

**ДО ВИБОРУ КРАЙОВИХ УМОВ У ЗАДАЧАХ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОГО ПІДХОДУ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ**

*У рамках локально градієнтного підходу в термомеханіці сформульовано ключові системи рівнянь математичної моделі, що описує поведінку пружних тіл із урахуванням ефектів локальної неоднорідності. При цьому за ключові функції вибрано як вектори переміщення та локального зміщення маси, так і тензор напружень і вектор локального зміщення маси. На цій основі отримано та проведено аналіз розв'язків задач про рівноважний стан розтягнутого шару. Обговорено проблему вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу. Вказано на істотну залежність розмірних ефектів, у тому числі межі міцності, від крайових умов, а також на фізичну обґрунтованість задання на поверхні тіла густини чи дивергенції вектора локального зміщення маси.*

**Вступ.** Протягом останніх десятиліть широкого розвитку набули дослідження у рамках нелокальної теорії пружності та нелокальних моделей механіки суцільного середовища [14–21, 23–26]. Це зумовлено інтенсивним розвитком нанотехнологій і широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових та тонковолокнистих систем. Одним із ефективних підходів до побудови нелокальних моделей є локально градієнтний підхід у термомеханіці [1, 5, 6, 8, 11], який базується на основних положеннях термодинаміки нерівноважних процесів. У рамках цього підходу простір параметрів локального стану розширено хімічним потенціалом та спряженим до нього параметром – густиною. Таке розширення може бути виконано як введенням у розгляд вектора локального зміщення маси та спряженого до нього параметра – градієнта хімічного потенціалу [1, 6], так і вибором незатухаючої пам'яті у реологічному кінетичному рівнянні для вектора потоку маси [9].

На основі моделей, побудованих за локально градієнтного підходу, на прикладі модельних задач проведено широкий комплекс досліджень зв'язаних процесів у пружних, термопружних, електропровідних неферромагнітних твердих тілах і твердих розчинах [4, 6, 22]. При цьому при формулюванні крайових задач на поверхні тіла задавали постійне значення хімічного потенціалу. Разом з тим невирішеним залишається питання розробки фізично обґрунтованого способу експериментального чи теоретичного визначення поверхневого значення хімічного потенціалу. У роботі [6] вказано на те, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити із збуренням енергії зв'язку. Тому слід чекати, що в процесі деформування поверхневе значення хімічного потенціалу буде змінюватися.

Метою цієї роботи є дослідження проблеми крайових умов у задачах для моделей, побудованих за локально градієнтного підходу в термомеханіці, а також вивчення їх впливу на ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю.

**1. Ключова система рівнянь.** Об'єктом дослідження є пружне деформівне тверде тіло, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем. За початковий (відліковий) стан тіла приймаємо однорідний стан, який відповідає стану необмеженого середовища за відсутності зовнішньої дії. Відліковий стан характеризуємо хімічним потенціалом  $\eta_*$  і густиною  $\rho_*$ , питомим тиском  $P_*$  і питомим об'ємом  $V_* = \rho_*^{-1}$ .

Ключова система рівнянь для такого тіла, записана відносно вектора переміщення  $\mathbf{u}$  та вектора локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$  за відсутності масових сил і при нехтуванні відмінністю між лагранжевими та ейлеровими

змінними, має вигляд [2, 3]

$$G\Delta\mathbf{u} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\beta\nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M),$$

$$\alpha\nabla(-\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M) + \gamma\mathbf{\Pi}_M = \beta\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{u}$  – вектор переміщення;  $\mathbf{\Pi}_M = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{J}_M d\tau$  – вектор локального зміщення

маси;  $\mathbf{J}_M$  – потік маси, спричинений локальним зміщенням маси;  $K, G$  – модулі об'ємного стиску та зсуву;  $\alpha, \beta, \gamma$  – характеристики матеріалу;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\nabla$  – диференціальний оператор Гамільтона;  $\tau$  – час.

У випадку задання граничних умов на напруження за ключові функції вибираємо тензор напружень  $\hat{\sigma}$  та вектор локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$ . Тоді система рівнянь моделі є такою:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0,$$

$$\nabla \times \left\{ \hat{\sigma} + \frac{1}{3K} \left[ 2G \frac{P_*}{\rho_*} - \left( K - \frac{2}{3}G \right) \sigma - 2G\beta(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M) \right] \hat{I} \right\} \times \nabla = 0,$$

$$3(\beta^2 - \alpha K)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M) + 3K\gamma\mathbf{\Pi}_M - \beta\nabla\sigma = 0, \quad (2)$$

де  $\hat{\sigma}$  – тензор напружень Коші;  $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \hat{I}$ ;  $\hat{I}$  – одиничний тензор; « $\times$ » – символ векторного добутку.

При формулюванні крайових задач математичної фізики систему рівнянь (1) чи (2) слід доповнити відповідними граничними умовами та при необхідності – умовами обмеженості розв'язку. Граничні умови для тензора напружень і вектора переміщень приймемо у класичному для теорії пружності вигляді. При формулюванні умов на вектор локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$  використаємо наступні міркування. На основі рівняння балансу маси, враховуючи однорідний початковий стан тіла, для вектора локального зміщення маси можемо записати [6]

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M = \rho - \rho_*.$$

Оскільки густина є осередненою характеристикою, то експериментальне визначення її поверхневого значення є неможливим. Для задання такого значення використаємо уявлення про реальну структуру поверхні. Схематично її можна подати, як на рис. 1.

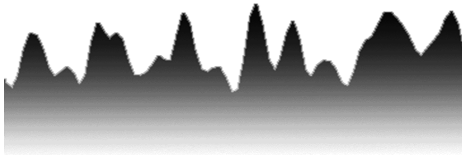


Рис. 1

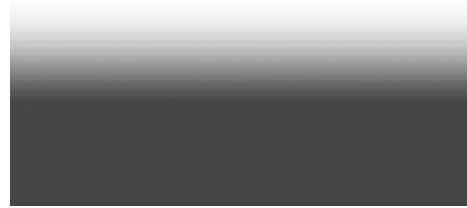


Рис. 2

У машинобудуванні для опису властивостей поверхні широко використовують такі параметри як середнє арифметичне відхилення профілю та висота нерівностей профілю по десяти точках, які лежать переважно у діапазоні від кількох сотих до кількох десятків мікрометрів [7]. Сучасні ж технології обробки матеріалів для виробництва комп'ютерних жорстких дисків вимагають шорсткості поверхні на рівні кількох нанометрів [13, с. 223]. В механіці деформівного твердого тіла ідеалізується поняття поверхні тіла і, в основному вона моделюється гладкою поверхнею. Так, у випадку півпро-

сторю такою поверхнею приймають площину. Оскільки будемо працювати з осередненими характеристиками, то, прийнявши, що поверхня тіла проходить через найбільшу висоту профілю реальної поверхні, природно буде вважати, що густина на цій поверхні дорівнює нулеві ( $\rho = 0$ ). У такому наближенні густина з глибиною півпростору зростає від нульового поверхневого значення до  $\rho_*$ , що схематично ілюструє рис. 2. Тому для вектора локального зміщення маси на поверхні тіла  $\partial V$  можемо записати умову

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M \Big|_{\partial V} = -\rho_*.$$

Не зменшуючи загальності, надалі для поверхневого значення збурення густини приймемо

$$(\rho - \rho_*) \Big|_{\partial V} = \rho_a.$$

Це означає, що для вектора локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$  на поверхні тіла справджується умова

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M \Big|_{\partial V} = \rho_a.$$

Використаємо записані співвідношення для вивчення впливу граничних умов на приповерхневу неоднорідність і міцність розтягнутого шару.

**2. Рівноважний стан розтягнутого шару.** Розглянемо необмежений пружний шар, що займає область  $|x| \leq \ell$  у прямокутній декартовій системі координат  $(x, y, z)$ . Вважаємо, що при  $y \rightarrow \pm\infty$  до шару прикладене силове навантаження інтенсивності  $\sigma_a$ . Поверхні шару  $x = \pm\ell$  вільні від силового навантаження і на них задано постійні значення густини  $\rho_a$ .

Оскільки задано зовнішнє силове навантаження, то за вихідну вибираємо ключову систему рівнянь (2), записану відносно тензора напружень  $\hat{\sigma}$  і вектора локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$ . За розглядуваної зовнішньої дії компоненти тензора напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  та вектора локального зміщення маси  $\mathbf{\Pi}_M$  ( $\mathbf{\Pi}_M = (\Pi_M, 0, 0)$ ) є функціями лише координати  $x$ . Тоді система рівнянь (2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2} = \frac{2G\beta}{K + 4/3G} \frac{d^3\Pi_M}{dx^3}, \\ 3(\beta^2 - \alpha K) \frac{d^2\Pi_M}{dx^2} + 3K\gamma\Pi_M - \beta \frac{d}{dx}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поля напружень та локального зміщення маси повинні справджувати такі граничні умови:

$$\sigma_{xx} \Big|_{x=\pm\ell} = 0, \quad \frac{d\Pi_M}{dx} \Big|_{x=\pm\ell} = \rho_a, \quad (4)$$

а також умови у довільних поперечних перерізах  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  шару:

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{yy} dx &= 2\ell\sigma_a, & \int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{zz} dx &= 0, \\ \int_{-\ell}^{\ell} x\sigma_{yy} dx &= 0, & \int_{-\ell}^{\ell} x\sigma_{zz} dx &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язок задачі (3)–(5) є таким:

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left[ \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(k\ell)} - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right],$$

$$\sigma_{zz}(x) = \sigma_{yy} - \sigma_a, \quad \sigma_{xx}(x) = 0, \quad (6)$$

$$\Pi_M(x) = \frac{\rho_a}{k} \frac{\text{sh}(kx)}{\text{ch}(k\ell)}. \quad (7)$$

$$\text{Тут } k = \sqrt{\frac{(K + 4/3G)\gamma}{\alpha(K + 4/3G) - \beta^2}}.$$

Для хімічного потенціалу  $\eta(x)$  на основі визначальних співвідношень [3, 4] за відомими компонентами тензора напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  та вектора локального зміщення маси  $\Pi_M$  одержуємо

$$\eta(x) = -\frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)} \left\{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(k\ell)} - 4G\beta^2 \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right\} + \eta_* - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right). \quad (8)$$

Зазначимо, що величина  $1/k$  є характерним розміром приповерхневої неоднорідності. Аналіз формул (6) показує, що за відсутності силового навантаження при відході від поверхонь шару  $x = \pm\ell$  в глибину тіла ненульові напруження  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  монотонно зменшуються від своїх поверхневих значень:

$$\sigma_{yy}(\pm\ell) = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left( 1 - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right).$$

На серединній поверхні  $x = 0$  напруження  $\sigma_{yy}$  досягають мінімального значення

$$\sigma_{yy}(0) = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left[ \frac{1}{\text{ch}(k\ell)} - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right],$$

і є стискувальними.

Для товстих (порівняно з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності) шарів (коли  $k\ell \gg \gg 1$ ) у глибинних областях напруження  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  практично дорівнюють нулеві. Для тонких плівок, товщина яких співвимірні з розміром області приповерхневої неоднорідності «напруженим» є увесь шар, тоді як для товстих шарів напруженими є лише вузькі приповерхневі області. Це й ілюструють графіки на рис. 3, де показано

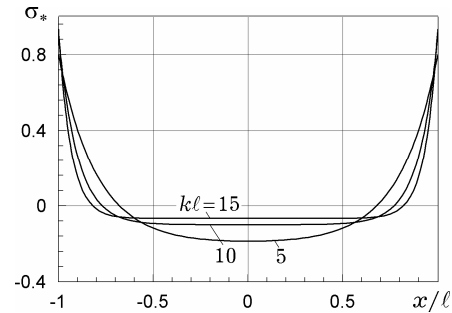


Рис. 3

розподіл по товщині шару зведених напружень  $\sigma_* = \sigma_{yy} \left( \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \right)^{-1}$  при значеннях  $k\ell = 5, 10, 15$ .

З огляду на (8) для поверхневого значення хімічного потенціалу запишемо

$$\eta(\pm \ell) - \eta_* = -\frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)} \left\{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 4G\beta^2 \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right\} - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right). \quad (9)$$

З формули (9) випливає, що поверхневому значенню хімічного потенціалу властивий розмірний ефект (залежить від товщини шару) і, крім того, він залежить від інтенсивності зовнішнього силового навантаження. Така залежність є природною, якщо згадати, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку [6].

Якщо на поверхнях шару замість другої з умов (4) (для локального зміщення маси) задати умову для хімічного потенціалу у вигляді  $\eta = \eta_a$  (де  $\eta_a$  – сталі значення хімічного потенціалу на поверхнях шару), то розв'язок такої задачі набуде вигляду

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_a + \frac{6KG\beta}{D(k\ell)} \left[ \eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right) \right] \left[ \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(k\ell)} - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right],$$

$$\sigma_{zz}(x) = \sigma_{yy} - \sigma_a, \quad \sigma_{xx}(x) = 0, \quad (10)$$

$$P_M(x) = \frac{3K(K + 4/3G)\ell}{D(k\ell)} \left[ \eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right) \right] \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \frac{\text{sh}(kx)}{\text{sh}(k\ell)}, \quad (11)$$

$$\eta(x) = -\frac{1}{D(k\ell)} \left[ \eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right) \right] \left\{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(k\ell)} - 4G\beta^2 \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right\} + \eta_* - \frac{\beta}{3K} \left( 3 \frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right). \quad (12)$$

Тут  $D(k\ell) = 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 4G\beta^2 \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell}$ .

Порівняння розв'язків (6)–(8) та (10)–(12) вказує на суттєву відмінність залежності розглядуваних полів від товщини шару, що є особливо важливим для тонких плівок. У випадку задання на поверхнях тіла  $x = \pm \ell$  густини одержаний розв'язок є суттєво простішим, а залежність поверхневого значення хімічного потенціалу (9) від товщини шару та інтенсивності силового навантаження є фізично обґрунтованою.

**3. Міцність шару.** Для розтягувального силового навантаження ( $\sigma_a > 0$ ) найбільшими напруженнями розтягу є напруження на поверхнях шару:

$$\sigma_{yy}(\pm \ell) = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left( 1 - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right). \quad (13)$$

Зі збільшенням товщини шару поверхневі напруження (13) зростають, прямуючи до значення

$$\sigma_{yy}^\infty = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G},$$

яке має сенс поверхневого напруження у півпросторі.

Використаємо співвідношення (13) для розрахунку міцності шару. За основу виберемо критерій першої класичної теорії міцності [12], а також скористаємось методикою, що наведена у праці [10]. Приймаємо, що шар зруйнується миттєво, якщо хоча б в одній його точці головне максимальне напруження досягне значення теоретичної межі міцності  $\sigma_d$ . Тоді на основі співвідношення (13) отримуємо значення інтенсивності зовнішнього силового

навантаження  $\sigma_a^{cr}$ , що приводить до руйнування шару

$$\sigma_a^{cr} = \sigma_d - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left( 1 - \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell} \right). \quad (14)$$

При  $\ell \rightarrow \infty$  значення  $\sigma_a^{cr}$  прямує до сталої величини  $\sigma_+$ :

$$\sigma_+ = \sigma_d - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G}, \quad (15)$$

яка відповідає інтенсивності силового навантаження, що приводить до руйнування товстих шарів. Ця величина визначається на основі експериментальних даних.

Використовуючи (15), співвідношення (14) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{cr} = \sigma_+ + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \frac{\text{th}(k\ell)}{k\ell}. \quad (16)$$

Праву частину співвідношення (16) можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів шару на межу міцності (розмірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням товщини шару, величина прикладеного до шару силового навантаження  $\sigma_a^{cr}$ , що приводить до його руйнування, зменшується, прямує до  $\sigma_+$ .

Якщо на поверхнях шару  $x = \pm \ell$  задано постійне значення хімічного потенціалу  $\eta_a$ , то для інтенсивності  $\sigma_a^{cr*}$  силового навантаження, що приводить до його руйнування, одержуємо

$$\sigma_a^{cr*} = \frac{\sigma_d - 6KG\beta[\eta_* - \eta_a - \beta P_*/(K\rho_*)]D_1(k\ell)}{1 - 2G\beta^2 D_1(k\ell)}.$$

Тут  $D_1(k\ell) = [1 - \text{th}(k\ell)/k\ell]/D(k\ell)$ .

Якщо, як і раніше, через  $\sigma_+^*$  позначити значення інтенсивності силового навантаження  $\sigma_a^{cr*}$  при  $\ell \rightarrow \infty$ :

$$\sigma_+^* = \frac{3K\{\sigma_d[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 2G\beta[\eta_* - \eta_a - \beta P_*/(K\rho_*)]\}}{3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 2G\beta^2},$$

то для  $\sigma_a^{cr*}$  маємо

$$\sigma_a^{cr*} = \frac{1}{1 - 2G\beta^2 D_1(k\ell)} \left\{ \sigma_+^* \left[ 1 - \frac{2G\beta^2}{3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2]} \right] + 2G\beta[\eta_* - \eta_a - \beta P_*/(K\rho_*)] \left[ \frac{1}{\alpha(K + 4/3G) - \beta^2} - 3KD_1(k\ell) \right] \right\}.$$

Однак слід пам'ятати, що  $\sigma_+^*$  залежить від поверхневого значення хімічного потенціалу, а отже, – від інтенсивності зовнішнього силового навантаження. Тому  $\sigma_+^*$  не можна трактувати як експериментально вимірну величину.

**Висновки.** У роботі сформульовано постановку крайових задач нелокальної механіки за локально градієнтного підходу, коли за одну з ключових функцій вибрано вектор локального зміщення маси. Обговорено проблему вибору крайових умов у задачах за локально градієнтного підходу. На основі аналізу розв'язків модельних задач для шару вказано на істотну залежність розмірних ефектів, у тому числі межі міцності, від крайових умов, а також на фізичну обґрунтованість задання на поверхні тіла густини чи

дивергенції вектора локального зміщення маси. Задання ж на поверхні тіла сталого значення збурення хімічного потенціалу веде до спотворення розмірних ефектів, оскільки хімічний потенціал, що встановлюється на поверхні тіла залежить від його характерного розміру (товщини шару).

1. Бурак Я. И., Нагірний Т. С. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 12. – С. 3–23.  
 The same: *Burak Ya. I., Nagirnyi T. S. Mathematical modeling of local gradient processes in inertial thermomechanical systems // Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, No. 12. – P. 775–793.
2. Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В. Математична модель термомеханіки з урахуванням дисипативних процесів при формуванні приповерхневих явищ // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 65–71.
3. Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В. Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 55–65.  
 The same: *Burak Ya. I., Moroz H. I., Boiko Z. V. On the energy approach and thermodynamic foundations of the variational formulation of boundary-value problems of thermomechanics with regard for near-surface phenomena // J. Math. Sci.* – 2010. – **170**, No. 5. – P. 629–641.
4. Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р. Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
5. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
6. Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т., Чекурін В., Кондрат В., Чернуха О., Мороз Г., Червінка К. Фізико-математичне моделювання складних систем / Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
7. ГОСТ 2789-73. – Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики.
8. Грицина О., Нагірний Т., Червінка К. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – № 3. – С. 72–83.
9. Нагірний Т. С. До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища // Доп. АН України. – 1992. – № 2. – С. 49–53.
10. Нагірний Т. С. Приповерхневі напруження у шарі. Поверхневий натяг та розмірні ефекти // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 111–115.
11. Нагірний Т. С. Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням поверхневих явищ: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1998. – 32 с.
12. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. С. Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей ред. Панасюка В. В. – Т. 1.)
13. *De Garmo E. Paul, Black J. T., Kohser Ronald A. Materials and processes in manufacturing.* – J. Wiley, 2003. – 1154 p. – (9th ed.)
14. *Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories.* – Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
15. *Eringen A. C. Nonlocal continuum mechanics based on distributions // Int. J. Engng. Sci.* – 2006. – **44**, No. 3-4. – P. 141–147.
16. *Eringen A. C. Polar and nonlocal theories of continua.* – Istanbul: Boğaziçi Univ., 1974. – 137 p.
17. *Eringen A. C., Edelen D. G. B. On nonlocal elasticity // Int. J. Engng. Sci.* – 1972. – **10**, No. 3. – P. 233–248.
18. *Lazar M., Maugin G. A. A note on line forces in gradient elasticity // Mech. Res. Commun.* – 2006. – **33**, No. 5. – P. 674–680.
19. *Lazar M., Maugin G. A. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity // Int. J. Engng. Sci.* – 2005. – **43**, No. 13-14. – P. 1157–1184.
20. *Maugin G. A. Nonlocal theories or gradient-type theories: A matter of convenience? // Arch. Mech.* – 1979. – **31**. – P. 15–26.

21. Mindlin R. D. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elasticity. – 1972. – 2, No. 4. – P. 217–282.
22. Nahirnyj T., Tchernvinka K. Interface phenomena and interaction energy at the surface of electroconductive solids // Comput. Meth. Sci. and Technol. – 2008. – 14(2). – P. 105–110.
23. Santaoja K. Gradient theory from the thermomechanics point of view // Eng. Fract. Mech. – 2004. – 71, No. 4-6. – P. 557–566.
24. Tang Z., Shen S., Atluri S. N. Analysis of materials with strain-gradient effects: A meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only // Comput. Model. Eng. & Sci. – 2003. – 4, No. 1. – P. 177–196.
25. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1962. – 11. – P. 385–414.
26. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theory. – Berlin: Springer, 1960. – P. 226–793. – (Handbuch der Physik / Ed. S. Flügge. – Vol. III/1).

#### К ВЫБОРУ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ ЛОКАЛЬНО ГРАДИЕНТНОГО ПОДХОДА В ТЕРМОМЕХАНИКЕ

*В рамках локально градиентного подхода в термомеханике сформулирована ключевая система уравнений математической модели, описывающая поведение упругого тела с учетом эффектов локальной неоднородности. При этом в качестве ключевых функций выбраны как векторы перемещения и локального смещения массы, так и тензор напряжений и вектор локального смещения массы. На этом основании получены и проанализированы решения задач о равновесном состоянии растянутого слоя. Обсуждена проблема выбора краевых условий в задачах локально градиентного подхода. Указано на существенную зависимость размерных эффектов, в том числе границы прочности, от краевых условий, а также на физическую обоснованность задания на поверхности тела плотности или дивергенции вектора локального смещения массы.*

#### TO CHOICE OF BOUNDARY CONDITIONS IN PROBLEMS OF LOCAL GRADIENT APPROACH IN THERMOMECHANICS

*Within the local gradient approach in thermomechanics the key systems of equations of a mathematical model describing the behavior of elastic bodies taking into account the effect of local inhomogeneity are formulated. As key functions both vectors of displacement and local mass shift or stress tensor and vector of local mass shift are chosen. On this basis the solutions of the problems on the equilibrium state of a stretched layer are obtained and analyzed. The choice of the boundary conditions in the problems of local gradient approach is discussed. It is noted that the size effects including the strength limit essentially depend on the boundary conditions and also on the physical validity of specifying the density or the divergence of local mass shift vector at the surface of the body.*

<sup>1</sup> Центр мат. моделювання  
 Ін-ту прикл. проблем механіки і математики  
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,  
<sup>2</sup> Зеленогур. ун-т, Зелена Гура, Польща,  
<sup>3</sup> Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано  
 25.01.11