УДК 517.95

П. І. Каленюк[1,2], І. В. Когут[1], З. М. Нитребич[1]

ЗАДАЧА З ОДНОРІДНОЮ ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено задачу з однорідною інтегральною умовою для неоднорідного рівняння із частинними похідними першого порядку за часом і в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою змінною зі сталими коефіцієнтами. Доведено існування та єдиність розв'язку задачі у класі квазіполіномів спеціального вигляду. Розв'язок цієї задачі побудовано за допомогою диференціально-символьного методу. У випадку існування неєдиного розв'язку задачі запропоновано формули для побудови часткового розв'язку задачі.

Вступ. Задачам з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки присвячено чимало досліджень, оскільки такі задачі мають важливе практичне застосування. Інтегральні умови застосовують, зокрема, у моделях поширення тепла [2, 3, 15, 17] та вологопереносу [9], у демографічних моделях [1], в обернених задачах теорії теплопровідності [18].

Задачі з інтегральними умовами для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними в обмежених та необмежених областях є умовно коректними. Тому знаходження умов коректної розв'язності таких задач викликає зацікавленість багатьох вчених (див., наприклад, праці [4, 8, 10–13, 14, 16, 19] та бібліографію в них).

Ця стаття продовжує дослідження [5, 7] щодо однозначної розв'язності задачі з однорідною інтегральною часовою умовою для неоднорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом і в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою змінною у смузі, а також щодо побудови часткових розв'язків задачі у класі існування неєдиного розв'язку задачі. Розв'язки задач за допомогою диференціально-символьного методу [6] у класі квазіполіномів будуються як дії деяких диференціальних виразів на цілі або мероморфні функції параметрів з подальшим покладанням цих параметрів такими, що дорівнюють нулеві.

1. Формулювання задачі. Вивчатимемо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз з цілим аналітичним символом $a(\nu) \neq \mathrm{const}$, $\nu \in \mathbb{C}$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

Поряд з неоднорідним рівнянням (1) розглядатимемо однорідне рівняння

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0. \tag{3}$$

Уведемо до розгляду клас $K_{\mathbb{C},P}$ – клас дійснозначних кваоізіполіномів вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\beta_j t + \alpha_j x] Q_j(t,x), \tag{4}$$

де $\beta_j \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \in P \subseteq \mathbb{C}$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ або $\beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots, m$; $Q_j(t,x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, − поліноми від змінних t і x з дійсними коефіцієнтами.

Для квазіполінома $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$ вигляду (4) дію диференціального виразу $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на цілу функцію $T(\lambda,\nu)$ з подальшим покладанням параметрів λ та ν рівними нулеві означимо так:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T(\lambda,\nu)\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} \equiv \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T(\lambda,\nu)\}\Big|_{\lambda=\beta_j,\nu=\alpha_j}. \qquad (5)$$

2. Основні результати.

2.1. Клас однозначної розв'язності задачі та побудова розв'язку.

Розглянемо функцію

$$\Gamma(\lambda,\nu,t) = \frac{\eta(\nu)\lambda\exp[\lambda t] - (\exp[\lambda T] - 1)\exp[a(\nu)t]}{[\lambda - a(\nu)]\eta(\nu)\lambda}, \qquad (6)$$

де

$$\eta(\nu) = \frac{\exp[a(\nu)T] - 1}{a(\nu)}. \qquad (7)$$

Нехай, крім того,

$$P = \left\{\nu \in \mathbb{C} : \frac{\exp[a(\nu)T] - 1}{a(\nu)} = 0\right\}. \qquad (8)$$

Лема 1. *Функція* (6) *має такі властивості:*

(***i***) $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ *за змінною* t *є розв'язком диференціального рівняння*

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\nu)\right]\Gamma(\lambda,\nu,t) = \exp[\lambda t]; \qquad (9)$$

(***ii***) $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ *за змінною* t *задовольняє нульову інтегральну умову*

$$\int_0^T \Gamma(\lambda,\nu,t)\,dt = 0; \qquad (10)$$

(***iii***) $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ *є цілою стосовно* λ *і аналітичною в* $\mathbb{C} \setminus P$ *стосовно* ν.

Д о в е д е н н я. Перші дві властивості перевіряються безпосередньо.

Щоб довести третю властивість, покажемо, що функцію $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ можна подати так:

$$\Gamma(\lambda,\nu,t) = F(\lambda,\nu,t) - \frac{[F(\lambda,\nu,T) - F(0,\nu,T)]\exp[a(\nu)t]}{\lambda\eta(\nu)}, \qquad (11)$$

де

$$F(\lambda,\nu,t) = \frac{\exp[\lambda t] - \exp[a(\nu)t]}{\lambda - a(\nu)}. \qquad (12)$$

Справді,

$$\frac{\exp[\lambda t] - \exp[a(\nu)t]}{\lambda - a(\nu)} -$$

$$- \frac{\left[\frac{\exp[\lambda T] - \exp[a(\nu)T]}{\lambda - a(\nu)} - \frac{1 - \exp[a(\nu)T]}{-a(\nu)}\right]\exp[a(\nu)t]}{\lambda\eta(\nu)} =$$

$$= \frac{\lambda\eta(\nu)\exp[\lambda t] - \lambda\eta(\nu)\exp[a(\nu)t]}{[\lambda - a(\nu)]\lambda\eta(\nu)} -$$

$$- \frac{(\exp[\lambda T] - \exp[a(\nu)T])\exp[a(\nu)t] + \eta(\nu)\exp[a(\nu)t]}{[\lambda - a(\nu)]\lambda\eta(\nu)} =$$

$$= \frac{\lambda\eta(\nu)\exp[\lambda t] - (\exp[\lambda T] - 1)\exp[a(\nu)t]}{[\lambda - a(\nu)]\lambda\eta(\nu)} = \Gamma(\lambda, \nu, t).$$

Функція (12), очевидно, є цілою стосовно λ та ν. Крім того, у другому доданку $\dfrac{[F(\lambda,\nu,T) - F(0,\nu,T)]\exp[a(\nu)t]}{\lambda\eta(\nu)}$ формули (11) маємо також цілу функцію за λ. Звідси випливає твердження леми. Лему доведено. ♦

Теорема 1. *Якщо* $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$, *де* P *— множина* (8), *то у класі квазіполіномів* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2). *Цей розв'язок можна зобразити у вигляді*

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$, тобто $f(t,x)$ має вигляд (4). Тоді за формулою (13) з урахуванням рівності (5) знаходимо

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial\lambda} + \alpha_j \frac{\partial}{\partial\nu}\right] Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}\Big|_{\lambda=\beta_j,\nu=\alpha_j}.$$

Функція $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ та її частинні похідні за змінною λ і змінною ν у точках (β_j, α_j, t), $j = 1, 2, \ldots, m$, згідно з лемою 1 є визначеними. Тому умова $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ забезпечує існування деякої квазіполіномної функції. Покажемо, що ця функція задовольняє рівняння (1):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) =$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} =$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu x]\left[\frac{d}{dt} - a(\nu)\right]\Gamma(\lambda,\nu,t)\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} =$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\lambda t + \nu x]\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} = f(t,x).$$

У цьому ланцюжку рівностей використано рівність (9), комутативність операцій $\dfrac{\partial}{\partial t}$ та $\dfrac{\partial}{\partial x}$ з $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ та $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ для квазіполіномної функції $\Gamma(\lambda,\nu,t)\times$ $\times\exp[\nu x]$, а також рівності

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp[\nu x] = a(\nu)\exp[\nu x],$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\exp[\lambda t + \nu x] = f(t,x)\exp[\lambda t + \nu x]$$

для аналітичних функцій $a(\nu)$, $f(t,x)$.

З умови (10) випливає також, що $U(t,x)$ вигляду (13) задовольняє умову (2).

Крім того, знайдений за поданою формулою (13) розв'язок $U(t,x)$ задачі (1), (2) є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. Отже, доведено існування розв'язку задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1), (2). Припустимо, що в $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ існують розв'язки $U_1(t,x)$, $U_2(t,x)$ задачі (1), (2). Тоді їх різниця $U(t,x) = U_1(t,x) - U_2(t,x)$ є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ і є розв'язком задачі (3), (2). Однак, як показано у [7], квазіполіномного вигляду елементи ядра задачі (3), (2), можуть міститися лише в $K_{\mathbb{C},P}$. Оскільки $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P} \bigcap K_{\mathbb{C},P} = \{0\}$, то $U(t,x) = 0$. Теорему доведено. ♦

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \frac{1}{2}U(t,x+1) + \frac{1}{2}U(t,x-1) = \exp[t+x],$$

$$\int_0^{2\pi} U(t,x)\,dt = 0. \tag{14}$$

▼ Для цієї задачі $T = 2\pi$, $a(\nu) = \mathrm{sh}(\nu)$, $f(t,x) = \exp[t+x]$.

За формулою (6) запишемо функцію $\Gamma(\lambda,\nu,t)$:

$$\Gamma(\lambda,\nu,t) = \frac{\lambda\exp[\lambda t](\exp[2\pi\,\mathrm{sh}\,\nu]-1) - \exp[t\,\mathrm{sh}\,\nu]\,\mathrm{sh}\,\nu(\exp[2\pi\lambda]-1)}{(\lambda-\mathrm{sh}\,\nu)(\exp[2\pi\,\mathrm{sh}\,\nu]-1)\lambda}.$$

Знаходимо розв'язок задачі (14) за формулою (13):

$$U(t,x) = \exp\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\nu}\right]\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0} =$$

$$= \{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}|_{\lambda=1,\nu=1} = \Gamma(1,1,t)\exp x.$$

Отже, розв'язок задачі (14) має вигляд:

$$U(t,x) = \left[\exp t - \frac{\exp[t\,\mathrm{sh}\,1]\,\mathrm{sh}\,1(\exp[2\pi]-1)}{\exp[2\pi\,\mathrm{sh}\,1]-1}\right]\frac{\exp x}{1-\mathrm{sh}\,1}.$$ ▲

2.2. Побудова часткового розв'язку задачі за умови існування неєдиного її розв'язку.

Якщо $f \in K_{\mathbb{C},P}$, то розв'язок задачі (1), (2) існує у класі $K_{\mathbb{C},P}$, однак, він не є єдиним і знаходиться з точністю до елементів ядра задачі (1), (2), що містяться в $K_{\mathbb{C},P}$. Тому ставиться питання про знаходження часткового розв'язку задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C},P}$.

Нехай $f \in K_{\mathbb{C},P}$ і має вигляд

$$f(t,x) = \exp[\beta t + \alpha x]Q(t,x), \tag{15}$$

де $Q(t,x)$ − поліном степеня n стосовно x, причому $\alpha \in P$ і має кратність $p_\alpha \in \mathbb{N}$ як нуль функції (7). Позначимо

$$\sigma(t,x,\lambda,\nu) = \eta(\nu)\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x], \tag{16}$$

$$\rho(t,x,\lambda,\nu) = [\eta(\nu)]^{n+1}Q\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\Gamma(\lambda,\nu,t)\exp[\nu x]\}. \tag{17}$$

Неважко переконатися, що α є нулем функції $[\eta(\nu)]^{n+1}$ кратності $(n+1)p_\alpha$.

Теорема 2. *Нехай* $f(t,x)$ *у рівнянні* (1) *має вигляд* (15), *де* $Q(t,x)$ – *поліном, степінь якого за змінною* x *дорівнює* n, *причому* $\alpha \in P$ *і має кратність* $p_\alpha \in \mathbb{N}$, P – *множина* (8). *Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \frac{\left.\dfrac{\partial^{(n+1)p_\alpha}}{\partial \nu^{(n+1)p_\alpha}} \rho(t,x,\lambda,\nu)\right|_{\lambda=\beta,\nu=\alpha}}{\left.\dfrac{d^{(n+1)p_\alpha}}{d\nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha}} \tag{18}$$

або

$$U(t,x) = \frac{\left.\dfrac{\partial^{(n+1)p_\alpha}}{\partial \nu^{(n+1)p_\alpha}} \rho(t,x,\beta,\nu)\right|_{\nu=\alpha}}{\left.\dfrac{d^{(n+1)p_\alpha}}{d\nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha}}.$$

Д о в е д е н н я. З властивості (***iii***) леми 1 випливає, що функція $\rho(t,x,\lambda,\nu)$ є цілою стосовно λ і ν.

Покажемо, що функція (18) є розв'язком рівняння (1). Згідно з властивістю (***i***) леми 1 маємо

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\sigma(t,x,\lambda,\nu) = \exp[\lambda t + \nu x]\eta(\nu). \tag{19}$$

Підставивши функцію (18) у рівняння (1) і врахувавши рівності (19) і (17), отримаємо

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x) = \frac{\left.\dfrac{\partial^{(n+1)p_\alpha}}{\partial \nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1} Q(t,x)\exp[\lambda t + \nu x]\}\right|_{\lambda=\beta,\nu=\alpha}}{\left.\dfrac{d^{(n+1)p_\alpha}}{d\nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= Q(t,x)\exp[\beta t]\frac{\left.\dfrac{\partial^{(n+1)p_\alpha}}{\partial \nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\exp[\nu x]\}\right|_{\nu=\alpha}}{\left.\dfrac{d^{(n+1)p_\alpha}}{d\nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= Q(t,x)\exp[\beta t] \times$$

$$\times \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n+1)p_\alpha} C^k_{(n+1)p_\alpha} \left.\frac{d^k}{d\nu^k}\{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha} x^{(n+1)p_\alpha - k}\exp[\alpha x]}{\left.\dfrac{d^{(n+1)p_\alpha}}{d\nu^{(n+1)p_\alpha}} \{[\eta(\nu)]^{n+1}\}\right|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= \exp[\beta t + \alpha x]Q(t,x) = f(t,x).$$

Отже, функція (18) є розв'язком неоднорідного рівняння (1). Крім того, вона задовольняє однорідну інтегральну умову (2). Це випливає з властивості (***ii***) леми 1. Теорему доведено. ♦

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (1) $f(t,x) \in K_{\mathbb{C},P}$, тобто

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\beta_j t + \alpha_j x]Q_j(t,x),$$

де $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in P$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то за формулою (18) знайдемо часткові розв'язки задачі (1), (2) $U_j(t, x)$ для $f_j(t, x) = \exp[\beta_j t + \alpha_j x] Q_j(t, x)$, а потім за принципом накладання розв'язків лінійного диференціального рівняння знайдемо розв'язок задачі (1), (2) вигляду

$$U(t, x) = \sum_{j=1}^{m} U_j(t, x).$$

Приклад 2. Знайти у смузі $\{(t, x) : t \in (0, 2\pi),\ x \in \mathbb{R}\}$ розв'язок такої задачі:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t, x) = tx \exp x \sin x,$$

$$\int_0^{2\pi} U(t, x)\, dt = 0. \tag{20}$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T = 2\pi$, $a(\nu) = \nu^2$, $\eta(\nu) = \dfrac{\exp[2\pi\nu^2] - 1}{\nu^2}$, $f(t, x) = tx \exp x \sin x = \dfrac{tx}{2i}(\exp[(1 + i)x] - \exp[(1 - i)x])$, $Q(t, x) = tx$. Точки $\alpha_{1,2} = 1 \pm i$ є нулями функції $\eta(\nu)$ кратності 1.

Знайдемо частковий розв'язок задачі (20) за теоремою 2. Для цього запишемо вигляд функцій $\Gamma(\lambda, \nu, t)$ та $\rho(t, x, \lambda, \nu)$:

$$\Gamma(\lambda, \nu, t) = \frac{(\exp[2\pi\nu^2] - 1)\lambda \exp[\lambda t] - \nu^2(\exp[2\pi\lambda] - 1)\exp[\nu^2 t]}{[\lambda - \nu^2](\exp[2\pi\nu^2] - 1)\lambda},$$

$$\begin{aligned}\rho(t, x, \lambda, \nu) = \frac{\exp[\nu x]}{\nu^9}&[\exp[(t + 2\pi)\nu^2](-2\pi t\nu^4 - \\ &- \nu x + 4\pi^2\nu^4 - 2\nu^2 t - \pi x\nu^3 + 2 + 4\pi\nu^2)\nu^2 - \\ &- \exp[4\pi\nu^2](xt\nu^3 - 4 + \nu x - 2\nu^2 t) - \\ &- 2\pi \exp[\nu^2 t](x\pi\nu^3 + \nu x - 2 + 2\pi t\nu^4 + 2\nu^2 t)\nu^2 + \\ &+ (2\exp[2\pi\nu^2] - 1)(xt\nu^3 + \nu x - 4 - 2\nu^2 t)].\end{aligned}$$

За формулою (18) знаходимо частковий розв'язок задачі (20):

$$\begin{aligned}U(t, x) = \frac{1}{2i}&\left[\frac{1}{2[\eta'(1 + i)]^2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^2 \rho(t, x, 0, \nu)\right\}\Bigg|_{\nu=1+i} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2[\eta'(1 - i)]^2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^2 \rho(t, x, 0, \nu)\right\}\Bigg|_{\nu=1-i}\right] = \\ &= \frac{\exp x}{16}\{[-(2\pi + 1)x^2 - 8xt + 8(2\pi - 1)t^2 + 10\pi x + \\ &+ 8(-4\pi^2 + 2\pi + 1)t - 2(8\pi + 1)(4\pi^2 + 1)]\cos(x + 2t) + \\ &+ [(2\pi - 1)x^2 + 16\pi xt + 8(2\pi + 1)t^2 + (-16\pi^2 + 5)x + \\ &+ 8(-4\pi^2 - 2\pi + 1)t - 2(8\pi - 1)(4\pi^2 + 1)]\sin(x + 2t) + \\ &+ 8(xt - t + 1)\cos x + 4(x - 2t - 2)\sin x\}.\end{aligned}$$

▲

3. Висновки. У смузі $\{(t,x): t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}\}$ для лінійного неоднорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом і в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою координатою з однорідною інтегральною часовою умовою:

– встановлено клас квазіполіномів, у якому розв'язок задачі існує та є єдиним;

– за умови однозначної розв'язності задачі запропоновано диференціально-символьний метод побудови її розв'язку, причому для побудови розв'язку потрібні лише операції диференціювання;

– за умови існування неєдиного розв'язку задачі подано формули для побудови часткового її розв'язку.

Подано конкретні приклади задач з однорідною інтегральною часовою умовою для диференціально-функціонального та диференціального рівнянь із частинними похідними, для яких виділено клас однозначної розв'язності та клас існування неєдиного розв'язку та реалізовано вказані у статті формули для побудови відповідно єдиного та часткового розв'язків задач.

1. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885–902.
2. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.
4. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12–19.
5. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Задача з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 4. – С. 7–16.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 293–304.
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
7. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Когут І. В.* Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 5–11.
8. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–140.
9. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.
10. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.
11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
12. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
    Те саме: *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // Different. Equat. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 947–953.
13. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
    Те саме: *Fardigola L. V.* Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 11. – P. 1388–1394.
14. *Benchohra M., Nieto J. J., Ouahab A.* Second-order boundary value problem with integral boundary conditions. // Bound. Value Probl. – 2011, Art. ID 260309, 9 pp.

15. *Bouziani A.* Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**. – P. 371–386.
16. *Bouziani A., Benouar N.-E.* Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation // Kobe J. Math. – 1998. – **15**, No. 1. – P. 47–58.
17. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**. – P. 155–160.
18. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
19. *Kong L.* Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions // Nonlinear Anal. – 2010. – **72**. – P. 2628–2638.

ЗАДАЧА С ОДНОРОДНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Исследована задача с однородным интегральным условием для неоднородного уравнения в частных производных первого порядка по времени и в общем случае бесконечного порядка по пространственной переменной с постоянными коэффициентами. Доказано существование и единственность решения задачи в классе квазиполиномов специального вида. Решение этой задачи построено с помощью дифференциально-символьного метода. В случае существования неединственного решения задачи предложены формулы для построения частного решения задачи.

PROBLEM WITH HOMOGENEOUS INTEGRAL CONDITION FOR NONHOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

We investigate the problem with homogeneous integral condition for a nonhomogeneous partial differential equation of the first order in time and generally infinite order in spatial variable with constant coefficients. We prove the existence and uniqueness of the solution of the problem in the class of quasi-polynomials of a special form. We construct the solution of this problem by means of the differential-symbol method. For the case of existence of non-unique solution of the problem, we propose formulas for constructing a partial solution of the problem.

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,
[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща

Одержано
10.11.11