеріалу. Найчастіше – це прямолінійні включення в безмежних чи шаруватих ортотропних тілах. Внаслідок математичної громіздкості такого типу задач і складності розв'язування породжених ними інтегральних рівнянь узагальненого підходу дослідження тонких пружних включень в анізотропних тілах довірливої геометрії поки що не розроблено. Актуальною залишається також проблема побудови зручних для обчислювальних процедур зв'язків між узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень і функціями розриву фізико-механічних полів біля торців тонкої неоднорідності.

Метою цієї роботи є використання *Stroh formalism*'у та схеми розв'язування інтегральних рівнянь за методом граничних елементів для побудови узагальненого числово-аналітичного підходу визначення плоского напруженого стану тіл, що містять тріщини та тонкі пружні включення довільної жорсткості.

**1. Формулювання задачі та відповідні інтегральні рівняння.** Розглянемо плоский напружений стан анізотропного тіла (пластини), що містить тонке пружне включення з іншого матеріалу. Вважатимемо, що на спільній межі тіла та включення задовольняються умови ідеального механічного контакту. Виходячи із принципу спряження континуумів різної вимірності [10, 12] (рис. 1) і *Stroh formalism*'у [23], побудуємо загальну схему визначення напруженого стану такої композиції.

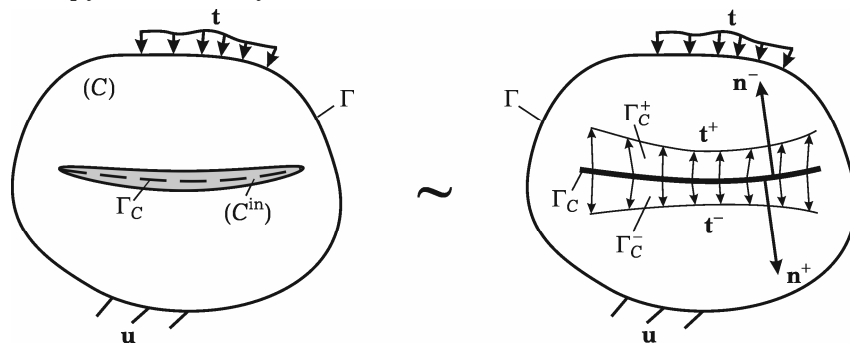


Рис. 1. Схеми задачі та підходу моделювання тонкого включення за принципом спряження.

Створюючи лінійчатую модель, як і для ізотропного тіла [9], вилучимо із розгляду включення як геометричний об'єкт, а контактні напруження та переміщення перенесемо на його серединну поверхню  $\Gamma_C$  (відповідно на береги  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ , рис. 1). Власну межу тіла позначатимемо символом  $\Gamma$ . Відповідно до підходів [5, 10] переміщення у точці  $\xi(\xi_1, \xi_2)$  тіла з розрізом визначаються з такої тотожності Сомільяни:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) u_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де  $u_i$ ,  $t_i$  – компоненти векторів переміщень і напружень;  $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$ ,  $\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$ ,  $\Sigma u_i = u_i^+ + u_i^-$ ,  $\Sigma t_i = t_i^+ + t_i^-$ ;  $t_i^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j^\pm$  ( $n_j^\pm$  – компоненти вектора нормалей  $\mathbf{n}^\pm$  до поверхонь  $\Gamma_C^\pm$ );  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ , утворених розрізом  $\Gamma_C$ . Індеси у позначеннях відповідають проєкціям векторів на осі глобальної системи координат  $Ox_1x_2$ . У формулах приймаємо правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності відповідно до залежностей *Stroh formalism*'у [23] мають вигляд

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [A_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x}, \xi)],$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ A_{i\alpha} B_{j\alpha} (n_2 - n_1 p_\alpha) \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x}, \xi)} \right]. \quad (2)$$

Тут  $Z_\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = x_1 + p_\alpha x_2 - (\xi_1 + p_\alpha \xi_2)$ . Комплексні сталі  $p_\alpha$  (із додатною уявною частиною) і матриці  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_\alpha]$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_\alpha]$  визначаються із таких рівнянь та умов нормування [23]:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^\top) + p^2\mathbf{T}\}\mathbf{a} &= 0, & \mathbf{b}_\alpha &= (\mathbf{R}^\top + p_\alpha\mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha, \\ \mathbf{B}^\top\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{B} &= \mathbf{I}, & \mathbf{B}^\top\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^\top\bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $Q_{ik} = C_{i1k1}$ ,  $R_{ik} = C_{i1k2}$ ,  $T_{ik} = C_{i2k2}$ ;  $C_{ijklm}$  – компоненти симетричного тензора ( $C_{ijklm} = C_{ijkml} = C_{kmlij} = C_{ijmkl}$ ) пружних сталей, означені виразом закону Гука  $\sigma_{ij} = C_{ijklm}u_{k,m}$ :

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}, & C_{1122} &= c_{12}, & C_{1121} &= c_{16}, \\ C_{2222} &= c_{22}, & C_{2212} &= c_{26}, & C_{1212} &= c_{66}. \end{aligned}$$

Для плоского напруженого стану сталі  $c_{ij} = c_{ji}$  є такими:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Delta}, & c_{12} &= \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Delta}, \\ c_{22} &= \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Delta}, & c_{26} &= \frac{a_{16}a_{12} - a_{11}a_{26}}{\Delta}, \\ c_{16} &= \frac{a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}}{\Delta}, & c_{66} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тут  $a_{ij}$  – коефіцієнти деформації (модулі податності) [4].

Спрямовуючи внутрішню точку  $\boldsymbol{\xi}$  до точки  $\mathbf{y} \in \Gamma$  межі тіла та вважаючи, що в точці  $\mathbf{y}$  крива  $\Gamma$  є гладкою, аналогічно до [19] із (1) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно переміщень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Sigma t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Delta u_j(\mathbf{x})]d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

де символами RPV позначено величину невласного інтеграла (Riemann principal value), CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value). Так само для точки колокації  $\mathbf{y}$ , що лежить на гладкій ділянці розрізу  $\Gamma_C$ , отримаємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Sigma t_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Delta u_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{x})]d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5)$$

При числовому моделюванні ламаних розрізів чи включень інтегральне рівняння (5) також можна використовувати, забезпечивши в обчислювальній схемі вимогу, щоб точка колокації  $\mathbf{y}$  не потрапляла у точку зламу. Диференціюючи (5) за  $y_k$  та використовуючи закон Гука з урахуванням зв'язку  $n_i^+ = -n_i^-$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta t_i(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) & \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ & - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & \left. + \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). Ядра інтегралів у (6) мають вигляд

$$\begin{aligned} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{ijpm} \frac{\partial U_{pk}}{\partial y_m} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} A_{k\alpha} \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right], \\ S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{ijpm} \frac{\partial T_{pk}}{\partial y_m} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} B_{k\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_\alpha}{[Z_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

У загальноприйнятих виразах [17, 18, 21] для ядер  $D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , крім матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$ , фігурують додатково пружні сталі  $C_{ijpm}$  матеріалу, що вимагає здійснення більшого обсягу обчислень.

Для повноти формулювання задачі до інтегральних рівнянь (5) і (6) необхідно долучити математичну модель тонкої неоднорідності (зв'язки між векторами напружень і переміщень на її протилежних поверхнях), яку, не зменшуючи загальності, можна подати у вигляді функційних залежностей

$$\Sigma u_i(\mathbf{y}) = F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma t_j, \Delta u_j), \quad \Delta t_i(\mathbf{y}) = F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma t_j, \Delta u_j), \quad i, j = 1, 2. \quad (8)$$

У цьому випадку система рівнянь (4)–(6), (8) набуде вигляду

– коли точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій поверхні  $\Gamma$  тіла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (9)$$

– коли точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій серединній поверхні  $\Gamma_C^+$  неоднорідності:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma t_j, \Delta u_j) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma t_j, \Delta u_j) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ &- \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &\left. + \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (9')$$

У такий спосіб сформульовану задачу зведено до знаходження із системи інтегральних рівнянь (9) невідомих стрибків переміщень  $\Delta u_i$  і напружень  $\Delta \sigma_{in} = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) n_j^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ + \sigma_{ij}^- n_j^- = \Sigma t_i$  на берегах математичного

розрізу  $\Gamma_C$  та не заданих крайовими умовами функцій  $u_i$  чи  $t_i$  на межі  $\Gamma$  тіла. Якщо всі крайові функції визначені, то поле переміщень можна обчислити із використанням співвідношення (1). Після диференціювання (1) легко визначити поле напружень у довільній точці  $\boldsymbol{\xi}$  тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})t_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Sigma t_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (10)$$

**2. Асимптотичні вирази для напружень та узагальнені КІН.** Доведено [10], що за ідеального контакту тонкого включення із матрицею структура розв'язку інтегральних рівнянь (9) така, що біля торців включення крайові функції змінюються як

$$\Delta u_i(s) = \Delta u_i^0 \sqrt{s} + O(s), \quad \Sigma t_i(s) = \Sigma t_i^0 \frac{1}{\sqrt{s}} + O(1), \quad (11)$$

де  $s$  – дугова координата, що відраховується від вершини неоднорідності. Зважаючи на (11) та асимптотичну поведінку сингулярних інтегралів біля вершин розімкнутої дуги [7]

$$\int_{ac} \frac{f(t) dt}{\sqrt{c-t}(t-z)} \approx -\frac{\pi f(c)}{\sqrt{z-c}}, \quad \text{коли} \quad z = c + \varepsilon e^{i\theta},$$

а також на те, що відповідно до [5] гіперсингулярний інтеграл можна обчислювати частинами, із (7) і (10) отримаємо асимптотичний розподіл напружень біля вершини тонкого включення:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \text{Im} \{ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} (1/2 B_{k\alpha} \Delta u_k^0 + A_{k\alpha} \Sigma t_k^0) [Z_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0})]^{-1/2} \}. \quad (12)$$

Вираз (12) записано для локальної системи координат, центр якої поміщено у вершину включення, а вісь  $Ox_1$  спрямовано уздовж дотичної до його серединної лінії. Матриці  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ , а також корені  $p_\alpha$  характеристичного рівняння (3) необхідно обчислювати з урахуванням орієнтації цієї локальної системи координат відносно системи, в якій обчислено пружні сталі матеріалу.

За аналогією із задачами теорії тріщин, для тонких включень також звичним є зв'язок напружень не з коефіцієнтами  $\Delta u_i^0$ ,  $\Sigma t_i^0$  при особливості крайових функцій, а з узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН) [8, 10, 11]:

$$\begin{aligned} K_{11} + K_{12} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta)|_{\theta=0}, \\ K_{21} + K_{22} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta)|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут  $r$  – відстань до вершини неоднорідності;  $\theta$  – полярний кут локальної системи координат;  $K_{ij}$  – узагальнені КІН, причому  $K_{i1} = f(\Delta u_j^0)$ ,  $K_{i2} = f(\Sigma t_j^0)$ . Для тріщини маємо  $K_{11} = K_1$ ,  $K_{21} = K_2$ ,  $K_{12} = K_{22} = 0$ , де  $K_1$ ,  $K_2$  – класичні КІН теорії тріщин.

Відповідно до означення (13) із асимптотичних виразів (11), (12) отримаємо зв'язки узагальнених КІН із крайовими функціями:

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \mathbf{S}^\top \cdot \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (14)$$

де  $\mathbf{k}^{(i)} = [K_{2i}, K_{1i}]^\top$ ;  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2]^\top$ ,  $\Sigma \mathbf{t} = [\Sigma t_1, \Sigma t_2]^\top$ ;  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$ ,  $\mathbf{S} = \sqrt{-1} (2\mathbf{A} \mathbf{B}^\top - \mathbf{I})$  – дійсні тензори Barnett – Lothe [23], що залежать лише від властивостей матеріалу і при повертанні осей координат, в яких обчислюються пружні сталі, їхні компоненти теж змінюються за тензорним законом.

Вирази (14) узгоджуються з відповідними зв'язками, отриманими в працях [8, 10, 11], і є їхнім узагальненням з позицій *Stroh formalism*'у. (Перший із виразів у (14) також збігається з відповідним для КІН тріщин, отриманим у [15, 20, 23]. Другий вираз у літературі досі не зустрічався.)

**3. Розв'язування рівнянь задачі за схемою методу граничних елементів.** Систему крайових інтегральних рівнянь (9) розв'язуватимемо методом граничних елементів [19]. Для цього криві  $\Gamma$  і  $\Gamma_C$  апроксимуємо за допомогою відповідно  $n$  і  $n_C$  прямолінійних відрізків – граничних елементів  $\Gamma_q$ . На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші – на відстані  $1/3$  довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний тривузловий граничний елемент). Тоді точка колокації завжди потраплятиме на гладку ділянку утвореного апроксимацією контуру, тобто висунуті до рівнянь (4)–(6) умови будуть забезпечені. Крайові функції  $t_j$ ,  $u_j$ ,  $\Sigma t_j$  та  $\Delta u_j$  апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями:

$$[t_j, u_j, \Sigma t_j, \Delta u_j](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [t_j^{q,p}, u_j^{q,p}, \Sigma t_j^{q,p}, \Delta u_j^{q,p}] \varphi_p(\xi).$$

Тут  $\xi$  – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку  $-1 \leq \xi \leq 1$  так:  $d\Gamma_q = \frac{L_q}{2} d\xi = J_q d\xi$ , де  $J_q$  – модуль якобіана заміни змінних на елементі  $\Gamma_q$ .

У цей спосіб система сингулярних інтегральних рівнянь (9) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень  $t_j^{q,p}$ ,  $u_j^{q,p}$ ,  $\Sigma t_j^{q,p}$ ,  $\Delta u_j^{q,p}$  крайових функцій  $t_j$ ,  $u_j$ ,  $\Sigma t_j$  та  $\Delta u_j$

– коли точка колокації  $\mathbf{x}^{s,r} \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left[ t_j^{q,p} \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - u_j^{q,p} \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left[ \Sigma t_j^{q,p} \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - \Delta u_j^{q,p} \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

– коли точка колокації  $\mathbf{x}^{s,r} \in \Gamma_C$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_i^u(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left[ t_j^{q,p} \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - u_j^{q,p} \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left[ \Sigma t_j^{q,p} \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - \Delta u_j^{q,p} \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} F_i^t(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \left[ t_k^{q,p} \int_{-1}^1 D_{ijk}(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\
& \left. - u_k^{q,p} \int_{-1}^1 S_{ijk}(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right] + \\
& + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \left[ \Sigma t_k^{q,p} \int_{-1}^1 D_{ijk}(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi - \right. \\
& \left. - \Delta u_k^{q,p} \int_{-1}^1 S_{ijk}(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \varphi_p(\xi) J_q d\xi \right] \quad (15')
\end{aligned}$$

для  $3(n + n_C)$  точок колокації  $\mathbf{x}^{s,r}$ ,  $s = 1, \dots, n + n_C$ ,  $r = 1, 2, 3$ .

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо, як і в [19], у формі поліномів Лагранжа для системи вузлів  $\xi_p = [-2/3, 0, 2/3]$  тривузлового розривного граничного елемента:

$$\varphi_1 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \varphi_2 = \left( 1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \varphi_3 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right).$$

Для підвищення точності методу та зручності визначення узагальнених КІН введемо спеціальні тривузлові розривні граничні елементи, що моделюють приторцеві ділянки тонкого включення. Відповідні базові функції, згідно з (11) і (31.18) з [10], задамо у вигляді

– для розривів переміщень:

$$\varphi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} (\sqrt{\rho})^3, \quad p = 1, 2, 3; \quad (16)$$

– для стрибків вектора напружень:

$$\varphi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} (\sqrt{\rho})^{-1} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Тут  $\rho = 1 \pm \xi$ ;  $\Phi_{pj}^{\Delta u}$ ,  $\Phi_{pj}^{\Sigma t}$  – матриці сталих, які визначаємо з рівнянь

$$\varphi_p(\xi_p) = 1, \quad \varphi_p(\xi_{j \neq p}) = 0,$$

де  $\xi_p$  – координати вузлових точок на граничному елементі.

Запропоновані базові функції (16), (17) дають можливість безпосередньо визначати за формулами (14) не тільки КІН тріщин, а й узагальнені КІН для тонких включень з довільними пружними властивостями.

При моделюванні тріщин функції (16) мають значну перевагу навіть над спеціальними функціями [18] типу  $\varphi_p = \Phi_{p1} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2} \rho + \Phi_{p3}$ , оскільки останні вводять в розриви переміщень у вершині дефекту сталу складову, що фізично не виправдано (саме тому у роботі [18] КІН визначали все ж за допомогою  $J$ -інтеграла, а не безпосередньо як коефіцієнт при  $\sqrt{\rho}$ ). У пізніших роботах (див. [17]) використано вже інші функції – типу  $\varphi_p = \sqrt{\rho} (\Phi_{p1} + \Phi_{p2} \rho + \Phi_{p3} \rho^2)$ , які при числових розрахунках майже рівноцінні виразам (16), хоча з погляду математики не зовсім коректно описують асимптотичне поведіння сингулярного інтеграла типу Коші біля кінців розімкнутої дуги.

Із введенням базових функцій (16), (17) у числовій схемі методу граничних елементів необхідно обчислювати такі сингулярні інтеграли:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^1 U(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_q)) \varphi^{\Sigma t}(\xi) d\xi, & I_2 &= \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \varphi^{\Delta u}(\xi) d\xi, \\
I_3 &= \int_{-1}^1 D(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_q)) \varphi^{\Sigma t}(\xi) d\xi, & I_4 &= \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_q)) \varphi^{\Delta u}(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

де відповідно до (2) та (7) ядра мають такі особливості:  $U \sim O(\ln|\xi - \xi_p|)$ ,  $T \sim O(|\xi - \xi_p|^{-1})$ ,  $D \sim O(|\xi - \xi_p|^{-1})$ ,  $S \sim O(|\xi - \xi_p|^{-2})$ .

При обчисленні інтегралів типу  $I_1$  продуктивними виявилися нелінійні відображення [16]. Однак вони згладжують підінтегральний вираз лише в особливій точці  $\xi_p$ , а не на кінцях проміжку інтегрування, що необхідне при використанні базових функцій (17). Тому при обчисленні інтеграла  $I_1$  доцільно інтервал розбити особливою точкою на два і нормувати ці проміжки інтегрування до інтервалу  $(0, 1)$  так, щоб особлива точка потрапляла в точку  $\xi = 0$ . Після цього проміжок інтегрування відображається в себе за допомогою перетворення

$$\xi = 3s^2 - 2s^3, \quad d\xi = 6(s - s^2)ds,$$

що згладжує підінтегральний вираз на обох кінцях проміжку інтегрування.

Для обчислення сингулярних інтегралів  $I_2, I_3, I_4$  побудовано спеціальні квадратури інтерполяційного типу із чебишевськими вузлами:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} f(\sigma_k), \quad \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} f(\sigma_k), \quad (18)$$

де  $\sigma_k = \cos([(2k-1)\pi]/(2n))$  – нулі поліномів Чебишева;  $n$  – парне додатне ціле число; інтеграли записано в сенсі головного значення чи скінченної частини. Квадратури (18) є точними, коли  $f(s)$  є поліномом степеня, меншого ніж  $n$ .

При обчисленні сингулярних і гіперсингулярних інтегралів за квадратурами (18) запропоновано використовувати нелінійне відображення

$$\xi = \mu(s) = \xi_p + (1 + (-2\xi_p + (1/2 + (\xi_p - s/2)s)s)s), \quad (19)$$

яке з огляду на властивості

$$\begin{aligned} \mu(\pm 1) &= \pm 1, & \mu(0) &= \xi_p, & \mu'(s)|_{s=\pm 1} &= 0, \\ |\mu(s)| &< 1, & -1 &< s < 1, & \xi_p &= [-2/3, 0, 2/3] \end{aligned}$$

дає можливість згладити підінтегральний вираз біля кінців проміжку інтегрування, а також перенести особливу точку  $\xi_p$  в точку  $s = 0$ . Із використанням відображення (19) і спеціальних квадратур (18) інтеграли  $I_2, I_3, I_4$  обчислюються так:

$$\begin{aligned} \{I_2, I_3\} &= \int_{-1}^1 \{T, D\}(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-1}^1 \{T, D\}(\mathbf{x}(\mu(s)), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi(\mu(s))\mu'(s) ds \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} \{T, D\}(\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi(\mu(\sigma_k))\sigma_k\mu'(\sigma_k), \\ I_4 &= \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi^{\Delta u}(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(\mu(s)), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi^{\Delta u}(\mu(s))\mu'(s) ds \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} S(\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\xi_p))\varphi^{\Delta u}(\mu(\sigma_k))\sigma_k^2\mu'(\sigma_k). \end{aligned}$$



**4. Модель тонкого пружного включення.** Придатну до впровадження у числову схему (15') модель тонкого ізотропного пружного включення за його ідеального механічного контакту із оточуючим ізотропним середовищем запропоновано у роботі [9]. Ця модель із додатковим урахуванням ефекту згину й анізотропії матеріалів матриці та включення набуде вигляду

$$\begin{aligned}
F_i^t(\mathbf{x}^{k,r}) &= -\alpha_{pi}\alpha_{qj}M_{pq}\Delta u_j^{k,r}, \\
\frac{1}{2}F_i^u(\mathbf{x}^{k,r}) &= u_i^0 + \omega^0 \left[ \sum_{s=1}^{k-1} 2J_s n_i^s + J_k n_i^k (\xi_r + 1) \right] + \\
&+ \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{pi}^s \alpha_{qj}^s N_{pq} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^s(\zeta) d\zeta d\eta + \\
&+ \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k N_{pq} J_k^2 \int_{-1}^{\xi_r} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + \\
&+ 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \alpha_{pi}^m \alpha_{qj}^m N_{pq} \left( 2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) + \\
&+ (\xi_r + 1) J_k \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k N_{pq} \left( 2h\sigma_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) - \\
&- \frac{2}{D} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{s-1} J_s J_m n_i^s \int_{-1}^1 M^m(\xi) d\xi - \\
&- \frac{(\xi_r + 1)}{D} J_k n_i^k \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 M^s(\xi) d\xi - \\
&- \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{k-1} n_i^s J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} M^s(\zeta) d\zeta d\eta - \frac{n_i^k J_k^2 \xi_r}{D} \int_{-1}^{\eta} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta, \quad (20)
\end{aligned}$$

де компоненти тензора повертання  $\boldsymbol{\alpha}$  дорівнюють  $\alpha_{11} = n_1$ ,  $\alpha_{12} = n_2$ ,  $\alpha_{21} = -n_2$ ,  $\alpha_{22} = n_1$ , а компоненти тензорів  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  означені так:  $M_{11} = E_1^{\text{in}}/h$ ,  $M_{22} = G_1^{\text{in}}/h$ ,  $M_{12} = M_{21} = 0$ ;  $N_{11} = 1/(2hG_2^{\text{in}})$ ,  $N_{22} = 1/(2hE_2^{\text{in}})$ ,  $N_{12} = N_{21} = 0$ ;  $E_1^{\text{in}}$ ,  $G_1^{\text{in}}$  – модулі пружності та зсуву матеріалу включення у напрямі, перпендикулярному до його серединної лінії,  $E_2^{\text{in}}$ ,  $G_2^{\text{in}}$  – відповідні для напрямку вздовж серединної лінії;  $D$  – згинальна жорсткість;  $h$  – півтовщина включення;  $M^k(\xi)$  – згинальний момент у  $k$ -му граничному елементі включення в точці  $\mathbf{x}^k(\xi)$ . Змінюючи відповідним чином компоненти тензорів  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  і згинальну жорсткість  $D$ , за допомогою моделі (20) можна описувати не тільки ізотропні ( $E_1^{\text{in}} = E_2^{\text{in}}$ ,  $G_1^{\text{in}} = G_2^{\text{in}}$ ), а й анізотропні тонкі пружні включення.

Середні значення переміщень  $u_i^0$  та кута малого повертання  $\omega^0$  лівого торця включення визначаємо з рівнянь глобальної рівноваги включення:

$$2h(\sigma_j^n - \sigma_j^0) - \int_{\Gamma_C} \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad M^n(1) + M_n = 0. \quad (21)$$

Відповідно до підходів теорії тонких дефектів [10] для повністю заглиблених у матрицю включень сталі  $\sigma_j^0$ ,  $\sigma_j^n$ , як правило, задають наближеними апріорними залежностями (часто вважають нульовими). Стосовно торцевих моментів  $M_0$ ,  $M_n$ , то очевидно, що внаслідок тонкості включення в межах парадигми симетричної теорії пружності їх слід вважати нульовими.

### 5. Числові приклади.

**Нахилена тріщина в прямокутній пластині.** Одним із граничних випадків пружного включення є тріщина (включення нульової жорсткості). Для аналізу ефективності застосування базових функцій (16) при моделюванні вершини тріщини розглянемо задачу про нахилена під кутом  $45^\circ$  до осі  $Ox_1$  центральну тріщину в прямокутній пластині зі склопластику (рис. 2). Пружні характеристики склопластику такі [21]:  $E_1 = 48.26$  ГПа;  $E_2 = 17.24$  ГПа;  $\nu_{12} = 0.29$ ;  $G_{12} = 6.89$  ГПа. Пластинка розтягується уздовж осі  $Ox_2$  рівномірно розподіленим на її сторонах навантаженням. Відношення довжини тріщини та висоти пластини до довжини пластини відповідно дорівнюють  $a/b = 0.2$  і  $d/b = 2$ . Кут орієнтації волокон змінювали від  $\Psi = 0^\circ$  до  $\Psi = 180^\circ$ . Коефіцієнти інтенсивності напружень обчислювали за допомогою розробленого підходу із використанням базових функцій (16) і формул (14). Як і в [17, 18], тріщину моделювали за допомогою лише 10, а межу пластинки – 32 граничних елементів. Порівняння результатів розрахунків нормованих КІН  $K_i^* = K_i/(q\sqrt{pa})$  із даними методу колокацій [14], методу граничних елементів без використання спеціальних базових функцій на приторцевих елементах [21] та з ними [17, 18] зведено до табл. 1. Кількість граничних елементів, використаних для моделювання задачі, у роботі [21] не подано.

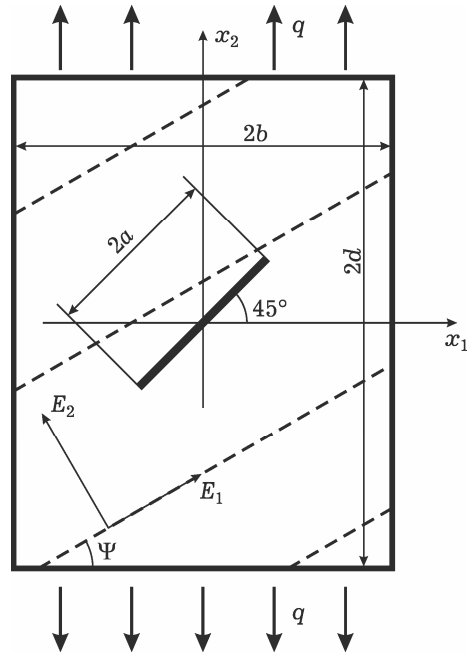


Рис. 2. Тріщина в прямокутній анізотропній пластині.

Табл. 1. Нормовані КІН для тріщини в анізотропній прямокутній пластині

| $\Psi, ^\circ$ | [21]    |         | [18]    |         | [14]    |         | [17]    |         | (15)–(20) |         |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|---------|
|                | $K_1^*$ | $K_2^*$ | $K_1^*$ | $K_2^*$ | $K_1^*$ | $K_2^*$ | $K_1^*$ | $K_2^*$ | $K_1^*$   | $K_2^*$ |
| 0              | 0.517   | 0.506   | 0.519   | 0.504   | 0.522   | 0.507   | 0.5228  | 0.5076  | 0.5227    | 0.5078  |
| 45             | 0.513   | 0.502   | 0.516   | 0.505   | 0.515   | 0.505   | 0.5153  | 0.5048  | 0.5155    | 0.5049  |
| 90             | 0.515   | 0.510   | 0.537   | 0.532   | 0.513   | 0.509   | 0.5133  | 0.5090  | 0.5133    | 0.5090  |
| 105            | 0.518   | 0.512   | 0.507   | 0.502   | 0.517   | 0.510   | 0.5165  | 0.5107  | 0.5165    | 0.5107  |
| 120            | 0.526   | 0.513   | 0.520   | 0.508   | 0.524   | 0.512   | 0.5240  | 0.5117  | 0.5240    | 0.5118  |
| 135            | 0.535   | 0.514   | 0.532   | 0.511   | 0.532   | 0.511   | 0.5316  | 0.5111  | 0.5316    | 0.5112  |
| 180            | 0.517   | 0.506   | 0.519   | 0.504   | 0.522   | 0.507   | 0.5228  | 0.5076  | 0.5227    | 0.5078  |

Із табл. 1 видно добру узгодженість результатів розрахунків КІН запропонованим підходом із даними методів колокації [14] та граничних елементів із використанням базових функцій типу  $\varphi_p = \sqrt{\rho} (\Phi_{p1} + \Phi_{p2}\rho + \Phi_{p3}\rho^2)$  [17]. Це свідчить про високу точність запропонованого підходу, адже зрозуміло, що методи, які не використовують спеціальних базових функцій [21], або вживають функції типу  $\varphi_p = \Phi_{p1}\sqrt{\rho} + \Phi_{p2}\rho + \Phi_{p3}$  [18] мають більшу похибку обчислень, аніж метод колокацій із виділенням особливості [14].

Дані табл. 1 вказують також на те, що анізотропія матеріалу незначно впливає на КІН прямолінійних тріщин у відносно великих тілах (для необмеженого середовища вона така ж, як і в ізотропному матеріалі [10]), натомість для тонких пружних включень спостерігається протилежна картина.

**Прямолінійне абсолютно жорстке включення.** Розглянемо безмежну анізотропну пластину з тонким прямолінійним абсолютно жорстким включенням, розташованим уздовж відрізка  $[-a, a]$  осі  $Ox_1$ . Відповідно до (9') та (20) задача зводиться до розв'язування інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Sigma t_i(x)}{x - \xi} dx = 2H_{ij}^{-1} c_j \quad (22)$$

за умов рівноваги (21), що можна записати у формі

$$\int_{-a}^a \Sigma t_i(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a \Sigma t_2(x)(a - x) dx = 0. \quad (23)$$

Тут  $\mathbf{H} = 2\sqrt{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^\top$  – третій дійсний тензор Barnett – Lothe [23];  $c_j = -\delta_{j2} \omega^0 - u_{j,1}^\infty$ ;  $u_{j,1}^\infty$  – сталі деформації однорідної пластинки без включення. Розв'язок рівняння (22) за умов (23) має вигляд [2]

$$\Sigma t_i(x) = \frac{2xH_{ij}^{-1}c_j}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a < x < a. \quad (24)$$

Аналогічний розв'язок, проте без визначення узагальнених КІН, подано також в [23]. Зважаючи на залежності (14), із (24) тепер їх можна легко отримати:

$$\mathbf{k}^{(2)} = -\sqrt{\pi a} \mathbf{S}^\top \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}. \quad (25)$$

Використавши другу з умов (23), отримаємо рівняння для визначення кута  $\omega^0$  малого повертання включення

$$H_{2j}^{-1} c_j = 0.$$

Вираз (25) повністю узгоджується з відповідними залежностями [8] і (35.47) з [10], отриманими з використанням комплексних потенціалів С. Г. Лехніцького.

Для дослідження точності числової схеми при застосуванні базових функцій (17) визначимо узагальнені КІН для жорсткого включення за розробленим підходом (15)–(20) та за аналітичною формулою (25). Матеріал пластинки такий же, як і в попередньому прикладі. На безмежності навантаження задане компонентами тензора напружень  $\sigma_{22}^\infty = q$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$ . У числовій моделі використано 21 граничний елемент. Результати розрахунків зведено до табл. 2.

Табл. 2. Значення нормованих КІН  $K_{i2}^* = K_{i2}/(q\sqrt{\pi a})$  для абсолютно жорсткого включення за різної орієнтації осей ортотропії основного матеріалу

| $\Psi, \circ$ | $100 K_{12}^*$ |       | $100 K_{22}^*$ |        |
|---------------|----------------|-------|----------------|--------|
|               | числово        | (25)  | числово        | (25)   |
| 0             | 2.779          | 2.779 | 0.000          | 0.000  |
| 45            | 9.068          | 9.067 | 2.283          | 2.283  |
| 90            | 2.779          | 2.779 | 0.000          | 0.000  |
| 105           | 4.351          | 4.351 | -0.450         | -0.450 |
| 120           | 7.496          | 7.495 | -1.452         | -1.452 |
| 135           | 9.068          | 9.067 | -2.283         | -2.283 |
| 180           | 2.779          | 2.779 | 0.000          | 0.000  |

Дані табл. 2 засвідчують високу ефективність розробленого числового підходу і для моделювання тонких жорстких включень. Похибка запропонованого методу є близькою до нуля. Також із табл. 2 видно, що, на відміну від тріщин, анізотропія матеріалу завжди чинить істотний вплив на концентрацію напружень поблизу вершин тонких жорстких включень. Залежно від кута орієнтації осей ортотропії матеріалу відносно серединної лінії включення узагальнені КІН змінюються для розглянутого навантаження та пружних сталей більше, ніж у 3 рази.

**Тонке ізотропне пружне включення.** Розглянемо пластинку з тонким ізотропним пружним включенням, розташованим уздовж відрізка  $[-a, a]$  осі  $Ox_1$ . Пружні сталі пластинки такі ж, як і у двох попередніх прикладах. Кут  $\Psi$  орієнтації осей ортотропії відносно системи координат  $Ox_1x_2$  дорівнює  $45^\circ$ . На безмежності діє навантаження  $\sigma_{22}^\infty = \sigma_{12}^\infty = q$ ,  $\sigma_{11}^\infty = 0$ . Коефіцієнт Пуассона матеріалу включення дорівнює  $\nu^{\text{in}} = \nu_{12}$ . Півтовщину включення вважали рівною  $h = 0.01a$ . Схему задачі та нормовані значення узагальнених КІН  $K_{ij}^* = K_{ij}/(q\sqrt{\pi a})$  залежно від параметра  $k = G^{\text{in}}/G_{12}$  відносної жорсткості включення зображено на рис. 3.

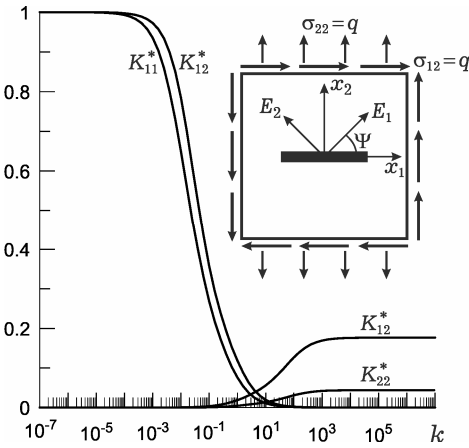


Рис. 3. Залежність узагальнених КІН від параметра  $k$  відносної жорсткості включення.

При  $k = 10^{-7}$  відхилення узагальнених КІН від відповідних значень КІН для тріщини не перевищує 0.04%. Для  $k = 10^7$  відповідні відхилення від узагальнених КІН (25) абсолютно жорсткого включення менші від 0.01%. Порівняно з випадком ізотропної матриці узагальнений КІН  $K_{12}$  приблизно удвічі більший. Крім цього, ненульовим є КІН  $K_{22}$ , який для однорідного навантаження ізотропної пластини із включенням, що має можливість повертатися, дорівнює нулеві.

**Висновки.** Розроблений підхід дає можливість досліджувати плоский напружений стан анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями у широкому спектрі зміни пружних властивостей останніх – від тріщин до абсолютно жорстких включень. Цьому сприяють введені нові базові функції для моделювання приторцевих елементів тонких неоднорідностей, а також побудовані квадратури та нелінійні відображення, що дають можливість ефективно обчислювати відповідні сингулярні та гіперсингулярні інтеграли. Отримані з використанням *Stroh formalism*'у і тензорів Barnett – Lothe зв'язки узагальнених КІН із крайовими функціями біля вершин тонкої неоднорідності значно спрощують процедуру визначення КІН і дають можливість отримати компактну форму розв'язку задачі для абсолютно жорсткого прямолінійного включення в анізотропному середовищі.

Числові приклади засвідчили високу ефективність розробленого загального підходу, а також підтвердили важливість врахування анізотропних властивостей матеріалу при дослідженні напруженого стану тіл із тонкими пружними включеннями.

1. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: У 2 т. – Луцьк: Надстир'я, 2007.
2. *Газов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Денисюк І. Т.* Пружна рівновага тіла з негладким включенням. – Луцьк: Ред.-вид. відділ Луцьк. держ. техн. ун-ту, 2004. – 220 с.
4. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
5. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – Санкт-Петербург: Наука, 1999. – 382 с.
6. *Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П.* Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 262 с.
7. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
8. *Павльчико В. М., Сулим Г. Т.* Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. – Львов, 1987. – 11 с. – Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 330-B87.
9. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.* Дуальный метод граничных элементов для задач теории тонких включений // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 46–57.  
 Те саме: *Pasternak Ia. M., Sulym H. T.* Dual boundary element method for problems of the theory of thin inclusions // J. Math. Sci. – 2011. – **178**, No. 4. – P. 421–434.
10. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
11. *Сулим Г. Т., Шевчук С. П.* Плоска задача для кусково-однорідного анизотропного тіла зі стрічковим пружним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 6. – С. 7–16.  
 Те саме: *Sulym H. T., Shevchuk S. P.* Plane problem for a piecewise-homogeneous anisotropic body with elastic inclusion in the form of a strip // Mater. Sci. – 1999. – **35**, No. 6. – P. 757–769.
12. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. – Москва: Наука, 1983. – 296 с.
13. *Fan H., Keer L. M.* Two-dimensional line defects in anisotropic elastic solids // Int. J. Fract. – 1993. – **62**. – P. 25–42.
14. *Gandhi K. R.* Analysis of an inclined crack centrally placed in an orthotropic rectangular plate // J. Strain Anal. Eng. Des. – 1972. – **7**. – P. 157–162.
15. *Hoening A.* Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body // Eng. Fract. Mech. – 1982. – **16**. – P. 393–403.
16. *Johnston P. R., Elliott D.* Transformations for evaluating singular boundary element integrals // J. Comp. Appl. Math. – 2002. – **146**. – P. 231–251.
17. *Pan E.* A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics // Int. J. Fract. – 1997. – **88** – P. 41–59.
18. *Pan E., Amadei B.* Fracture mechanics analysis of 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method // Int. J. Fract. – 1996. – **77**. – P. 161–174.
19. *Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – **33**. – P. 1269–1287.
20. *Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. – 1965. – **3**. – P. 189–203.
21. *Sollero P., Aliabadi M. H.* Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method // Compos. Struct. – 1995. – **31**. – P. 229–233.
22. *Stroh A. N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. – 1962. – **41**. – P. 77–103.
23. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: Theory and applications. – New York: Oxford Univ. Press. – 1996. – xvii + 570 p.

## **ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ТОНКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

*На основе принципа сопряжения континуумов разной размерности построены интегральные уравнения для определения плоского напряженного состояния анизотропного упругого тела с тонкими неоднородностями строения материала. В численной схеме решения использован метод граничных элементов и предложены новые базовые функции для моделирования торцевых участков неоднородности, а также квадратуры и нелинейные отображения для эффективного численного определения соответствующих сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Численные примеры показали эффективность разработанного подхода при определении напряженного состояния анизотропных тел с трещинами, тонкими упругими и жесткими включениями.*

## **PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR ANISOTROPIC SOLIDS CONTAINING THIN ELASTIC INCLUSIONS**

*Basing on the coupling principle for continua of different dimension the integral equations for the determination of plane stress state of anisotropic solid containing thin inhomogeneities of material structure are constructed. For numerical solution of these equations the boundary element method procedure is used. New shape functions for inhomogeneity ends modeling are introduced. The interpolation quadratures and polynomial transformations are adopted for efficient numerical evaluation of corresponding singular and hypersingular integrals. Numerical examples show high efficiency of the developed approach for determination of the stress state of anisotropic solids, which contain cracks, thin elastic and rigid inclusions.*

Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк

Одержано  
10.09.10