

МОДЕЛЮВАННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ КІРХГОФА З ТОНКОСТІННИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ МАЛОЇ КОНТРАСТНОСТІ

Запропоновано модель пружно-динамічної взаємодії тонкої пластини з тонкостінним пружним прямолінійним включенням малої контрастності, що перебуває у ній в умовах ідеального контакту за усталених згинних коливань. Рух пластини описується згідно з гіпотезами Кірхгофа. Процедура дослідження ґрунтується на використанні методів теорії сингулярних збурень. На основі отриманої моделі вивчено спектральні особливості розсіяних неоднорідністю згинних хвиль у дальню зону.

Вступ. Вивченню дифракційних явищ у пружних середовищах, що містять тонкостінні пружні елементи, присвячено значну кількість публікацій (див., наприклад, [2, 6, 7, 12] та огляди літератури в них), що зумовлено практичними потребами механіки руйнування, неруйнівного контролю, механіки композитних матеріалів і конструкцій тощо. У переважній більшості робіт розглядалися тонкі неоднорідності великої або малої жорсткості [3, 9, 12, 14]. Динамічна взаємодія малокоонтрастних включень з пружним середовищем вивчалась лише в окремих випадках [2, 5].

Задачі розсіяння згинних хвиль у тонких пружних пластинах розглядалися, в основному, у випадку розсіювачів опуклих чи канонічних форм [1, 8, 10, 11, 13]. У цій роботі методом зрощування асимптотичних розкладів промодельовано взаємодію хвиль згину із тонкостінним прямолінійним включенням малої контрастності та сталої товщини, що міститься у тонкій пластині Кірхгофа. На цій основі за допомогою інтегральних подань Гріна розв'язків змодельованих задач досліджено закономірності поведінки розсіяних полів згинних хвиль у дальній хвильовій зоні (зоні Фраунгофера).

Постановка задачі. Розглянемо необмежену тонку пластину товщини h , яка характеризується циліндричною жорсткістю D , коефіцієнтом Пуассона ν , густиною ρ і рух якої описується на основі гіпотез Кірхгофа [1]. У пластині в умовах ідеального механічного контакту з нею розміщене наскрізне тонке прямолінійне пружне включення із відповідними параметрами D_0 , ν_0 , ρ_0 , що займає область

$$W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, 2|x_2| < h_0\}, \quad \varepsilon = h_0/a \ll 1.$$

Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $2a$ і h_0 – довжина та поздовжня товщина включення (наскрізна товщина включення становить h); ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує малу відносну поздовжню товщину неоднорідності. Розглядаємо включення малої контрастності, тобто між пружними та геометричними параметрами композита має місце співвідношення

$$\varepsilon < \frac{D_0}{D} < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Припускаємо також, що у цьому випадку та за умови $h/h_0 \ll 1$ динамічна поведінка включення також моделюється в рамках гіпотез Кірхгофа.

За усталених згинних коливань прогини складових композиту задовольняють рівняння руху [1, 11]

$$\Delta^2 w(\mathbf{x}) - k^4 w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (2)$$

$$\Delta^2 w_0(\mathbf{x}) - k_0^4 w_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \quad (3)$$

$$w(\mathbf{x}) = w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + w^{\text{in}}(\mathbf{x}),$$

де $w(\mathbf{x})$ та $w^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ – повне та розсіяне неоднорідністю поля згинних хвиль у пластині; $w^{\text{in}}(\mathbf{x})$ – прогин однорідної пластини, що характеризує прикладене навантаження; $w_0(\mathbf{x})$ – прогин включення; $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$ та $k_0 = \sqrt[4]{\rho_0 h \omega^2 / D_0}$ – хвильові числа згинних хвиль пластини та включення; ω – кругова частота коливань.

Умови механічного контакту пластини та неоднорідності, згідно з моделлю Кірхгофа, подамо у вигляді

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= w_0(\mathbf{x}), & \gamma(\mathbf{x}) &= \gamma_0(\mathbf{x}), \\ M(\mathbf{x}) &= M_0(\mathbf{x}), & V(\mathbf{x}) &= V_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \partial W_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

де γ , M , V та γ_0 , M_0 , V_0 – кути повороту нормального елемента, згинні моменти та узагальнені перерізуючі сили у пластині та включенні [1, 11] відповідно.

Крім цього, повинна виконуватись умова випромінювання на безмежності [1]

$$\begin{aligned} w^{\text{sc}}(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \pi/4)} f(\theta) + o(1/\sqrt{r}), & r &\rightarrow \infty, \\ x_1 &= r \cos \theta, & x_2 &= r \sin \theta, & 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (5)$$

де $f(\theta)$ – комплексна амплітуда розсіяння згинних хвиль; (r, θ) – полярні координати.

Ефективні умови механічного контакту між складовими композита.

Щоб отримати узагальнені умови контакту, записані на серединній лінії включення, скористаємося методами теорії сингулярних збурень [2, 6, 9]. Прогини у матриці та включенні подамо у вигляді асимптотичних розвинень

$$w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j^{\text{sc}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \quad (6)$$

$$w_0(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_{0j}(x_1, \bar{x}_2), \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Підставимо подання (6), (7) у рівняння (2), (3) та умови контакту (4), попередньо виконавши заміну змінної $x_2 = \varepsilon \bar{x}_2$ в області включення, і прирівняємо вирази із однаковими степенями ε . Таким чином з урахуванням співвідношення (1) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення (7). Звідси з точністю до головних членів асимптотик (6), (7) маємо

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 0, & \Phi_2 &= hD \left[(vD_0^{-1} - v_0D^{-1}) \frac{\partial^2 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2} + (D_0^{-1} - D^{-1}) \frac{\partial^2 w^{\text{in}}}{\partial x_2^2} \right], \\ \Phi_3 &= hD d_1 \frac{\partial^3 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2 \partial x_2}, & \Phi_4 &= hD \left(d_2 w^{\text{in}} + d_3 \frac{\partial^4 w^{\text{in}}}{\partial x_1^4} + d_4 \frac{\partial^4 w^{\text{in}}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right), \\ & & & |x_1| < a, \quad x_2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1(1 - v_0) + v - 1, & d_2 &= k^4 - \alpha_1 k_0^4, \\ d_3 &= \alpha_1(1 - v_0^2) + v v_0 - 1, & d_4 &= v_0 - v, & \alpha_1 &= D_0/D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= w(x_1, +0) - w(x_1, -0), & \Phi_2 &= \gamma(x_1, +0) - \gamma(x_1, -0), \\ \Phi_3 &= M(x_1, +0) - M(x_1, -0), & \Phi_4 &= V(x_1, +0) - V(x_1, -0).\end{aligned}$$

Узагальнені (ефективні) умови контакту (8) асимптотично точно моделюють реальні умови контакту (4) та істотно спрощують розв'язання поставленої задачі (1)–(5).

Визначення прогину пластини. Система (8) перерізуючих сил і відповідних моментів, прикладених до включення, незрівноважена. Тому необхідно врахувати дію зосереджених сил і моментів, прикладених на краях включення [2]. Подамо прогини пластини $w^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ у вигляді

$$w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = w_1^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + w_2^{\text{sc}}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

де складова $w_1^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ – розв'язок задачі (2), (5), (8), $w_2^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ – сукупність зосереджених сил і моментів на краях включення. Використавши теорему взаємності робіт [11] та ефективні умови (8), для $w_1^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ отримаємо інтегральне подання

$$\begin{aligned}w_1^{\text{sc}}(\mathbf{x}) &= \int_{-a}^a \left[\Phi_3(x_{10}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{20}} - \Phi_2(x_{10}) M^G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_4(x_{10}) V^G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \right] dx_{10}, \quad \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}), \quad x_{20} = 0, \quad (10)\end{aligned}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = [i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - 2K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)] / (8\pi D k^2),$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок рівняння (2); $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ганкеля першого роду нульового порядку; $K_0(x)$ – модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку; $V^G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ і $M^G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ – узагальнена перерізуюча сила та згинний момент, що відповідають прогину $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ [4].

Подання для $w_2^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ отримуємо за допомогою методу зрощування асимптотичних розвинень підходом, викладеним в [2, 6]:

$$w_2^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = hD \sum_{j=1}^3 [A_j^+ G_j^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^+) - A_j^- G_j^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^-)], \quad (11)$$

де

$$G_j^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^\pm) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{j0}}, \quad j = 1, 2,$$

$$G_3^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^\pm) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^\pm), \quad \mathbf{x}_0^\pm = (\pm a, 0),$$

$$A_1^\pm = -d_3 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(\mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{10}^2} - d_4 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(\mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{20}^2},$$

$$A_2^\pm = -d_1 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(\mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{10} \partial x_{20}},$$

$$A_3^\pm = d_3 \frac{\partial^3 w^{\text{in}}(\mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{10}^3} + d_4 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(\mathbf{x}_0^\pm)}{\partial x_{10} \partial x_{20}^2}.$$

Із подань (9)–(11), проінтегрувавши частинами інтеграли в (10), отримаємо співвідношення для визначення прогину пластини:

$$\begin{aligned}
w^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = & hD \int_{-a}^a \left[d_5 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(x_{10})}{\partial x_{10}^2} + d_6 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(x_{10})}{\partial x_{20}^2} \right] \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{10}^2} dx_{10} + \\
& + hD \int_{-a}^a \left[d_6 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(x_{10})}{\partial x_{10}^2} + (\alpha_1^{-1} - 1) \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(x_{10})}{\partial x_{20}^2} \right] \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{20}^2} dx_{10} - \\
& - hD \int_{-a}^a \left[d_1 \frac{\partial^2 w^{\text{in}}(x_{10})}{\partial x_{10} \partial x_{20}} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{10} \partial x_{20}} + d_2 w^{\text{in}}(x_{10}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \right] dx_{10}, \\
& x_{20} = 0, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$d_5 = \alpha_1(v_0^2 - 1) + \alpha_1^{-1}v^2 - 2v\nu_0 + 1, \quad d_6 = \alpha_1^{-1}v - \nu_0.$$

Співвідношення (9)–(12) визначають розв'язок поставленої задачі (1)–(5) всюди, за винятком малих околів країв включення, де справджуються внутрішні асимптотичні уточнення [2, 6].

Хвильові поля у дальній зоні Фраунгофера. Нехай включення зондується плоскою гармонічною хвилею згину

$$w^{\text{in}}(\mathbf{x}) = W_0 \exp[-ik(x_1 \cos \theta_{\text{in}} + x_2 \sin \theta_{\text{in}})],$$

де W_0 і θ_{in} – амплітуда та кут падіння хвилі. Враховуючи у (12) асимптотичні подання для функцій $H_0^{(1)}(x)$ і $K_0(x)$ при великих аргументах, для комплексної амплітуди розсіяння згинних хвиль із (5), (12) отримаємо

$$\begin{aligned}
f(\theta) = & \frac{i}{8} W_0 k_*^2 \varepsilon \left\{ [d_5 \cos^2(\theta_{\text{in}}) + d_6 \sin^2(\theta_{\text{in}})] \cos^2(\theta) + \right. \\
& + [(d_6 \cos^2(\theta_{\text{in}}) + (\alpha_1^{-1} - 1) \sin^2(\theta_{\text{in}}))] \sin^2(\theta) - \\
& \left. - \frac{1}{4} d_1 \sin(2\theta_{\text{in}}) \sin(2\theta) - d_2 k^{-4} \right\} j(\theta, \theta_{\text{in}}), \quad k_* = ka, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$j(\theta, \theta_{\text{in}}) = 2 \frac{\sin(y)}{y}, \quad y = k_* (\cos \theta + \cos \theta_{\text{in}}).$$

Звідси для однотипних складових пластини ($\nu = \nu_0$) маємо

$$\begin{aligned}
f(\theta) = & \frac{i}{8} W_0 k_*^2 \varepsilon (\alpha_1^{-1} - 1) \left\{ [(\alpha_1(1 - \nu^2) + \nu^2) \cos^2(\theta_{\text{in}}) + \right. \\
& + \nu \sin^2(\theta_{\text{in}})] \cos^2(\theta) + [(\nu \cos^2(\theta_{\text{in}}) + \sin^2(\theta_{\text{in}}))] \sin^2(\theta) + \frac{1}{4} (\nu - 1) \alpha_1 \sin(2\theta_{\text{in}}) \sin(2\theta) + \\
& \left. + (\alpha_1^{-1} - 1)^{-1} (\rho_0 \rho^{-1} - 1) \right\} j(\theta, \theta_{\text{in}}),
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{D_0}{D} = \frac{E_0}{E} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad k_* = ka, \tag{14}$$

де E та E_0 – модулі Юнга матеріалів матриці та включення.

На рис. 1 наведено модуль нормованої амплітуди розсіяння $f_0 = 8|f|/(W_0 k_*^2 \varepsilon)$ згинної хвилі у випадку, коли жорсткість матеріалу включення є меншою від жорсткості матеріалу матриці: $E_0/E = 0.5$ (рис. 1a) і

навпаки, більшою: $E_0/E = 2$ (рис. 1б), при моностатичному зондуванні неоднорідності ($\theta = \theta_{in}$) та при $\nu = \nu_0 = 1/3$. Суцільна, штрихова та пунктирна криві відповідають значенням $k_* = 0.5, 2.0, 5.0$. Бачимо, що рівень нормованих амплітуд розсіяння є більшим для жорсткіших включень, спадає при зростанні хвильового розміру розсіювача і є максимальним при $\theta_{in} = \pi/2$.

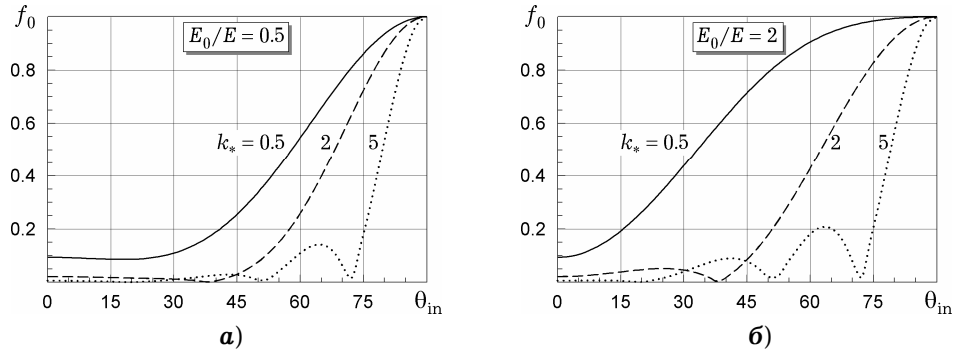


Рис. 1

На рис. 2 зображено дані бістатичного розсіяння згинних хвиль при $E/E_0 = \rho/\rho_0 = 2$, $\nu = \nu_0 = 1/3$ і для різних хвильових розмірів розсіювача $k_* = 0.5, 2.0, 5.0$ (позначення кривих такі самі, як на рис. 1).

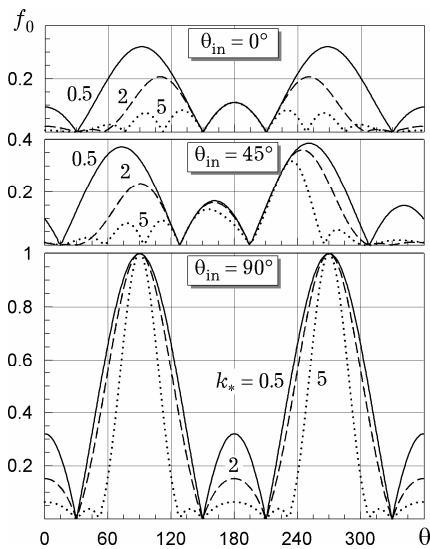


Рис. 2

Аналіз цих результатів, а також відповідні аналітичні дослідження подань (13), (14) свідчать про те, що справджується співвідношення взаємності для амплітуд розсіяння

$$f(\theta, \theta_{in}) = f(\theta_{in}, \theta),$$

а, отже, запропоноване асимптотичне моделювання хвильових процесів є коректним. Крім цього, бачимо, що зі зростанням k_* рівень нормованих амплітуд розсіяння зменшується при довільних кутах спостереження і зондування неоднорідності θ і θ_{in} .

Висновки. В результаті проведеного математичного моделювання (на основі теорії сингулярних збурень) хвильових явищ у тонкій пластині Кірхгофа із тонкостінним прямолінійним малоконтрастним включенням сталі

товщини отримано аналітичні вирази для визначення прогинів пластини та напружень. Запропонований підхід годиться також і для випадку тонких неоднорідностей більш складної геометрії.

Доведено співвідношення взаємності для амплітуд розсіяння згинних хвиль тонкими малоконтрастними розсіювачами.

Проведені аналітично-числові дослідження створюють підґрунтя для розробки ефективних алгоритмів розв'язання відповідних обернених задач – визначення механічних властивостей і просторової орієнтації тонкостінних неоднорідностей за даними розсіяння згинних хвиль у зону Фраунгофера.

Робота підтримана ДФФД України (проект Ф40.1/018).

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
2. Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунец Я. И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 3. – С. 55–64.
3. Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськів В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
4. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. – Москва: Наука, 1971. – 287 с.
5. Кунець Я. І., Матус В. В., Міщенко В. О. Дистанційне визначення фізико-механічних параметрів тонкостінних дефектів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 5. – С. 117–118.
Те саме: *Kunets' Ya. I., Matus V. V., Mishchenko V. O. Remote evaluation of physicomaterial parameters of thin-walled defects // Mater. Sci. – 2000. – **36**, No. 5. – P. 776–769.*
6. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 1. – С. 75–83.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Chan K. L., Smith B., Wester E. Flexural wave scattering in a quarter-infinite thin plate with circular scatterers // Int. J. Solids and Struct. – 2009. – **46**. – P. 3669–3676.
9. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**. – P. 331–345.
10. Lee W. M., Chen J. T. Scattering of flexural wave in a thin plate with multiple circular inclusions by using the null-field integral equation approach // J. Sound and Vibr. – 2010. – **329**, No. 8. – P. 1042–1061.
11. Matus V. V., Emets V. F. T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate // J. Sound and Vibr. – 2010. – **329**, No. 14. – P. 2843–2850.
12. Moiseenok A. P., Popov V. G. Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // Mech. Solids. – 2009. – **44**, No. 4. – P. 621–631.
Те саме: *Моїсеєнок А. П., Попов В. Г. Взаимодействие плоских нестационарных волн с тонким упругим включением при условии гладкого контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 152–164.*
13. Parnell W. J., Martin P. A. Multiple scattering of flexural waves by random configurations of inclusions in thin plates // Wave Motion. – 2011. – **48**. – P. 161–175.
14. Popov V. H., Moiseenok A. P. Solution of the dynamic antiplane problem for a body with an inclusion by the method of finite differences by time // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 4. – P. 452–461.
Те саме: *Попов В. Г., Моїсеєнок О. П. Розв'язання динамічної антиплоскої задачі для тіла з включенням методом скінченних різниць за часом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 4. – С. 19–25.*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ
ВКЛЮЧЕНИЕМ МАЛОЙ КОНТРАСТНОСТИ**

Предложена модель упруго-динамического взаимодействия тонкой пластины с тонкостенным упругим прямолинейным включением малой контрастности, которое находится в ней в условиях идеального контакта при установившихся изгибных колебаниях. Движение пластины описывается согласно гипотез Кирхгофа. Процедура исследования базируется на использовании методов теории сингулярных возмущений. На основании полученной модели изучены спектральные особенности рассеянных неоднородностью изгибных волн в дальнюю зону.

**MODELING OF FLEXURAL VIBRATIONS
OF KIRCHHOFF PLATE WITH THIN-WALLED ELASTIC
INCLUSION OF WEAK CONTRAST**

A model of elastodynamic interaction between a thin plate and a thin-walled elastic rectilinear inclusion of weak contrast has been proposed. The inclusion is in the plate under conditions of perfect contact at steady flexural vibrations. The plate motion is described according to the Kirchhoff hypotheses. The procedure of study is based on the use of the methods of singular perturbations theory. On the basis of obtained model the spectral characteristics of flexural waves scattered into the far field have been studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
08.07.11