

## ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПЕРІОДИЧНОЇ СИСТЕМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ СПІВВІСНИХ ТРІЩИН РАДІАЛЬНОГО ЗСУВУ В ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОМУ КОМПЗИТІ

*На основі підходів лінеаризованої теорії пружності розглянуто осесиметричну задачу про напружено-деформований стан композита з початковими (залишковими) напруженнями, що містить періодичну систему паралельних співвісних тріщин радіального зсуву. З використанням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та апарату інтегральних перетворень Ганкеля задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь, а потім – до розв'язувального інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контурів тріщин і для випадку шаруватого композита з ізотропними шарами проаналізовано їх залежність від початкових напружень, механічних характеристик компонентів і геометричних параметрів задачі. З аналізу ефекту різкої «резонансоподібної» зміни значень коефіцієнтів інтенсивності напружень при певних значеннях початкових стискувальних напружень визначено критичні параметри стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу при стисканні вздовж періодичної системи паралельних співвісних тріщин.*

**1. Вступ.** Внаслідок технологічних особливостей створення композиційних матеріалів в них часто виникають початкові (або залишкові) деформації та напруження, а також дефекти – тріщини, розшарування, непроводності тощо [12]. За дії початкових напружень уздовж дефектів ці напруження не входять у вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень і розкриття тріщин, тому їх не враховують у класичних критеріях руйнування типу Гріффітса – Ірвіна чи критичного розкриття тріщин.

У роботах [5, 6, 8] для дослідження ефекту дії початкових (залишкових) напружень на напружено-деформований стан матеріалів з тріщинами було запропоновано підхід у межах лінеаризованої механіки деформівних тіл з початковими напруженнями. На основі цього підходу отримано розв'язки окремих класів статичних і динамічних задач для ізольованих та взаємодіючих тріщин в тілах з початковими напруженнями [1–4, 6, 8, 13, 14, 22] (див. також огляди в [17–20]). У працях [1, 2, 15, 16] досліджено лінеаризовані задачі для однорідних ізотропних пружних тіл з періодичними системами тріщин нормального відриву, радіального зсуву та кручення.

Нижче розглянуто задачу про руйнування попередньо напруженого композитного матеріалу, що містить періодичну систему кругових тріщин радіального зсуву, коли початкові напруження діють уздовж площин розміщення тріщин. Припускаючи, що радіуси тріщин істотно перевищують розміри структурних елементів композита, використовуємо континуальну модель, згідно з якою композитний матеріал моделюють анізотропним тілом зі зведеними ефективними фізико-механічними характеристиками [11]. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин. Для шаруватого композита з ізотропними шарами досліджено вплив взаємодії тріщин між собою і вплив початкових напружень на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Крім того, з використанням запропонованого в [15, 16] об'єднаного підходу до дослідження некласичних задач механіки руйнування отримано критичні параметри руйнування, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу при його стисканні вздовж періодичної системи паралельних співвісних тріщин, і, згідно із запропонованим в [7, 9] критерієм руйнування, визначають початок руйнування тіла при стисканні вздовж тріщин. Зазначені критичні параметри стиску обчислено як значення початкових

стискувальних напружень, при досягненні яких відбувається різка «резонансоподібна» зміна коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі періодичної системи співвісних тріщин радіального зсуву.

**2. Постановка задачі.** Оскільки більшість композитів є відносно жорсткими матеріалами, будемо використовувати основні співвідношення другого варіанту теорії малих початкових деформацій (за термінологією [6, 8, 9]), для якого початковий стан, зумовлений дією початкових напружень, визначається за геометрично лінійною теорією. У зв'язку з цим в лінеаризованих співвідношеннях для збурень тензора напружень і вектора переміщень можна не робити різниці між координатами недеформованого та початково деформованого стану, а також між компонентами тензорів, що обчислюються в координатах зазначених станів.

Задачу будемо досліджувати в лагранжевій системі координат  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , яка в недеформованому стані співпадає з декартовою. Дискіподібні тріщини однакового радіуса  $a$  розташовані в паралельних площинах  $x_3 = \text{const} : \{r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, x_3 = 2hn; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , де  $r, \theta, x_3$  – кругові циліндричні координати, що отримуються з декартових  $x_j$ .

Нехай нормальні початкові напруження спрямовані строго вздовж площин розташування тріщин, а їх компоненти пов'язані співвідношеннями

$$\sigma_{33}^0 = 0, \quad \sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 \neq 0, \quad \sigma_{11}^0 = \text{const}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_j = \text{const}, \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij}^0$  – компоненти симетричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в недеформованому стані, а  $\lambda_j$  – зумовлені початковими напруженнями  $\sigma_{ij}^0$  коефіцієнти подовження (або скорочення) вздовж координатних осей.

У тілі під дією початкових (залишкових) напружень розтягу (або стиску)  $\sigma_{ij}^0$ , які визначаються з (1), реалізується однорідний початковий стан, при якому компоненти вектора переміщень, зумовлені початковими напруженнями, визначаються такими співвідношеннями:

$$u_m^0 = \delta_{jm} (\lambda_j - 1) x_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

У подальшому будемо використовувати такі позначення:  $t_{ij}$  – компоненти несиметричного тензора напружень Піоли – Кірхгоффа 1-го роду, віднесені до одиничних площинок тіла в недеформованому стані;  $u_j$  – компоненти відповідного їм вектора переміщень.

Як і в класичній механіці руйнування без початкових напружень [21], під тріщинами радіального зсуву розуміємо тріщини, до берегів яких антисиметрично відносно площин розміщення тріщин прикладені радіальні дотичні зусилля  $\tau(r)$ . В цьому випадку, обмежуючись осесиметричною задачею та враховуючи симетрію геометричної і силової схем задачі відносно площини  $x_3 = 0$ , а також періодичність компонент тензора напружень і вектора переміщень (з періодом  $2h$ ) за змінною  $x_3$ , зводимо початкову задачу для тіла з періодичною системою співвісних тріщин до задачі для шару  $0 \leq x_3 \leq h$  з такими умовами на його гранях:

$$\begin{aligned} u_r &= 0, & x_3 &= 0, & r &> a, \\ t_{3r} &= -\tau(r), & x_3 &= 0, & r &< a, \\ t_{33} &= 0, & x_3 &= 0, & 0 &\leq r < \infty, \\ u_r &= 0, & t_{33} &= 0, & x_3 &= h, & 0 &\leq r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Припускаємо, що збурення параметрів напружено-деформованого стану тіла, зумовлені додатковими навантаженнями на берегах тріщин  $\tau(r)$ , істотно менші від параметрів початкового стану, зумовленого початковими напруженнями  $\sigma_{ij}^0$ , що дає змогу застосовувати для дослідження задачі лінеаризовані співвідношення [5, 6, 8, 9].

У роботах [6, 8, 9] для випадку однорідного початкового стану (2) побудовано подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції; при цьому вигляд цих подань залежить від коренів характеристичного рівняння. Так, у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння ( $n_1^0 \neq n_2^0$ ), який, як правило, реалізується для композитних матеріалів, зазначені подання у круговій циліндричній системі координат мають вигляд

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2), & u_3 &= m_1^0 \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^0 \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \\ t_{3r} &= C_{44}^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} d_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\sqrt{n_2^0}} d_2^0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right], \\ t_{33} &= C_{44}^0 \left( d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^0 \ell_2^0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), & z_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{n_i^0}} x_3, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – гармонічні потенціальні функції, що задовольняють рівняння Лапласа

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_j(r, \theta, z_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

а величини  $C_{44}^0$ ,  $m_i^0$ ,  $\ell_i^0$ ,  $n_i^0$ ,  $d_i^0$ ,  $i = 1, 2$ , визначаються вибором моделі матеріалу і залежать від початкових напружень [6, 8, 9]. Зокрема, для лінійної моделі трансверсально-ізотропного матеріалу, яка буде в подальшому використовуватись, маємо

$$\begin{aligned} n_{1,2}^0 &= \frac{1}{2}(\mu_{13} + \sigma_{11}^0)^{-1} (a_{11} + \sigma_{11}^0)^{-1} \{ (a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2) \pm \\ &\quad \pm ((a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2)^2 - \\ &\quad - 4(a_{11} + \sigma_{11}^0)(\mu_{13} + \sigma_{11}^0) \mu_{13} a_{33})^{1/2} \}, \\ C_{44}^0 &= \mu_{13}, & m_j^0 &= [(a_{11} + \sigma_{11}^0) n_j^0 - \mu_{13}] (a_{13} + \mu_{13})^{-1}, \\ d_j^0 &= 1 + m_j^0, & j &= 1, 2, \\ a_{11} &= E(1 - \nu' \nu'') a^{-1}, & a_{33} &= E'(1 - \nu^2) a^{-1}, & a_{13} &= E \nu'(1 + \nu) a^{-1}, \\ a &= 1 - \nu^2 - 2\nu' \nu'' - 2\nu \nu' \nu'', & \mu_{12} &= G \equiv G_{12} = \frac{1}{2} E(1 + \nu)^{-1}, \\ \mu_{13} &= G' \equiv G_{13}, & \nu &\equiv \nu_{12}, & \nu' &\equiv \nu_{31}, & \nu'' &\equiv \nu_{13}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши подання загальних розв'язків (4) в граничні умови (3), можна отримати формулювання поставленої задачі в термінах потенціальних гармонічних функцій.

**3. Отримання інтегрального рівняння Фредгольма.** У подальшому зведемо задачу до системи парних (дуальних) інтегральних рівнянь, а потім до розв'язувального інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Для цього виразимо гармонічні потенціальні функції, що фігурують в (4), у

вигляді інтегрального розвинення Ганкеля за координатами  $z_i, r$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, z_1) &= \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + A_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \\ \varphi_2(r, z_2) &= \int_0^{\infty} [B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_2 - z_2) + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_2 - z_2)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2},\end{aligned}\quad (6)$$

$h_i \equiv h/\sqrt{n_i^0}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $J_0(\lambda r)$  – функції Бесселя нульового порядку.

Задовольняючи ті граничні умови в (3), які задано на всій області  $x_3 = \text{const}$ , отримуємо такі співвідношення між невідомими функціями  $A_i, B_i$ ,  $i = 1, 2$ , що містяться в (6):

$$A_1(\lambda) = 0, \quad B_1(\lambda) = 0, \quad B_2(\lambda) = -\frac{d_1^0 \ell_1^0}{d_2^0 \ell_2^0} A_2(\lambda).\quad (7)$$

Дві перші граничні умови в (3) приводять до такої системи парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \lambda [1 - g(\lambda)] A_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= \mathcal{T}(r), \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} A_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a,\end{aligned}\quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}g(\lambda) &= \frac{1}{k} \left( k_2 \frac{e^{-\mu_1}}{\operatorname{sh} \mu_1} - k_1 \frac{e^{-\mu_2}}{\operatorname{sh} \mu_2} \right), \quad \mu_i \equiv \lambda h_i, \quad i = 1, 2, \\ k_1 &= \frac{\ell_1^0}{\sqrt{n_2^0}}, \quad k_2 = \frac{\ell_2^0}{\sqrt{n_1^0}}, \quad k = k_1 - k_2, \quad \mathcal{T}(r) = \frac{\sqrt{n_1^0}}{C_{44}^0 d_1^0} \frac{k_2}{k} \tau(r).\end{aligned}\quad (9)$$

Систему парних інтегральних рівнянь (8) будемо розв'язувати методом підстановки [10]. Для цього виберемо розв'язок системи парних інтегральних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}A_2(\lambda) &= \left( \frac{\pi \lambda}{2} \right)^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \omega(t) J_{3/2}(\lambda t) dt = \\ &= -\lambda^{-1} \left\{ \omega(a) \sin \lambda a - \int_0^a t^{-1} \sin(\lambda t) \frac{d}{dt} [t \omega(t)] d\lambda \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

де  $\omega(t)$  – невідома функція, неперервна разом зі своєю першою похідною на інтервалі  $[0, a]$ .

Підставивши вираз (10) у друге з рівнянь системи (8) і враховуючи значення розривного інтегралу Вебера – Шафхейтліна

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_1(\lambda r) J_{3/2}(\lambda t) dt = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < r, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t}{r^{3/2} \sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 < r < t, \end{cases}$$

легко показати, що воно тотожно задовольняється.

Далі, підставивши подання (10) у перше з рівнянь (8) і враховуючи співвідношення

$$\lambda J_{3/2}(\lambda r) = -r^{1/2} \frac{d}{dr} [t^{-1/2} J_{1/2}(\lambda r)]$$

та значення розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна

$$\int_0^\infty \lambda^{1/2} J_{1/2} J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0, & t > r, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^{1/2}}{r\sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 \leq t < r, \end{cases}$$

після перетворень отримуємо співвідношення

$$\int_0^r \tilde{\omega}(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = r \int_0^\infty g(\lambda) A(\lambda) \lambda J_1(\lambda r) d\lambda + \tilde{q}(r), \quad (11)$$

де

$$\tilde{\omega}(t) \equiv \frac{d}{dt} [t\omega(t)], \quad \tilde{q}(r) \equiv r\mathcal{T}(r). \quad (12)$$

Зробивши в лівій частині рівняння (11) підстановку  $t = r \sin \theta$ , отримуємо рівняння Шльомільха

$$\int_0^{\pi/2} \tilde{\omega}(r \sin \theta) d\theta = N(r), \quad r \leq a, \quad (13)$$

де

$$N(r) \equiv r \int_0^\infty g(\lambda) A(\lambda) \lambda J_1(\lambda r) d\lambda + \tilde{q}(r). \quad (14)$$

Враховуючи, що рівняння Шльомільха вигляду

$$\int_0^{\pi/2} f(r \sin \theta) d\theta = N(r)$$

має розв'язок

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[ N(0) + x \int_0^{\pi/2} N'(x \sin \theta) d\theta \right],$$

та застосовуючи інтеграл Соніна

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta J_0(\lambda x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} J_{1/2}(\lambda x),$$

з урахуванням, що  $J_{1/2}(\lambda t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda t}} \sin \lambda t$ , з (13) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\tilde{\omega}(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \tilde{\omega}(t) \tilde{\mathcal{K}}(x, t) dt = \frac{2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \tilde{q}'(x \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (15)$$

де ядро має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}(x, t) &= xt^{-1} [\tilde{\mathcal{R}}(x-t) - \tilde{\mathcal{R}}(x+t)] - xa^{-1} [\tilde{\mathcal{R}}(x-a) - \tilde{\mathcal{R}}(x+a)], \\ \tilde{\mathcal{R}}(z) &\equiv \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{h_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h_2} \right) - \frac{k_2}{h_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

У (16)  $\operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h} \right)$  – дійсна частина пси-функції  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  ( $\Gamma(z)$  – гамма-функція).

Увівши безрозмірні змінні та функції

$$\xi \equiv a^{-1}x, \quad \eta \equiv a^{-1}t, \quad f(\xi) \equiv a^{-1}\tilde{\omega}(a\xi) = a^{-1} \frac{d}{d\xi} [\xi\omega(a\xi)], \quad q(\xi) \equiv \tilde{q}(a\xi), \quad (17)$$

отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (15) у безрозмірній формі

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \quad (18)$$

де ядро має вигляд

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \xi \eta^{-1} [\mathcal{R}(\xi - \eta) - \mathcal{R}(\xi + \eta)] - \xi [\mathcal{R}(\xi - 1) - \mathcal{R}(\xi + 1)], \quad (19)$$

і

$$\mathcal{R}(z) \equiv \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) - \frac{k_2}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right],$$

$$\beta_1 = a^{-1} h_1, \quad \beta_2 = a^{-1} h_2.$$

**4. Асимптотичний розподіл напружень в околі контуру тріщини та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень.** Як і в класичній механіці руйнування матеріалів без початкових напружень [21], коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини визначаємо як коефіцієнти при сингулярностях в розподілі відповідних компонентів тензора напружень при наближенні до контуру тріщини:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{33}(r, 0), & K_{II} &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{3r}(r, 0), \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{3\theta}(r, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

З розв'язку рівняння (18) з урахуванням (17), (12), (10), (7), (6) і подань (4) розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції можна отримати розподіл напружень і переміщень в матеріалі. Розглянемо значення компонент тензора напружень в площині розміщення тріщини  $x_3 = 0$  в області поза тріщиною  $r > a$ . З (4) з урахуванням (7), (12), застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} t_{3r}(r, 0) &= C_{44}^0 d_1^0 \frac{k}{k_2 \sqrt{n_1^0}} \frac{a\omega(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \\ t_{3\theta}(r, 0) &= 0, \quad t_{33}(r, 0) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де символом  $O(1)$  позначено доданки, які не мають особливостей при  $r \rightarrow +a$ .

Тоді з урахуванням (21) з (20) отримуємо такі значення для коефіцієнтів інтенсивності напружень:

$$K_I = 0, \quad K_{II} = C_{44}^0 d_1^0 \frac{k}{k_2 \sqrt{n_1^0}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \omega(a), \quad K_{III} = 0, \quad (22)$$

де  $\omega(a)$  визначається з розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (15) з урахуванням (12).

Переходячи в (22) до безрозмірних функцій, отримуємо

$$K_I = 0, \quad K_{II} = C_{44} d_1 (n_1^0)^{-1/2} \frac{k}{k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad K_{III} = 0, \quad (23)$$

де  $f(1)$  визначається з розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (18).

Як бачимо, коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_{II}$  залежить як від величин початкових напружень і переміщень (оскільки параметри  $C_{44}^0$ ,  $d_1^0$ ,  $\ell_1^0$ ,  $k$ , а також функція  $f$  залежать від коефіцієнтів початкового подовження (скорочення) вздовж координатних осей  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ), так і від геометричних параметрів задачі (радіуса тріщин і відстані між ними).

Розглянемо граничний випадок розташування тріщин, коли відстані між ними прямують до нескінченності. Із виразів (19) для ядер інтегральних рівнянь випливає, що при  $\beta \equiv ha^{-1} \rightarrow \infty$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\xi, \eta) = 0.$$

Тоді з рівняння (18), використовуючи заміну змінної  $\eta = \xi \sin \theta$ , отримуємо граничне значення функції  $f$ :

$$f^\infty(\xi) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\xi) = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta. \quad (24)$$

Оскільки

$$\xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta = \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta,$$

з (24) маємо

$$f^\infty(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta, \quad (25)$$

звідки випливає, що

$$\int_0^1 f^\infty(\eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta. \quad (26)$$

Підставляючи рівність (26) у вирази (23), отримуємо такі значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для граничного випадку розташування тріщин, коли  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow \infty$ :

$$K_I^\infty = 0, \quad K_{II}^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta^2 q(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (27)$$

З виразів (27) бачимо, що в зазначеному граничному випадку розташування тріщин коефіцієнти інтенсивності напружень не залежать від початкових напружень та деформацій, а їх значення повністю співпадають (з точністю до позначень) зі значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманими в задачі про ізольовану тріщину нормального відриву в нескінченному матеріалі з початковими напруженнями [6, 8] і в задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному тілі в рамках механіки руйнування матеріалів без початкових напружень [21].

Зокрема, коли на берегах тріщин діє рівномірне зсувне навантаження вигляду

$$\tau(r) = \tau_0 = \text{const}, \quad (28)$$

з (27) отримуємо

$$K_I^\infty = 0, \quad K_{II}^\infty = \frac{\tau}{2} \sqrt{\pi a}, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (29)$$

**5. Закономірності впливу початкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень.** Нижче наводимо результати чисельного розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку зсувного навантаження на берегах тріщини вигляду (28). Для чисельного дослідження інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (18) використовували метод Бубнова – Гальоркіна з вибором системи степеневих функцій як системи координатних функцій. Чисельне інтегрування проводили за квадратурними формулами Гаусса.

Для прикладу наведено результати чисельного дослідження для випадку шаруватого композита з ізотропними шарами. У макрооб'ємах такий композит моделюють трансверсально-ізотропним середовищем [11]. Тріщини розміщені в площинах  $x_3 = \text{const}$ , які паралельні межах поділу шарів.

У рамках теорії композитних матеріалів стохастичної структури ефективні макрохарактеристики таких композитів визначають за пружними характеристиками компонентів і їх об'ємною концентрацією в композиті [11]:

$$\begin{aligned}
 E_1^* &= \frac{4\Delta G_{12}^*}{2G_{12}^* \lambda_{33}^* + \Delta}, & E_3^* &= \frac{\Delta}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}, & \nu_{13}^* &= \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}, & \nu_{12}^* &= \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1, \\
 G_{13}^* &= \lambda_{44}^*, & G_{12}^* &= \lambda_{66}^*, & \Delta &= \lambda_{33}^* (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) - 2\lambda_{13}^{*2}, \\
 \lambda_{13}^* &= \langle \lambda \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) z, \\
 \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) &= \langle \lambda + \mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 z, \\
 \lambda_{33}^* &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - 2\mu_2) z, \\
 \lambda_{44}^* &= \mu_1 \mu_2 \mu_4^{-1}, & \lambda_{66}^* &= \langle \mu \rangle, \\
 z &= (\lambda_4 + 2\mu_4)^{-1}, & \lambda_4 &= c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1, \\
 \mu_4 &= c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1, & \langle x \rangle &\equiv c_1 x_1 + c_2 x_2.
 \end{aligned} \tag{30}$$

(Шари укладено в площинах  $x_1 x_2$ ;  $\lambda_v, \mu_v$  – сталі Ляме  $v$ -го шару,  $v = 1, 2$ ;  $c_v$  – об'ємна концентрація шарів з пружними властивостями  $\lambda_v, \mu_v$ .)

Рис. 1 ілюструє залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_{II}/K_{II}^\infty$  (де  $K_{II}^\infty$  – коефіцієнт інтенсивності напружень для випадку ізольованої тріщини радіального зсуву в нескінченному матеріалі, який обчислюється згідно з (27)) від параметра початкового розтягу (або стиску)  $\lambda_1$ , зумовленого дією початкових розтягувальних (або стискувальних) напружень  $\sigma_{11}^0$ , для значень відносної піввідстані між тріщинами  $\beta = h/a = 1/2, 1/4, 1$  при відношенні модулів пружності шарів  $E^{(1)}/E^{(2)} = 3$  з однаковими коефіцієнтами Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$  і при коефіцієнті концентрації шарів з модулем пружності  $E^{(1)}$ , рівним  $c_1 = 0.3$ . При цьому значення  $\lambda_1 > 1$  відповідають початковим розтягувальним напруженням, значення  $\lambda_1 < 1$  – початковим стискувальним напруженням; при  $\lambda_1 = 1$  початкові напруження відсутні. Бачимо, що коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_{II}$  істотно залежить від початкових напружень, особливо у випадку дії стискувальних початкових напружень.

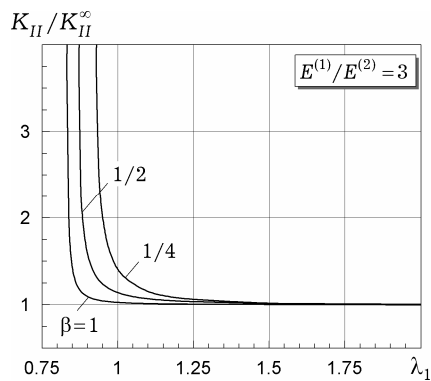


Рис. 1

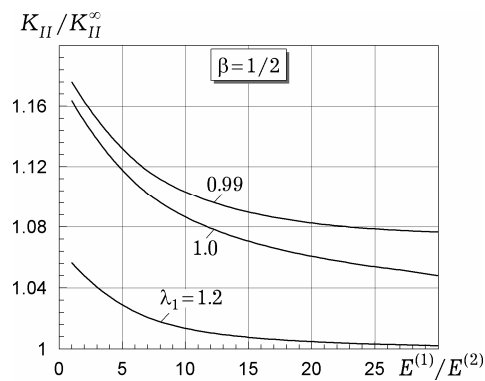


Рис. 2

На рис. 2 для цього ж матеріалу наведено залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_{II}/K_{II}^\infty$  від відношення модулів пружності ізотропних шарів  $E^{(1)}/E^{(2)}$ . Криві побудовано при  $\beta = 1/2$  для



значень  $\lambda_1 = 0.99$  (стискувальні початкові напруження),  $\lambda_1 = 1.0$  (відсутність початкових напружень) і  $\lambda_1 = 1.2$  (розтягувальні початкові напруження). Бачимо, що значення  $K_{II}/K_{II}^\infty$  монотонно зменшуються при зростанні відношення модулів пружності шарів  $E^{(1)}/E^{(2)}$  композита.

Розглянемо приклад розрахунку для конкретного шаруватого композита – алюмоборосилікатного скла в композиції з епоксидномалеїновою смолою, для яких сталі Ляме, що фігурують в (30), мають такі значення [11]

- для скла:  $\lambda_1 = 1.94 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu_1 = 2.92 \cdot 10^4$  МПа,
- для смоли:  $\lambda_2 = 3.69 \cdot 10^3$  МПа,  $\mu_2 = 1.14 \cdot 10^3$  МПа.

На рис. 3 для цього матеріалу наведено залежності  $K_{II}/K_{II}^\infty$  від безроз-

мірної піввідстані між тріщинами  $\beta = h/a$  при коефіцієнті об'ємної концентрації скла  $c_1 = 0.3$  для значень параметра початкового стиску (або розтягу)  $\lambda_1 = 0.99, 1.00, 1.01, 1.05$ . З рисунка бачимо, що взаємовплив тріщин між собою в композиті з початковими напруженнями призводить до збільшення (особливо істотного при малих значеннях  $\beta$ ) величин коефіцієнтів інтенсивності напружень порівняно з випадком ізольованої (невзаємодіючої) тріщини в нескінченному тілі.

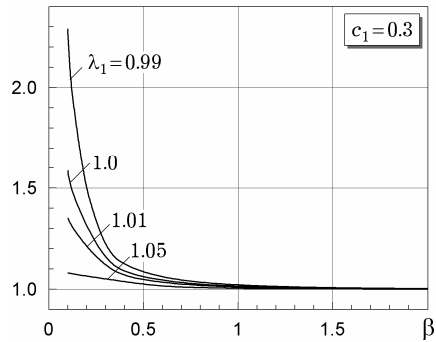


Рис. 3

Так, для  $\lambda_1 = 0.99$  при  $\beta = 0.1$  значення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$  у 2.3 разів більше, ніж значення КІН  $K_{II}^\infty$  для випадку ізольованої тріщини в просторі. З іншого боку, при зростанні відстані між тріщинами їх взаємний вплив швидко послаблюється, а відповідні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для періодичної системи співвісних тріщин прямують до значень, які отримуються для ізольованої тріщини в нескінченному тілі. З точністю, придатною для практичних застосувань, зазначеною взаємодією тріщин можна нехтувати при відстанях між ними, що становлять 8 і більше радіусів тріщини, оскільки відмінність між значеннями  $K_{II}$  та  $K_{II}^\infty$  у цьому випадку для всіх розглянутих значень параметра  $\lambda_1$  складає менше 5%.

**6. Значення критичних параметрів стиску.** Відповідно до викладеного в [15, 16] «об'єднаного» підходу до дослідження неklasичних проблем механіки руйнування критичні параметри стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу при стисканні вдовж періодичної системи паралельних співвісних тріщин (і, відповідно до запропонованого в [7, 9] критерію руйнування, визначають початок руйнування тіла при стисканні вздовж тріщин), можуть бути обчислені безпосередньо із розв'язку задачі про напружено-деформований стан попередньо напруженого матеріалу, послабленого періодичним рядом паралельних співвісних тріщин, як значення початкових стискувальних напружень, при наближенні до яких відбувається різка «резонансopodobна» зміна величин коефіцієнтів інтенсивності напружень.

З використанням зазначеної методики обчислено критичні параметри стиску, що відповідають антисиметричній (за термінологією [7, 9]) формі втрати стійкості матеріалу в околі періодичної системи співвісних тріщин. Так, з рис. 1 бачимо, що криві залежностей  $K_{II}/K_{II}^\infty$  від параметра  $\lambda_1$  ма-

ють яскраво виражені асимптоти, що відповідають «резонансоподібному» зростанню значень коефіцієнтів інтенсивності напружень. Це зростання відбувається при досягненні початковими стискувальними напруженнями значень, при яких відбувається локальна втрата стійкості матеріалу.

На рис. 4 наведено залежності отриманих таким чином критичних значень напружень стиску, віднесених до зведеного модуля пружності шаруватого композита з ізотропними шарами, від відношення модулів пружності матеріалів шарів [11] (при коефіцієнті концентрації шарів з модулем пружності  $E^{(1)}$ , рівним  $c_1 = 0.3$ ). Бачимо, що зі зростанням відношення  $E^{(1)}/E^{(2)}$  абсолютні значення критичних напружень зменшуються, причому меншим відстаням між тріщинами відповідають менші значення критичних напружень стиску.

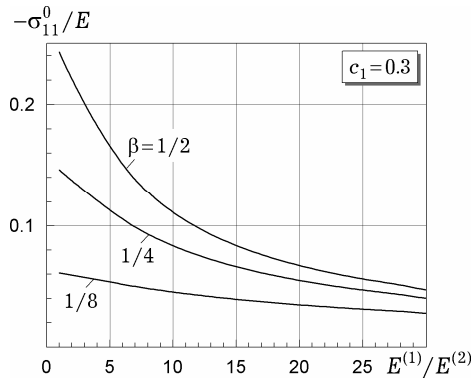


Рис. 4

**7. Висновки.** На основі дослідженої в роботі задачі про напружений стан попередньо напруженого композитного матеріалу з періодичною системою паралельних співвісних дископодібних тріщин радіального зсуву можна зробити наступні висновки:

- для розглянутих композитних матеріалів початкові (залишкові технологічні) напруження, що діють уздовж площин розміщення тріщин, істотно впливають на значення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$  в околах контурів тріщин. При цьому спостерігається різка «резонансоподібна» зміна значень коефіцієнтів інтенсивності напружень при наближенні початкових стискувальних напружень до значень, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщин;

- взаємний вплив періодичної системи співвісних тріщин нормального відриву в тілі з початковими напруженнями призводить до збільшення (особливо істотного для малих відстаней між тріщинами) значень коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$  порівняно зі значенням КІН  $K_{II}^{\infty}$ , отриманими в задачі про ізольовану тріщину радіального зсуву в необмеженому попередньо напруженому матеріалі;

- при зростанні відстані між тріщинами їх взаємовплив знижується, а значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин прямують до значень, що отримуються у випадку ізольованої тріщини в необмеженому матеріалі. При цьому для практичних розрахунків зазначеним взаємним впливом тріщин можна нехтувати при значеннях відстаней між тріщинами, що перевищують 8 радіусів тріщин;

- характеристики композитного матеріалу (зокрема, співвідношення між модулями пружності матеріалів шарів композита) досить істотно впливають на коефіцієнти інтенсивності напружень;

- значення критичних параметрів стиску, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщин, залежать від геометричних параметрів задачі (відстані між тріщинами та радіуса тріщин) та фізико-механічних характеристик композита.

Слід також зазначити, що отримані в роботі результати можуть бути використані при аналізі аналогічної задачі механіки руйнування матеріалів без початкових напружень, оскільки при значенні  $\lambda_1 = 1.0$  наведені числові результати відповідають випадку відсутності в тілі початкових (залишкових) напружень.

1. *Богданов В. Л.* Кручения поперечно нагруженного тела с периодической системой сдвигов дископодобных трещин // *Машиностроение*. – 2008. – № 4. – С. 3–7.
2. *Богданов В. Л.* Неосесимметричная задача о периодической системе дискообразных трещин нормального отрыва в теле с начальными напряжениями // *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 4. – С. 149–159.
3. *Богданов В. Л.* Осесимметричная задача про приповерхневую трещину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 2. – С. 45–54.
4. *Богданов В. Л.* Про кругову трещину зсуву в напівнескінченному композиті з початковими напруженнями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2007. – **43**, № 3. – С. 27–34.  
 The same: *Bogdanov V. L.* On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // *Mater. Sci.* – 2007. – **43**, No. 3. – P. 321–330.
5. *Гузь А. Н.* К линеаризированной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // *Докл. АН СССР*. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
6. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: *Наук. думка*, 1983. – 296 с.
7. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // *Докл. АН СССР*. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42–45.
8. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: *Наук. думка*, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5-ти кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 2.)
9. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: *Наук. думка*, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 4, Кн. 1.)
10. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: *Наука*, 1977. – 220 с.
11. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шижула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: *Наук. думка*, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 3.)
12. *Шульга Н. А., Томашевский В. Т.* Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: *А.С.К.*, 1997. – 394 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 6.)
13. *Bogdanov V. L.* Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // *Mech. Advanc. Mater. and Struct.* – 2008. – **15**, No. 6. – P. 453–460.
14. *Bogdanov V. L.* Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 371–384.  
 The same: *Bogdanov V. L.* Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2008. – **51**, № 3. – С. 176–185.
15. *Bogdanov V. L., Guz' A. N., Nazarenko V. M.* Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 2. – P. 111–124.  
 The same: *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Осесимметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // *Прикл. механика*. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
16. *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Stress-strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 12. – P. 1339–1350.  
 The same: *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Напряженно-деформированное состояние материала с периодической системой соосных круговых трещин радиального сдвига при действии направленных вдоль них усилий // *Прикл. механика*. – 2010. – **46**, № 12. – С. 3–16.
17. *Guz A. N.* Mechanics of crack propagation in materials with initial (residual) stresses (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, No. 2. – P. 121–168.  
 The same: *Гузь А. Н.* Механика движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями (обзор) // *Прикл. механика*. – 2011. – **47**, № 2. – С. 3–75.
18. *Guz A. N.* On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 8. – P. 937–941.

- Te same: *Guz A. N.* On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 8. – С. 138–144.
19. *Guz A. N., Dyshel' M. Sh., Nazarenko V. M.* Fracture and stability of materials and structural members with cracks: approaches and results // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 12. – P. 1323–1359.  
Te same: *Гузъ А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 12. – С. 18–64.
20. *Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
21. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.
22. *Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – **104**. – P. 275–289.

### О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СООСНЫХ ТРЕЩИН РАДИАЛЬНОГО СДВИГА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОМ КОМПОЗИТЕ

На основании подходов линеаризованной теории упругости рассмотрена осесимметричная задача о напряженно-деформированном состоянии композита с начальными (остаточными) напряжениями, содержащего периодическую систему параллельных соосных трещин радиального сдвига. С использованием представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции и аппарата интегральных преобразований Ханкеля задача сведена к системе парных интегральных уравнений, а затем – к разрешающему интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности контуров трещин и для случая слоистого композита с изотропными слоями проанализирована их зависимость от начальных напряжений, механических характеристик компонентов и геометрических параметров задачи. Из анализа эффекта резкого «резонансноподобного» изменения значений коэффициентов интенсивности напряжений при определенных значениях начальных сжимающих напряжений определены критические параметры сжатия, соответствующие локальной потере устойчивости материала при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин.

### ON INTERACTION OF A PERIODICAL SYSTEM OF PARALLEL COAXIAL CRACKS OF RADIAL SHEAR IN PRESTRESSED COMPOSITE

An axisymmetric problem on stress-strain state of a composite with initial (residual) stresses containing a periodical system of parallel coaxial Mode II cracks is considered. The approaches of the linearized mechanics of elasticity are used. The analysis involves reducing the problem to a system of dual integral equations and then to Fredholm integral equation of the second kind by use of representations of general solutions of the equilibrium equations in terms of harmonic potential functions and the apparatus of integral Hankel transformations. The representations of the stress intensity factors near the crack edges are obtained and their dependences on the initial stresses, physical-mechanical parameters of composites and geometric parameters of problem are investigated for laminar composites with isotropic layers. On the basis of analysis of the «resonance-like» behavior of the stress intensity factors when the initial compressive stresses approach the values at which the local loss of stability of the materials occurs, the critical parameters of compression along the periodical system of parallel coaxial cracks are determined.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
25.05.11