

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Побудовано розв'язок задачі про напружений стан ортотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом механічних квадратур. Досліджено вплив кривини оболонки, глибини та довжини тріщини на коефіцієнти інтенсивності напружень і коефіцієнти інтенсивності зусиль та моменту.

У сучасних конструкціях та спорудах існує велика кількість структурних дефектів і мікрodefектів. Під впливом навантажень можуть виникати нові тріщини або розвиватися вже існуючі, що призводить до руйнування конструкцій.

Тому виникає потреба дослідження напруженого стану оболонок з тріщинами, що є однією із найважливіших задач механіки руйнування.

На сьогодні досліджено ортотропні оболонки з наскрізними тріщинами [3] або ізотропні з внутрішніми та поверхневими [1, 2, 5].

Робота присвячена дослідженню ортотропної оболонки довільної кривини зі сталою товщиною h , послабленої внутрішньою тріщиною довжини 2ℓ уздовж осі Ox симетрично відносно товщини оболонки (рис. 1). Осі координат орієнтовані вздовж ліній головних кривин середньої поверхні оболонки. Оболонка перебуває під дією навантаження, симетричного відносно лінії тріщини.

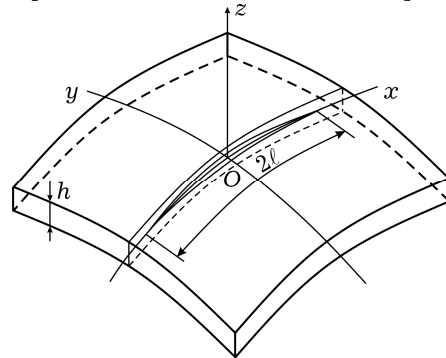


Рис. 1

Для розв'язання задачі застосуємо модель лінійних пружин (line-spring model) [4, 6, 8], яка дозволяє тривимірну задачу розглядати в двовимірній постановці.

У роботах [1, 2] з використанням line-spring model досліджено ізотропні оболонки довільної кривини з внутрішньою і поверхневими тріщинами.

У прошарку суцільного матеріалу навколо фронту внутрішньої тріщини в оболонці під дією розтягувального зусилля і згинального моменту виникають напруження, які за допомогою line-spring model можна описати через невідомі зусилля T і момент M . Після введення T і M тріщину можна розглядати як наскрізну і розв'язувати задачу в двовимірній постановці.

Зусилля T і момент M еквівалентні зусиллям T^* і моменту M^* , які діють у залишковому перетині (рис. 2). Для визначення T і M використовують співвідношення, яке пов'язує коефіцієнти інтенсивності напружень та енергію, що виділяється при руйнуванні [4]:

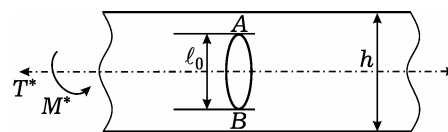


Рис. 2

$$G = \frac{\partial}{\partial \Gamma} (U - V) = \frac{1 - \nu^2}{2E} (K_{I,A}^2 + K_{I,B}^2). \quad (1)$$

Тут U – робота зовнішніх навантажень; V – енергія деформації; $K_{I,A}$ і $K_{I,B}$ – коефіцієнти інтенсивності напружень, визначені із задачі для смуги з внутрішньою поперечною тріщиною в умовах плоскої деформації.

Коефіцієнт інтенсивності напружень визначаємо у такий спосіб:

$$K_{I,m} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(T g_{mt}(s) + \frac{6M}{h} g_{mb}(s) \right), \quad (2)$$

де $m = A, B$; $s = \frac{\Gamma}{h} = \frac{\ell_0}{2h} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\ell}\right)^2}$. Вигляд функцій $g_{mt}(s)$, $g_{mb}(s)$ отримано емпірично в [7].

З іншого боку, енергію, яка пов'язана з приростом тріщини на $d\Gamma$, визначаємо як

$$G = \frac{1}{2} \left(T \frac{\partial \delta}{\partial \Gamma} + M \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} \right), \quad (3)$$

де δ і θ – лінійні переміщення тріщини.

Введемо вектори $\bar{\tau} = \left\{ \begin{matrix} T \\ \frac{6M}{h} \end{matrix} \right\}$ і $\bar{\omega} = \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \frac{h\theta}{6} \end{matrix} \right\}$. Прирівнюючи (1) і (3) та враховуючи (2), після перетворень отримаємо

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \Gamma} = \frac{1 - \nu^2}{Eh} \mathcal{A} \bar{\tau}, \quad (4)$$

де

$$\mathcal{A} = \|a_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} g_{At}^2 + g_{Bt}^2 & g_{At}g_{Ab} + g_{Bt}g_{Bb} \\ g_{At}g_{Ab} + g_{Bt}g_{Bb} & g_{Ab}^2 + g_{Bb}^2 \end{matrix} \right\|. \quad (5)$$

Проінтегрувавши співвідношення (4) за Γ , маємо два незалежних рівняння

$$\bar{\omega} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\frac{1}{h} \int_0^\Gamma \mathcal{A} d\Gamma \right) \bar{\tau}.$$

Розв'язавши систему відносно невідомих T і M , отримаємо остаточний вираз для визначення невідомих зусилля T і моменту M :

$$\bar{\tau} = \frac{E}{1 - \nu^2} C \bar{\omega}, \quad C = \left(\frac{1}{h} \int_0^\Gamma \mathcal{A} d\Gamma \right)^{-1}.$$

Враховуючи, що $\delta(\Gamma(t)) = [\nu(x, 0)]$ і $\theta(\Gamma(t)) = [\theta_2(x, 0)]$, а також вигляд невідомих функцій

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\chi^2\ell} \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \frac{d[\nu]}{d\tau}, \quad \psi_3 = \frac{D(1-\nu)(1-\mu)}{4\chi^2\ell\sqrt{a}} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{d\tau}$$

вектор $\bar{\tau}$ запишемо у такому вигляді:

$$\bar{\tau} = \frac{\chi^2}{1 - \nu^2} \frac{\ell}{h} \left\{ \begin{matrix} \frac{a}{\sqrt{1-\mu}} c_{11} \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau) d\tau \\ \frac{\sqrt{a}\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3(1-\nu)(3+\nu-\mu)}} c_{33} \int_{-1}^1 \psi_3(\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau) d\tau \end{matrix} \right\}.$$

Враховуючи, що на лінії тріщини діють невідомі зусилля T і M , систему сингулярних інтегральних рівнянь запишемо як

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{i=1,3} \mathcal{K}_{1i}(\tau-t) \psi_i(\tau) d\tau - \frac{c_{11}\pi}{1-\nu^2} \frac{\chi^2\ell/h}{\sqrt{1-\mu}} a \int_{-1}^1 \psi_1(\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau) d\tau &= \pi T^*(t), \\ \int_{-1}^1 \sum_{i=1,3} \mathcal{K}_{3i}(\tau-t) \psi_i(\tau) d\tau - \frac{c_{33}\pi}{3} \frac{\chi^2\ell/h\sqrt{a}}{(1-\nu)(3+\nu-\mu)} \int_{-1}^1 \psi_3(\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau) d\tau &= \\ &= \pi c^2 R_2 M^*(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Ядра \mathcal{K}_{ij} системи (6) наведено у роботі [7]. Тут позначено E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\lambda = R_2/R_1$; R_2, R_1 – радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки,

$$c^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_2 h}, \quad d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu}}{a} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda \chi^2 \sin^2 \theta)}{\ell_1 \ell_2}, \quad a = \frac{2-\mu+\mu\nu}{2},$$

$$\ell_1^2 = 1 + \tilde{\mu}(1-\nu) \cos^2 2\theta, \quad \ell_2^2 = 1 - \tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\theta, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{2a}.$$

Отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь розв'язуємо чисельно методом механічних квадратур, за допомогою якого систему (6) зводимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо симетричну внутрішню тріщину в оболонці. Функції $g_{At}(s) = g_{Ab}(s)$, $g_{Bt}(s) = -g_{Bb}(s)$ побудуємо як інтерполяційні поліноми Лагранжа на основі даних, наведених у [7]:

$$g_{At}(s) = \sqrt{\frac{\pi s}{2}} (3.5417s^3 - 3.2199s^2 + 1.2548s + 0.5677),$$

$$g_{Bt}(s) = \sqrt{\frac{\pi s}{2}} (1.0896s^3 - 1.1587s^2 + 0.8981s + 0.0419).$$

Матриця (5) для цього випадку має вигляд

$$\mathcal{A} = \{a_{ij}\} = \begin{vmatrix} 2g_{At}^2 & 0 \\ 0 & 2g_{Ab}^2 \end{vmatrix}.$$

Результати, отримані для ізотропної оболонки з внутрішньою тріщиною, співпадають з результатами, отриманими в дисертації В. В. Яртемик [5].

Обчислення для ортотропної оболонки виконано для матеріалу борн-епоксидного композиту [8]:

$$E_1 = 17.065 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad E_2 = 55.16 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{1,2} = 4.83 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.1114.$$

На рис. 3 зображено залежність КІН у центральній точці внутрішньої тріщини в пластині від її довжини. Вважали, що $\ell_0/h = 0.5$, $K_0 = \frac{T^*}{h} \sqrt{\pi \ell_0/h}$ і $T^* = \text{const}$, $M^* = 0$.

На рис. 4 зображено розподіл КІН уздовж лінії поздовжньої тріщини в псевдосферичній оболонці. Приймали, що $\ell_0/h = 0.5$ і $K_\infty = \frac{T^*}{\sqrt{h}} g_{At}(\ell_0/h)$.

Кривим 1-3 відповідають $\Gamma(t) = \ell_0/2$, $\Gamma(t) = \ell_0/2\sqrt{1-t^2}$, $\Gamma(t) = \ell_0/2\sqrt{1-t^4}$.

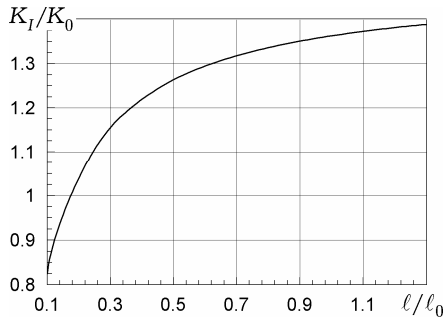


Рис. 3

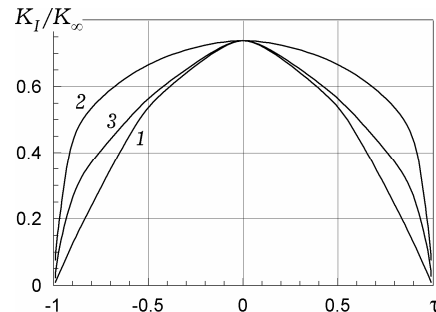


Рис. 4

На рис. 5 і рис. 6 зображено залежність КІН від відношення довжини тріщини в сферичній оболонці до товщини оболонки відповідно для $K_0 = \frac{T^*}{h} \sqrt{\pi \ell_0/h}$ при розтягувальному зусиллі ($T^* = \text{const}$, $M^* = 0$) і для $K_0 = \frac{6M^*}{h^2} \sqrt{\pi \ell_0/h}$ при згинальному моменті ($T^* = 0$, $M^* = \text{const}$). Криві побудовано для значень глибини $\ell_0/h = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

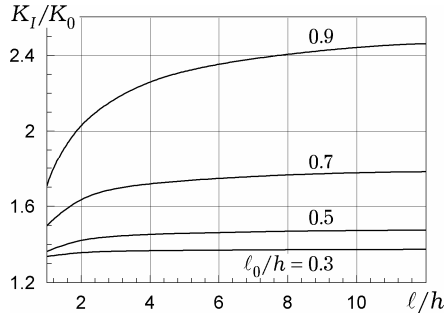


Рис. 5

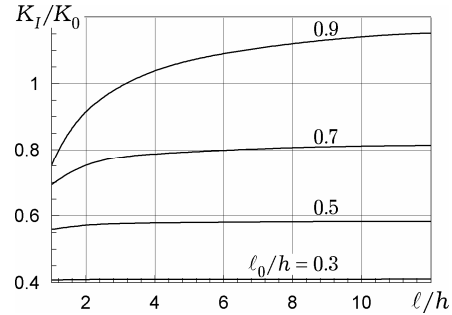


Рис. 6

На рис. 7 наведено залежність КІН для центральної точки внутрішньої тріщини в псевдосферичній оболонці від її довжини. Криві відповідають значенням $\ell_0/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$.

На рис. 8 зображено залежність КІН для центральної точки внутрішньої тріщини від λ при розтягувальному зусиллі при $K_\infty = \frac{T^*}{\sqrt{h}} g_{At}(\ell_0/h)$. Криві 1, 2 відповідають значенням $\ell_0/h = 0.5$, $\ell/h = 8$, а криві 3–4 – значенням $\ell_0/h = 0.7$, $\ell/h = 8$. Криві 1, 3 побудовано для поздовжньої тріщини, а 2, 4 – для поперечної.

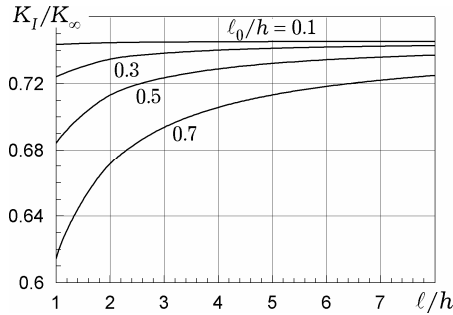


Рис. 7

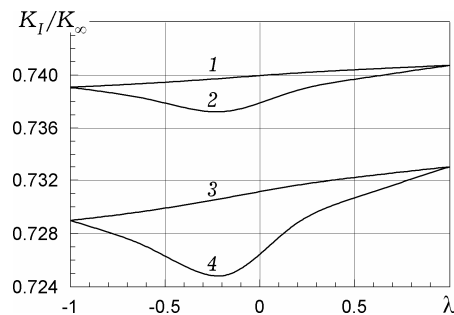


Рис. 8

Коефіцієнти інтенсивності зусиль для поздовжньої тріщини завжди більші, ніж для поперечної.

Найбільше значення КІН для поздовжньої і поперечної тріщини досягається в сферичній оболонці, а найменше – в псевдосферичній.

1. Довбня К. М., Чернишенко М. О. Дослідження напруженого стану в ізотропних оболонках довільної кривини з поверхневими тріщинами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – **48**, № 2. – С. 121–125.
2. Довбня К. М., Яртемих В. В. Застосування line-spring model для дослідження оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 4. – С. 160–164.
3. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортоотропные оболочки с трещинами (разрезами) // *Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений.* – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 212–249.

4. Эрдоган Ф. Модель в виде линейных пружин // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Алтури. – С. 243–265. – Москва: Мир, 1990. – 391 с.
5. Яртемик В. В. Напружений стан ізотропних оболонок з системою тріщин (наскрізних, поверхневих і внутрішніх): Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Донецьк, 2008. – 236 с.
6. Delale F., Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or an axial part-through crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1982. – **49**, No. 1. – P. 97–102.
7. Kaya A. C., Erdogan F. E. Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip // Int. J. Fract. Mech. – 1980. – **16**, No. 2. – P. 171–190.
8. Rice J. R., Levy N. The part-through crack in an elastic plate crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1972. – **32**. – P. 185–194.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Построено решение задачи о напряженном состоянии ортотропной оболочки произвольной кривизны с внутренней трещиной. Получена система сингулярных интегральных уравнений, которая решена методом механических квадратур. Исследовано влияние кривизны оболочки, глубины и длины трещины на коэффициенты интенсивности напряжений и коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

STUDY OF THE STRESS STATE OF ORTHOTROPIC SHELL OF ARBITRARY CURVATURE WITH INTERNAL CRACK

A solution of the problem on stressed state of orthotropic shell of arbitrary curvature with an internal crack is constructed. The system of singular integral equations is obtained and solved by the method of mechanical quadratures. The effect of curvature of the shell, depth and crack length on the stress intensity factors and the intensity factors of forces and moments are investigated.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
11.09.10