

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ СТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ШАРУВАТОГО ВЗДОВЖ ОСІ ГЛАДКО ЗАКРІПЛЕНОГО СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА

За допомогою побудованих функцій Гріна задач теплопровідності і термопружності отримано розв'язок осесиметричної статичної задачі термопружності для шаруватого уздовж осі скінченного циліндра з гладко закріпленою теплоізолюваною циліндричною поверхнею за дії джерел тепла та наявності конвективного теплообміну з торцевих поверхонь для широкого діапазону зміни товщин шарів. При цьому використано узагальнені функції, скінченне інтегральне перетворення Ганкеля і функції Гріна відповідних задач для одного та систем звичайних диференціальних рівнянь. Наведено результати числових досліджень для тришарового циліндра.

Задачам термопружності для однорідних і шаруватих уздовж осі тіл скінченних розмірів присвячені роботи багатьох авторів [2, 3, 5, 8, 9–15]. Для їх розв'язання використовували аналітичні, числові та аналітично-числові методи. Розв'язки отримано, як правило, для часткових випадків теплового навантаження або за припущення, що температурне поле є відомим. Крім того, поза належною увагою залишилися задачі термопружності для шаруватих тіл, товщини шарів яких істотно відрізняються. Зазначимо, що розв'язання таких задач традиційними аналітичними методами зводиться до розв'язання систем алгебричних рівнянь відносно сталих інтегрування відповідних загальних розв'язків однорідних звичайних диференціальних рівнянь, які отримуються після застосування інтегральних перетворень. Поведінка фундаментальних розв'язків цих диференціальних рівнянь за великих значень параметра інтегрального перетворення призводить при числовій реалізації до поганої обумовленості згаданих вище систем алгебричних рівнянь.

У цій роботі отримано розв'язок осесиметричної стаціонарної задачі теплопровідності та відповідної статичної задачі термопружності для шаруватого уздовж осі скінченного циліндра з гладко закріпленою теплоізолюваною циліндричною поверхнею, який нагрівається об'ємними і поверхневими джерелами тепла і взаємодіє через торцеві поверхні з навколишнім середовищем шляхом конвективного теплообміну для широкого діапазону зміни товщин шарів.

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат \tilde{r} , φ , \tilde{z} шаруватий уздовж осі суцільний скінченний циліндр, теплоізолювана циліндрична поверхня $\tilde{r} = \tilde{R}$ якого гладко закріплена (радіальні переміщення і дотичні напруження дорівнюють нулеві). Циліндр нагрівається об'ємними джерелами тепла густини $w_t(\tilde{r}, \tilde{z})$ та джерелами тепла, зосередженими на вільних від навантажень торцевих поверхнях $\tilde{z} = 0$, $\tilde{z} = \tilde{x}_n$ з густинами $g_0(\tilde{r})$ і $g_n(\tilde{r})$ відповідно. Визначимо з урахуванням конвективного теплообміну через торцеві поверхні з навколишнім середовищем стаціонарне температурне поле, переміщення і напруження у вигляді функціональної залежності від розподілів густин джерел тепла.

Розв'язування задачі теплопровідності. Для визначення стаціонарного температурного поля використовуємо рівняння теплопровідності

$$\lambda_t(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = -\lambda_t^{(1)} W_t(r, z) \quad (1)$$

і граничні умови

$$\left. \left(\frac{\partial t}{\partial z} - \text{Bi}_0 t \right) \right|_{z=0} = \bar{g}_0(r), \quad \left. \left(\frac{\partial t}{\partial z} + \text{Bi}_n t \right) \right|_{z=z_n} = \bar{g}_n(r),$$

$$\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial r} = 0, \quad r = R. \quad (2)$$

Тут $\lambda_t(z)$ і $W_t(r, z)$ – кусково-сталі функції, які мають вигляд

$$p(z) = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) S(z - x_k), \quad (3)$$

а в межах k -го шару збігаються з його коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_t^{(k)}$ і зведеною густиною $W_{tk}(r, z) = \ell^2 w_{tk}(r\ell, z\ell) / \lambda_t^{(1)}$ внутрішнього джерела тепла; $r = \tilde{r}/\ell$, $z = \tilde{z}/\ell$, $x_k = \tilde{x}_k/\ell$, $x_n = \tilde{x}_n/\ell$, $R = \tilde{R}/\ell$; \tilde{x}_k – поверхня поділу k -го та $(k+1)$ -го шару; ℓ – характерний розмір; $\text{Bi}_0 = \frac{\alpha_0 \ell}{\lambda_t^{(1)}}$, $\text{Bi}_n = \frac{\alpha_n \ell}{\lambda_t^{(n)}}$; α_0, α_n – коефіцієнти тепловіддачі; $\bar{g}_0(r) = -\text{Bi}_0 t_c^-(r\ell) - \frac{g_0(r\ell)\ell}{\lambda_t^{(1)}}$, $\bar{g}_n(r) =$

$= \text{Bi}_n t_c^+(r\ell) + \frac{g_n(r\ell)\ell}{\lambda_t^{(n)}}$; $t_c^\pm(\tilde{r})$ – температури навколишнього середовища;

$S(x)$ – функція Гевісайда; n – кількість шарів.

Розв'язок задачі (1), (2) запишемо так:

$$t(r, z) = \int_0^R \int_0^{x_n} \rho G_*(r, z, \rho, \zeta) W_t(\rho, \zeta) d\zeta d\rho +$$

$$+ \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \int_0^R \rho G_*(r, z, \rho, x_n) g_n(\rho) d\rho - \int_0^R \rho G_*(r, z, \rho, 0) g_0(\rho) d\rho. \quad (4)$$

Тут $G_*(r, z, \rho, \zeta)$ – функція Гріна задачі теплопровідності, тобто функція, що задовольняє рівняння

$$\lambda_t(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G_*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t(z) \frac{\partial G_*}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \lambda_t^{(1)} \delta(r - \rho) \delta(z - \zeta) \quad (5)$$

і граничні умови

$$\frac{\partial G_*}{\partial z} - \text{Bi}_0 G_* = 0, \quad z = 0, \quad \frac{\partial G_*}{\partial z} + \text{Bi}_n G_* = 0, \quad z = x_n,$$

$$\frac{\partial G_*}{\partial r} = 0, \quad r = R. \quad (6)$$

Розв'язок задачі (5), (6) з використанням скінченного перетворення Ганкеля [1] та функції Гріна відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння [6] отримано у вигляді суми

$$G_*(r, z, \rho, \zeta) = G^{(0)}(z, \zeta) + G(r, z, \rho, \zeta), \quad (7)$$

де

$$G^{(0)}(z, \zeta) = \frac{1}{Q_0} [\Psi(z)\Phi(\zeta)S(z - \zeta) + \Psi(\zeta)\Phi(z)S(\zeta - z)], \quad (8)$$

$$\Phi(z) = 1 + \text{Bi}_0 f(z), \quad \Psi(z) = x_n - \text{Bi}_n f(z), \quad Q_0 = \Phi'(x_n) + \text{Bi}_n \Phi(x_n),$$

$$x_n = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(n)}} + \text{Bi}_n f(x_n), \quad f(z) = z + \sum_{k=1}^{n-1} H_k (z - x_k) S(z - x_k),$$

$$H_k = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(k+1)}} - \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(k)}}, \quad G(r, z, \rho, \zeta) = \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \bar{G}(\xi_q, z, \zeta), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\bar{G}(\xi, z, \zeta) &= \bar{G}_1(\xi, z, \zeta) + \sum_{j=1}^{n-1} [\bar{G}_{j+1}(\xi, z, \zeta) - \bar{G}_j(\xi, z, \zeta)]S(z - x_j), \\ \bar{G}_j(\xi, z, \zeta) &= \bar{G}_{j1}(\xi, z, \zeta) + \sum_{k=1}^{n-1} [\bar{G}_{jk+1}(\xi, z, \zeta) - \bar{G}_{jk}(\xi, z, \zeta)]S(\zeta - x_k), \\ & j = 1, \dots, n, \quad (10)\end{aligned}$$

$$\bar{G}_{11}(\xi, z, \zeta) = \frac{1}{2\xi} \Omega(\xi, z, \zeta) + \bar{G}_{11}^{\pm}(\xi, z, \zeta),$$

$$\begin{aligned}\bar{G}_{11}^{\pm}(\xi, z, \zeta) &= \frac{1}{2\xi} M_1^- e^{-\xi(z+\zeta)} - \frac{L_1^-}{2\xi Q_n} [M_1^- (e^{-\xi(2h_1+z-\zeta)} + \\ &+ e^{-\xi(2h_1-z+\zeta)} + M_1^- e^{-\xi(2h_1+z+\zeta)}) + e^{-\xi(2h_1-z-\zeta)}],\end{aligned}$$

$$\bar{G}_{jj}(\xi, z, \zeta) = \frac{\lambda_t^{(1)}}{2\lambda_t^{(j)} \xi} \Omega(\xi, z, \zeta) + \bar{G}_{jj}^{\pm}(\xi, z, \zeta),$$

$$\begin{aligned}\bar{G}_{jj}^{\pm}(\xi, z, \zeta) &= -\frac{\lambda_t^{(1)}}{2\lambda_t^{(j)} Q_n \xi} [M_j^- L_j^- (e^{-\xi(2h_j+z-\zeta)} + e^{-\xi(2h_j-z+\zeta)}) + \\ &+ M_j^+ L_j^- e^{-\xi(2x_j-z-\zeta)} - M_j^- L_j^+ e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})}], \quad j = 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$\bar{G}_{jp}(\xi, z, \zeta) = \frac{2^{p-j-1} \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)} Q_n \xi} [Y_{jp}^+(\xi, z, \zeta) L_p^+ - Y_{jp}^-(\xi, z, \zeta) L_p^-],$$

$$\begin{aligned}\bar{G}_{pj}(\xi, z, \zeta) &= \bar{G}_{jp}(\xi, \zeta, z), \quad x_{i-1} < z < x_i, \quad x_{p-1} < \zeta < x_p, \\ & p = j + k, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, n-j,\end{aligned}$$

$$\Omega(\xi, z, \zeta) = e^{-\xi(z-\zeta)} S(z - \zeta) + e^{-\xi(\zeta-z)} S(\zeta - z),$$

$$Y_{jp}^{\pm}(\xi, z, \zeta) = M_j^+ e^{\xi[\pm(x_p - \zeta) + z - x_p]} + M_j^- e^{\xi[\pm(x_p - \zeta) - z - x_p + 2x_{j-1}]},$$

$$M_1^- = \frac{\xi - \text{Bi}_0}{\xi + \text{Bi}_0}, \quad M_1^+ = 1, \quad x_0 = 0,$$

$$M_j^{\pm} = M_{j-1}^+ (1 \pm N_j) + M_{j-1}^- (1 \mp N_j) e^{-2\xi h_{j-1}}, \quad h_j = x_j - x_{j-1},$$

$$N_j = \frac{\lambda_t^{(j-1)}}{\lambda_t^{(j)}}, \quad j = 2, \dots, n,$$

$$Q_n = M_n^+ (\text{Bi}_n + \xi) + M_n^- (\text{Bi}_n - \xi) e^{-2\xi h_n},$$

$$L_p^{\pm} = \xi(\mathfrak{x}_n^{(2)} \pm \mathfrak{x}_n^{(4)}) + \text{Bi}_n(\mathfrak{x}_n^{(1)} \pm \mathfrak{x}_n^{(3)}),$$

$$\mathfrak{x}_{p+1}^{(i)} = 1 - (-1)^i e^{-2\xi h_{p+1}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\mathfrak{x}_{p+m}^{(i)} = \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(1)} + N_{p+m} \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(2)} - (-1)^i [\mathfrak{x}_{p+m-1}^{(1)} - N_{p+m} \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(2)}] e^{-2\xi h_{p+m}},$$

$$\mathfrak{x}_{p+1}^{(i)} = [1 + (-1)^i e^{-2\xi h_{p+1}}] N_{p+1}, \quad i = 3, 4,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_{p+m}^{(i)} &= \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(3)} + N_{p+m} \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(4)} - (-1)^i [\mathfrak{x}_{p+m-1}^{(3)} - N_{p+m} \mathfrak{x}_{p+m-1}^{(4)}] e^{-2\xi h_{p+m}}, \\ & m = 2, \dots, n-p, \quad p = 1, \dots, n-1,\end{aligned}$$

$$L_n^{\pm} = \text{Bi}_n \pm \xi,$$

ξ_q – додатні корені рівняння $J_1(\xi R) = 0$; $J_s(x)$ – функції Бесселя s -го порядку.

Увівши позначення

$$T^{(0)}(z) = \int_0^R \int_0^{x_n} \rho G^{(0)}(z, \zeta) W_t(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + G^{(0)}(z, x_n) \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \int_0^R \rho g_n(\rho) d\rho - \\ - G^{(0)}(z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) d\rho, \quad (11)$$

$$T_1(r, z) = \int_0^R \int_0^{x_n} \rho G(r, z, \rho, \zeta) W_t(\rho, \zeta) d\zeta d\rho, \\ T_2(r, z) = \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \int_0^R \rho G(r, z, \rho, x_n) g_n(\rho) d\rho, \\ T_3(r, z) = - \int_0^R \rho G(r, z, \rho, 0) g_0(\rho) d\rho, \quad (12)$$

$$T(r, z) = T_1(r, z) + T_2(r, z) + T_3(r, z), \quad (13)$$

вираз для температурного поля (4) подамо як суму розподілів температур

$$t(r, z) = T^{(0)}(z) + T(r, z). \quad (14)$$

Розв'язування задачі термопружності. Розв'язок задачі термопружності шукатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків, кожен з яких описує термопружний стан, зумовлений температурними полями (11) і (13). Переміщення і ненульові напруження, що виникають при дії змінного лише по товщині температурного поля (11), описуються співвідношеннями [4]

$$u^{(0)} = 0, \quad w^{(0)} = \int_0^z \gamma(x) T^{(0)}(x) dx + C, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \sigma_0 = - \frac{\alpha_t(z) E(z)}{1 - \nu(z)} T^{(0)}(z), \quad (15)$$

де стала C характеризує переміщення як абсолютно твердого тіла.

Для відшукування переміщень і напружень, зумовлених температурним полем (13), використовуємо систему рівнянь

$$\mu(z) [\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1) r^{-2}] u_i + [\lambda(z) + \mu(z)] \varepsilon_{,i} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k (u_{i,z} + u_{z,i}) + \delta_{zi} \tilde{\lambda}_k \varepsilon] \Big|_{z=x_k-0} \delta(z - x_k) = [\beta(z) T]_{,i}, \\ i = r, z, \quad (16)$$

співвідношення Дюгамеля – Неймана

$$\sigma_{ij} = \mu(z) (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(z) \varepsilon \delta_{ij} - \beta(z) T \delta_{ij}, \quad i, j = r, z, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu(z) \frac{u_r}{r} + \lambda(z) \varepsilon - \beta(z) T \quad (17)$$

і такі граничні умови:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad z = 0, \quad z = x_n, \\ u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = R. \quad (18)$$

У виразах (15)–(17) позначено

$$\gamma(z) = \alpha_t(z) [1 + \nu(z)] [1 - \nu(z)]^{-1}, \quad \beta(z) = \alpha_t(z) [3\lambda(z) + 2\mu(z)],$$

$\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\alpha_t(z)$, $\nu(z)$ – кусково-сталі функції, які мають вигляд (3), а в межах k -го шару збігаються з коефіцієнтами Ляме λ_k , μ_k , температурним коефіцієнтом лінійного розширення $\alpha_t^{(k)}$ і коефіцієнтом Пуассона ν_k відповідно,

$$\nabla^2 = \partial_{,rr} + r^{-1}\partial_{,r} + \partial_{,zz}, \quad \varepsilon = u_{,r,r} + r^{-1}u_r + u_{,z,z},$$

$$\tilde{\mu}_k = \mu_{k+1} - \mu_k, \quad \tilde{\lambda}_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k.$$

Відповідно до (13) розв'язок задачі (16), (18) подамо у вигляді

$$u_i(r, z) = u_i^{(1)}(r, z) + u_i^{(2)}(r, z) + u_i^{(3)}(r, z), \quad (19)$$

де функції $u_i^{(s)}(r, z)$, $s = 1, 2, 3$, які задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \mu(z)[\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1)r^{-2}]u_i^{(s)} + [\lambda(z) + \mu(z)]\varepsilon_{,i}^{(s)} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(u_{i,z}^{(s)} + u_{z,i}^{(s)}) + \delta_{zi}\tilde{\lambda}_k\varepsilon_{,i}^{(s)}] \Big|_{z=x_k-0} \delta(z - x_k) = [\beta(z)T]_{,i}, \end{aligned} \quad (20)$$

$i = r, z,$

і граничні умови

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(s)} = \sigma_{rz}^{(s)} = 0, \quad z = 0, \quad z = x_n, \\ u_r^{(s)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(s)} = 0, \quad r = R, \end{aligned} \quad (21)$$

шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(r, z) &= \int_0^R \int_{z_0}^{x_n} \rho U_i(r, z, \rho, \zeta) W_t(\rho, \zeta) d\zeta d\rho, \\ u_i^{(2)}(r, z) &= \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \int_0^R \rho U_i(r, z, \rho, x_n) g_n(\rho) d\rho, \\ u_i^{(3)}(r, z) &= - \int_0^R \rho U_i(r, z, \rho, 0) g_0(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (22)$$

Для таких переміщень напруження визначатимуться за формулами

$$\sigma_{ij}(r, z) = \sigma_{ij}^{(1)}(r, z) + \sigma_{ij}^{(2)}(r, z) + \sigma_{ij}^{(3)}(r, z), \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(r, z) &= \int_0^R \int_{z_0}^{x_n} \rho \tau_{ij}(r, z, \rho, \zeta) W_t(\rho, \zeta) d\zeta d\rho, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(r, z) &= \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \int_0^R \rho \tau_{ij}(r, z, \rho, x_n) g_n(\rho) d\rho, \\ \sigma_{ij}^{(3)}(r, z) &= - \int_0^R \rho \tau_{ij}(r, z, \rho, 0) g_0(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\tau_{ij}(r, z, \rho, \zeta) = \mu(z)(U_{i,j} + U_{j,i}) + \delta_{ij}\lambda(z)e - \delta_{ij}\beta(z)G, \quad i, j = r, z,$$

$$\tau_{\varphi\varphi}(r, z, \rho, \zeta) = 2\mu(z)\frac{U_r}{r} + \lambda(z)e - \beta(z)G,$$

$$e = U_{r,r} + \frac{1}{r}U_r + U_{z,z}, \quad (25)$$

а $U_r(r, z, \rho, \zeta)$, $U_z(r, z, \rho, \zeta)$ – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \mu(z)[\nabla^2 + (\delta_{zi} - 1)r^{-2}]U_i + [\lambda(z) + \mu(z)]e_{,i} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(U_{i,z} + U_{z,i}) + \delta_{zi}\tilde{\lambda}_k e] \Big|_{z=x_k-0} \delta(z - x_k) = [\beta(z)G]_{,i}, \end{aligned} \quad (26)$$

$i = r, z,$

$$\begin{aligned} \tau_{zz} = \tau_{rz} = 0, \quad z = 0, \quad z = x_n, \\ U_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad r = R. \end{aligned} \quad (27)$$

Його знаходження за допомогою формул

$$U_r = U + \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad U_z = W + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (28)$$

зведемо до відшукування часткового розв'язку рівняння

$$\nabla^2 \Psi = \gamma(z)G(r, z, \rho, \zeta) \quad (29)$$

та до розв'язання задачі

$$\begin{aligned} \mu(z)(\nabla^2 U - r^{-2}U) + [\lambda(z) + \mu(z)]e_{,r}^* + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k (U_{,z} + W_{,r}) \Big|_{z=x_k-0} \delta(z-x_k) = \\ = -2 \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k \Psi_{,rz} \Big|_{z=x_k-0} \delta(z-x_k), \\ \mu(z)\nabla^2 W + [\lambda(z) + \mu(z)]e_{,z}^* + \sum_{k=1}^{n-1} (2\tilde{\mu}_k W_{,z} + \tilde{\lambda}_k e^*) \Big|_{z=x_k-0} \delta(z-x_k) = \\ = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k (\Psi_{,rr} + r^{-1}\Psi_{,r}) \Big|_{z=x_k-0} \delta(z-x_k), \\ \tau_{zz}^* = -2\mu(z)(\Psi_{,zz} - \nabla \Psi), \quad \tau_{rz}^* = -2\mu(z)\Psi_{,rz}, \quad z=0, \quad z=x_n, \\ U = \Psi_{,r}, \quad \tau_{rz}^* = -2\mu(z)\Psi_{,rz}, \quad r=R. \end{aligned} \quad (30)$$

Тут

$$e^* = U_{,r} + r^{-1}U + W_{,z}, \quad \tau_{zz}^* = 2\mu(z)W_{,z} + \lambda(z)e^*, \quad \tau_{rz}^* = \mu(z)(U_{,z} + W_{,r}).$$

За частковий розв'язок рівняння (29), беручи до уваги (9), вибираємо

$$\Psi(r, z, \rho, \zeta) = \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \bar{\Psi}(\xi_q, z, \zeta), \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\xi, z, \zeta) = \bar{\Psi}_1(\xi, z, \zeta) + \sum_{j=1}^{n-1} [\bar{\Psi}_{j+1}(\xi, z, \zeta) - \bar{\Psi}_j(\xi, z, \zeta)] S(z-x_j), \\ \bar{\Psi}_j(\xi, z, \zeta) = \bar{\Psi}_{j1}(\xi, z, \zeta) + \sum_{k=1}^{n-1} [\bar{\Psi}_{jk+1}(\xi, z, \zeta) - \\ - \bar{\Psi}_{jk}(\xi, z, \zeta)] S(\zeta-x_k), \quad j=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 2\xi \bar{\Psi}_{m\ell}(\xi, z, \zeta) = - \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i I_{i\ell}^-(\xi, z, \zeta) - \gamma_m I_{m\ell}(\xi, z, \zeta) - \sum_{i=m+1}^n \gamma_i I_{i\ell}^+(\xi, z, \zeta), \\ x_{m-1} < z < x_m, \quad x_{\ell-1} < \zeta < x_\ell, \quad m=1, \dots, n, \quad \ell=1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{pj}^-(\xi, z, \zeta) = \frac{2^{p-j-2} \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)} \xi^2 Q_n} [2\xi h_p L_p^+ - L_p^- (1 - e^{-2\xi h_p})] \times \\ \times [M_j^+ e^{-\xi(z-\zeta)} + M_j^- e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{pj}^+(\xi, z, \zeta) = \frac{2^{p-j-2} \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)} \xi^2 Q_n} [L_p^+ (1 - e^{-2\xi h_p}) - 2\xi h_p L_p^- e^{-2\xi h_p}] \times \\ \times [M_j^+ e^{-\xi(2x_{p-1}-z-\zeta)} + M_j^- e^{-\xi(2x_{p-1}-2x_{j-1}-z+\zeta)}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{jp}^-(\xi, z, \zeta) = \frac{2^{p-j-2} \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)} \xi^2 Q_n} [L_p^+ e^{-\xi(z+\zeta-2x_j)} - L_p^- e^{-\xi(z-\zeta-2x_j+2x_p)}] \times \\ \times [M_j^+ (1 - e^{-2\xi h_j}) + 2\xi h_j M_j^- e^{-2\xi h_j}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{jp}^+(\xi, z, \zeta) &= \frac{2^{p-j-2}\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)}\xi^2\mathcal{Q}_n} [L_p^+ e^{-\xi(\zeta-z)} - L_p^- e^{-\xi(2x_p-z-\zeta)}] [M_j^-(1 - e^{-2\xi h_j}) + \\
&\quad + 2\xi h_j M_j^+], \\
I_{pj}(\xi, z, \zeta) &= \frac{2^{p-j-2}\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)}\mathcal{Q}_n \xi^2} [L_p^+ I_{pj}^{(1)}(\xi, z, \zeta) - L_p^- I_{pj}^{(2)}(\xi, z, \zeta)], \\
I_{jp}(\xi, z, \zeta) &= \frac{2^{p-j-2}\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(p)}\mathcal{Q}_n \xi^2} [L_p^+ I_{jp}^{(3)}(\xi, z, \zeta) - L_p^- I_{jp}^{(4)}(\xi, z, \zeta)], \\
I_{11}^-(\xi, z, \zeta) &= \frac{1}{4\xi^2} [[1 + 2\xi(x_1 - \zeta)]e^{-\xi(z-\zeta)} - (1 - 2\xi x_1 M_1^-)e^{-\xi(z+\zeta)}] - \\
&\quad - \frac{L_1^-}{4\xi^2\mathcal{Q}_n} [e^{-\xi(z-\zeta)} + M_1^- e^{-\xi(z+\zeta)}] [1 + (2\xi x_1 M_1^- - 1)e^{-2\xi h_1}], \\
I_{jj}^-(\xi, z, \zeta) &= \frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2} [1 + 2\xi(x_j - \zeta) - e^{-2\xi(\zeta-x_{j-1})}] e^{-\xi(z-\zeta)} - \\
&\quad - \frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2\mathcal{Q}_n} \{L_j^- [M_j^+ + (2\xi h_j M_j^- - M_j^+) e^{-2\xi h_j}] e^{-\xi(z-\zeta)} + \\
&\quad + M_j^- [L_j^- (1 - e^{-2\xi h_j}) - 2\xi h_j L_j^+] e^{-\xi(\zeta+z-2x_{j-1})}\}, \\
I_{jj}^+(\xi, z, \zeta) &= -\frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2} [e^{-2\xi(x_j-\zeta)} - 1 + 2\xi(x_{j-1} - \zeta)] e^{-\xi(\zeta-z)} - \\
&\quad - \frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2\mathcal{Q}_n} \{L_j^- [2\xi h_j M_j^+ + M_j^- (1 - e^{-2\xi h_j})] e^{-\xi(2x_j-\zeta-z)} + \\
&\quad + M_j^- [(L_j^+ + 2\xi h_j L_j^-) e^{-2\xi h_j} - L_j^+] e^{-\xi(\zeta-z)}\}, \\
I_{11}(\xi, z, \zeta) &= \frac{1}{4\xi^2} [2\xi\Omega^*(\xi, z, \zeta) + 2\Omega(\xi, z, \zeta)] + \bar{I}_{11}(\xi, z, \zeta), \\
\bar{I}_{11}(\xi, z, \zeta) &= \frac{1}{4\xi^2} [M_1^- (2\xi z + 1) - 1] e^{-\xi(z+\zeta)} - \frac{1}{4\xi^2} \left\{ 1 + \frac{L_1^-}{\mathcal{Q}_n} [1 + 2\xi(x_1 - z) - \right. \\
&\quad \left. - M_1^- e^{-2\xi h_1}] \right\} [M_1^- e^{-\xi(2h_1-z+\zeta)} + e^{-\xi(2h_1-z-\zeta)}] - \\
&\quad - \frac{L_1^-}{\mathcal{Q}_n 4\xi^2} \{[(1 + 2\xi z)M_1^- - 1] e^{-\xi(2h_1+z-\zeta)} + \\
&\quad + M_1^- [(1 + 2\xi z)M_1^- - 1] e^{-\xi(2h_1+z+\zeta)}\}, \\
I_{jj}(\xi, z, \zeta) &= \frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2} [2\xi\Omega^*(\xi, z, \zeta) + 2\Omega(\xi, z, \zeta)] + \bar{I}_{jj}(\xi, z, \zeta), \\
\bar{I}_{jj}(\xi, z, \zeta) &= -\frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2} [e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})} + e^{-\xi(2x_j-z-\zeta)}] - \\
&\quad - \frac{\lambda_t^{(1)}}{4\lambda_t^{(j)}\xi^2\mathcal{Q}_n} \{L_j^- [M_j^- [1 + 2\xi(z - x_{j-1})] - M_j^+] e^{-\xi(2h_j+z-\zeta)} + \\
&\quad + M_j^- [L_j^- [1 + 2\xi(x_j - z)] + L_j^+] e^{-\xi(2h_j-z+\zeta)} - \\
&\quad - M_j^- [L_j^+ [1 + 2\xi(z - x_{j-1})] + L_j^-] e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})} + \\
&\quad + L_j^- [M_j^+ [1 + 2\xi(x_j - z)] - M_j^-] e^{-\xi(2x_j-z-\zeta)}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{pj}^{(1)}(\xi, z, \zeta) &= [M_j^+ e^{-\xi(z-\zeta)} + M_j^- e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})}] [2\xi(z-x_{p-1}) + 1 - e^{-2\xi(x_p-z)}], \\
I_{pj}^{(2)}(\xi, z, \zeta) &= [M_j^+ e^{-\xi(2x_p-z-\zeta)} + M_j^- e^{-\xi(2x_p-2x_{j-1}-z+\zeta)}] \times \\
&\quad \times [2\xi(x_p-z) + 1 - e^{-2\xi(z-x_{p-1})}], \\
I_{jp}^{(3)}(\xi, z, \zeta) &= M_j^+ [2\xi(x_j-z) + 1 - e^{-2\xi(z-x_{j-1})}] e^{-\xi(\zeta-z)} + \\
&\quad + M_j^- [2\xi(z-x_{j-1}) + 1 - e^{-2\xi(x_j-z)}] e^{-\xi(z+\zeta-2x_{j-1})}, \\
I_{jp}^{(4)}(\xi, z, \zeta) &= M_j^+ [2\xi(x_j-z) + 1 - e^{-2\xi(z-x_{j-1})}] e^{-\xi(2x_p-z-\zeta)} + \\
&\quad + M_j^- [2\xi(z-x_{j-1}) + 1 - e^{-2\xi(x_j-z)}] e^{-\xi(2x_p-2x_{j-1}+z-\zeta)}, \\
\Omega^*(\xi, z, \zeta) &= (z-\zeta)e^{-\xi(z-\zeta)} S(z-\zeta) + (\zeta-z)e^{-\xi(\zeta-z)} S(\zeta-z).
\end{aligned}$$

Відповідно до (32) розв'язок задачі (30), (31) шукатимемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
U(r, z, \rho, \zeta) &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \bar{U}(\xi_q, z, \zeta), \\
W(r, z, \rho, \zeta) &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \bar{W}(\xi_q, z, \zeta),
\end{aligned} \tag{34}$$

де $\bar{U}(\xi, z, \zeta)$ і $\bar{W}(\xi, z, \zeta)$ необхідно знайти із системи рівнянь

$$\begin{aligned}
\mu(z)[\bar{U}'' - 2g_1(z)\xi^2\bar{U} - g_2(z)\xi\bar{W}'] + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\mu}_i (\bar{U}' - \xi\bar{W})|_{z=x_i-0} \delta(z-x_i) &= \\
= 2\xi \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\mu}_i \bar{\Psi}'|_{z=x_i-0} \delta(z-x_i), \\
\mu(z)[2g_1(z)\bar{W}'' - \xi^2\bar{W} + g_2(z)\xi\bar{U}'] + \sum_{i=1}^{n-1} (2\tilde{\mu}_i \bar{W}' + \tilde{\lambda}_i \bar{e}^*)|_{z=x_i-0} \delta(z-x_i) &= \\
= -2\xi^2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\mu}_i \bar{\Psi}|_{z=x_i-0} \delta(z-x_i)
\end{aligned} \tag{35}$$

за таких граничних умов:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{zz}^*|_{z=0} &= -2\mu_1 \xi^2 \bar{\Psi}|_{z=0}, & \bar{\tau}_{rz}^*|_{z=0} &= 2\mu_1 \xi \bar{\Psi}'|_{z=0}, \\
\bar{\tau}_{zz}^*|_{z=x_n} &= -2\mu_n \xi^2 \bar{\Psi}|_{z=x_n}, & \bar{\tau}_{rz}^*|_{z=x_n} &= 2\mu_n \xi \bar{\Psi}'|_{z=x_n}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Тут

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= g_2(z)g_3(z), & g_2(z) &= [1-2\nu(z)]^{-1}, & g_3(z) &= 1-\nu(z), \\
\bar{\tau}_{zz}^* &= 2\mu(z)\bar{W}' + \lambda(z)\bar{e}^*, & \bar{\tau}_{rz}^* &= \mu(z)(\bar{U}' - \xi\bar{W}), & \bar{e}^* &= \bar{W}' - \xi\bar{U},
\end{aligned}$$

штрихом позначено диференціювання за z .

Задачу (35), (36) розв'язуємо методом функцій Гріна. Їх отримаємо з функцій Гріна [7] для півбезмежної шаруватої області (рис. 1), що складається з n_0 підобластей з номерами $2, 3, \dots, n_0$, які мають фізико-механічні та геометричні характеристики такі ж, як підобласті з номерами $1, 2, \dots, n$ заданої шаруватої області. Для цього у виразах для цих функцій Гріна, які для різних варіантів граничних умов на поверхні шаруватої півбезмежної області визначають співвідношення одного і того ж вигляду, спрямовуємо модуль зсуву півбезмежної підобласті до нуля; параметру, який відповідає номеру варіанта граничних умов, коли і на поверхні $z = z_{n_0}$ аналоги нормального і дотичного напруження дорівнюють нулеві, надаємо значення один.

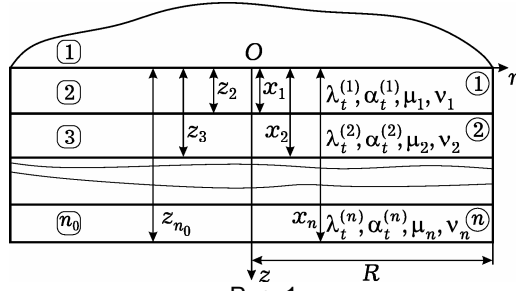


Рис. 1

За допомогою відповідних елементів $\tilde{G}_{ki}^{(fh)}(\xi, z, x)$ матриць Гріна функції $\bar{U}(\xi, z, \zeta)$ і $\bar{W}(\xi, z, \zeta)$ при $x_{i-1} \leq z \leq x_i$, $x_{p-1} \leq \zeta \leq x_p$, $i = 1, \dots, n$, $p = 1, \dots, n$, визначатимемо за формулами [7]

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{ip}(\xi, z, \zeta)\delta_{rk} + \bar{W}_{ip}(\xi, z, \zeta)\delta_{zk} &= 2\mu_n \xi [\tilde{G}_{k,i+1}^{(rn_0)}(\xi, z, z_{n_0})\bar{\Psi}'_{np}(\xi, x, \zeta) - \\
&- \xi \tilde{G}_{k,i+1}^{(rn_0)}(\xi, z, z_{n_0})\bar{\Psi}_{np}(\xi, x, \zeta)] \Big|_{x=x_n} - \\
&- 2\mu_1 \xi [\tilde{G}_{k,i+1}^{(r2)}(\xi, z, 0)\bar{\Psi}'_{1p}(\xi, x, \zeta) - \\
&- \xi \tilde{G}_{k,i+1}^{(z2)}(\xi, z, 0)\bar{\Psi}_{1p}(\xi, x, \zeta)] \Big|_{x=0} + \\
&+ 2\xi \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\mu}_j [\xi \tilde{G}_{k,i+1}^{(z,j+2)}(\xi, z, z_{j+1})\bar{\Psi}_{jp}(\xi, x, \zeta) - \\
&- \tilde{G}_{k,i+1}^{(r,j+2)}(\xi, z, z_{j+1})\bar{\Psi}'_{jp}(\xi, x, \zeta)] \Big|_{x=x_j}, \quad k = r, z. \quad (37)
\end{aligned}$$

На основі (25), (28), (32), (34), (37) знаходимо переміщення і напруження, які будемо називати елементами матриць Гріна задачі термопружності:

$$\begin{aligned}
U_r^{(ip)} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{U}_r^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta), \\
U_z^{(ip)} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{U}_z^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta), \\
\frac{\tau_{rr}^{(ip)}}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{\tau}_{rr}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) - \frac{U_r^{(ip)}}{r}, \\
\frac{\tau_{\phi\phi}^{(ip)}}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{\tau}_{\phi\phi}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) + \frac{U_r^{(ip)}}{r}, \\
\frac{\tau_{zz}^{(ip)}}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{\tau}_{zz}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta), \\
\frac{\tau_{rz}^{(ip)}}{\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_q r) J_0(\xi_q \rho)}{J_0^2(\xi_q R)} \tilde{\tau}_{rz}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta), \quad (38)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_r^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \bar{U}_{ip}(\xi, z, \zeta) - \xi \bar{\Psi}_{ip}(\xi, z, \zeta), \\
\tilde{U}_z^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \bar{W}_{ip}(\xi, z, \zeta) + \bar{\Psi}'_{ip}(\xi, z, \zeta), \\
\tilde{\tau}_{rr}^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \frac{(1 - \nu_i) \xi \bar{U}_{ip}(\xi, z, \zeta) + \nu_i \bar{W}'_{ip}(\xi, z, \zeta)}{1 - 2\nu_i} - \gamma_i \bar{G}_{ip}(\xi_q, z, \zeta) - \\
&- \xi_q^2 \bar{\Psi}_{ip}(\xi_q, z, \zeta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\varphi\varphi}^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \frac{v_i}{1-2v_i} [\xi \bar{U}_{ip}(\xi, z, \zeta) + \bar{W}'_{ip}(\xi, z, \zeta)] - \gamma_i \bar{G}_{ip}(\xi_q, z, \zeta), \\ \tilde{\tau}_{zz}^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \frac{1}{1-2v_i} [(1-v_i) \bar{W}'_{ip}(\xi, z, \zeta) + \xi v_i \bar{U}_{ip}(\xi, z, \zeta)] - \xi_q^2 \bar{\Psi}_{ip}(\xi_q, z, \zeta), \\ \tilde{\tau}_{rz}^{(ip)}(\xi, z, \zeta) &= \bar{U}'_{ip}(\xi, z, \zeta) - \xi \bar{W}_{ip}(\xi, z, \zeta) - 2\xi_q \bar{\Psi}'_{ip}(\xi_q, z, \zeta).\end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення (19), (22)–(24) та співвідношення (38), запишемо вирази при $x_{i-1} < z < x_i$ для визначення переміщень і напружень, зумовлених температурним полем (13):

$$\begin{aligned}u_{ri}(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{U}_r^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{U}_r^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\ &\quad \left. - \tilde{U}_r^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\}, \\ u_{zi}(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{U}_z^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{U}_z^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\ &\quad \left. - \tilde{U}_z^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\}, \\ \frac{\sigma_{rri}(r, z)}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{\tau}_{rr}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{\tau}_{rr}^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\ &\quad \left. - \tilde{\tau}_{rr}^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\} - \frac{u_r^{(i)}(r, z)}{r}, \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi i}(r, z)}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{\tau}_{\varphi\varphi}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{\tau}_{\varphi\varphi}^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\ &\quad \left. - \tilde{\tau}_{\varphi\varphi}^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\} - \frac{u_r^{(i)}(r, z)}{r}, \\ \frac{\sigma_{zzi}(r, z)}{2\mu_i} &= \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{\tau}_{zz}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{\tau}_{zz}^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\ &\quad \left. - \tilde{\tau}_{zz}^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{rzi}(r, z)}{2\mu_i} = & \frac{2}{R^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_q r)}{J_0^2(\xi_q R)} \left\{ \int_0^R \rho J_0(\xi_q \rho) \sum_{p=1}^n \int_{x_{p-1}}^{x_p} \tilde{\tau}_{rz}^{(ip)}(\xi_q, z, \zeta) W_{tp}(\rho, \zeta) d\zeta d\rho + \right. \\
& + \frac{\lambda_t^{(n)}}{\lambda_t^{(1)}} \tilde{\tau}_{rz}^{(in)}(\xi_q, z, x_n) \int_0^R \rho g_n(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho - \\
& \left. - \tilde{\tau}_{rz}^{(i1)}(\xi_q, z, 0) \int_0^R \rho g_0(\rho) J_0(\xi_q \rho) d\rho \right\}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Шуканий розв'язок дістанемо, додавши до компонент переміщень і напружень (39) відповідні компоненти, отримані на основі (15). При цьому необхідно врахувати, що

$$\begin{aligned}
G_{ii}^{(0)}(z, x_{i-1}) &= \frac{1}{Q_0} \Psi_i(z) \Phi_i(x_{i-1}), & G_{ii}^{(0)}(z, x_i) &= \frac{1}{Q_0} \Psi_i(x_i) \Phi_i(z), \\
\Omega(\xi, z, x_{i-1}) &= e^{-\xi(z-x_{i-1})}, & \Omega(\xi, z, x_i) &= e^{-\xi(x_i-z)}, \\
\Omega^*(\xi, z, x_{i-1}) &= (z-x_{i-1})e^{-\xi(z-x_{i-1})}, \\
\Omega^*(\xi, z, x_i) &= (x_i-z)e^{-\xi(x_i-z)}, & x_{i-1} \leq z \leq x_i.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що співвідношення для трансформант елементів матриць Гріна задач теплопровідності і термопружності не містять експоненціальних функцій з додатними аргументами, причому у знаменниках цих співвідношень у вирази поза множителем ξ_q входять відмінні від нуля сталі, які є границями відповідних виразів при прямуванні коренів ξ_q до нескінченності.

Приклад. З метою апробації отриманих розв'язків досліджували за відсутності об'ємних джерел тепла ($w_t(\tilde{r}, \tilde{z}) = 0$) термопружний стан у тришаровому циліндрі, в якому поверхня $\tilde{z} = 0$ перебуває під дією теплового потоку інтенсивності $g_0(\tilde{r}) = q_0 e^{-k\tilde{r}^2}$, поверхня $\tilde{z} = \tilde{x}_3$ підтримується при нульовій температурі ($g_n(\tilde{r}) = 0$), а контур $\tilde{z} = \tilde{x}_3$, $\tilde{r} = \tilde{R}$ не може переміщатися в осьовому напрямі ($C = -u_{z3}(R, x_3) - \int_0^{x_3} \gamma(x) T^{(0)}(x) dx$). Фізико-механічні характеристики шарів відповідали

окси цирконію:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(1)} &= 1.868 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}, & \alpha_t^{(1)} &= 6.64 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \\
E_1 &= 100.718 \text{ ГПа}, & \nu_1 &= 0.25;
\end{aligned}$$

кераміці:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(2)} &= 6.512 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}, & \alpha_t^{(2)} &= 7.89 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \\
E_2 &= 393.571 \text{ ГПа}, & \nu_2 &= 0.26;
\end{aligned}$$

металу Ti-6Al-4V:

$$\begin{aligned}
\lambda_t^{(3)} &= 19.07 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}, & \alpha_t^{(3)} &= 10.01 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \\
E_3 &= 62.465 \text{ ГПа}, & \nu_3 &= 0.285.
\end{aligned}$$

Решта параметрів, крім \tilde{h}_3 , мали такі значення:

$$\begin{aligned}
\text{Bi}_0 &= 0, & \text{Bi}_n &= \infty, & \tilde{k} &= 10^6 \text{ м}^{-2}, & \tilde{h}_1 &= 10^{-4} \text{ м}, \\
\tilde{h}_2 &= 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & \tilde{R} &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.
\end{aligned}$$

На рис. 2 – рис. 8 наведено зміну в радіальному напрямі безрозмірних температури $\bar{t} = t/t^*$ ($t^* = q_0 \ell / \lambda_t^{(1)}$, $\ell = \tilde{R}$), переміщень $\bar{u}_r = u_r / (t^* \alpha_t^{(1)})$,

$\bar{u}_z = (w^{(0)} + u_z)/(t^* \alpha_t^{(1)})$ і напружень $\bar{\sigma}_{jj} = (\sigma_0 + \sigma_{jj})/(t^* \alpha_t^{(1)} E_1)$, $j = r, \varphi$, $\bar{\sigma}_{jz} = \sigma_{jz}/(t^* \alpha_t^{(1)} E_1)$, $j = z, r$, на поверхнях шарів для $\tilde{h}_3 = 10^{-3} \text{ м}^2$ (штрихові лінії) і $\tilde{h}_3 = 10^{-2} \text{ м}^2$ (суцільні лінії).

Зі збільшенням довжини циліндра температура на поверхні нагріву практично не змінюється (рис. 2). Найбільше помітною є різниця температур на поверхнях поділу між другим і третім шаром.

Радіальні переміщення (рис. 3) на поверхнях $\tilde{z} = \tilde{x}_3$ для менших довжин циліндра є від'ємними, для більших є практично нульовими. На інших поверхнях вони однакові або неістотно відрізняються для різних довжин циліндра.

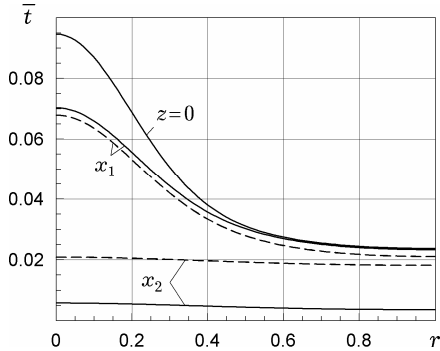


Рис. 2

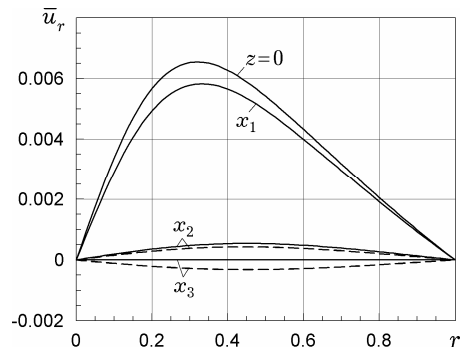


Рис. 3

Істотний вплив довжини циліндра на осьові переміщення ілюструє рис. 4. Переміщення на поверхнях шарів у довшому циліндрі, за винятком поверхні $\tilde{z} = \tilde{x}_3$, є значно більшими.

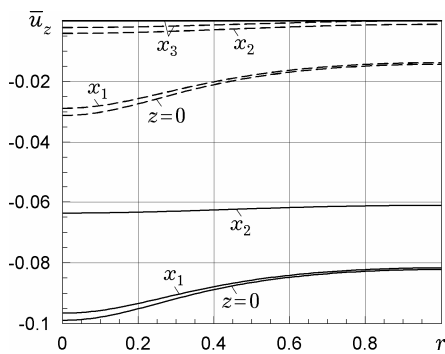


Рис. 4

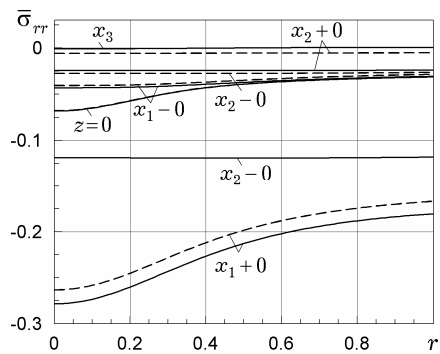


Рис. 5

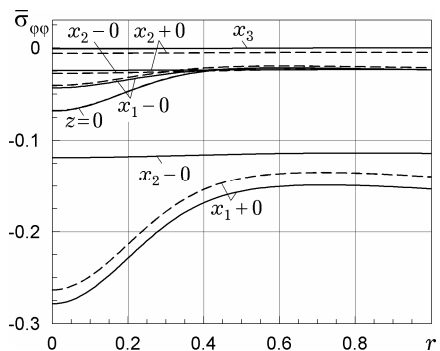


Рис. 6

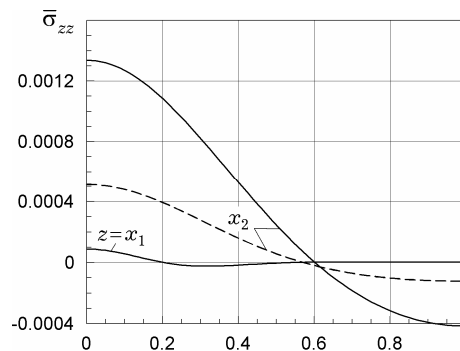


Рис. 7

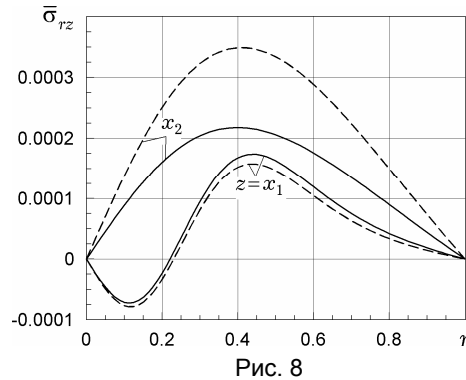


Рис. 8

Для напружень (рис. 5 – рис. 8) характерною є значна різниця їх значень на поверхнях поділу між другим і третім шарами для різних довжин циліндрів (для розривних радіальних і кільцевих у других шарах). На цих же поверхнях максимальними є розтягувальні осьові та дотичні напруження (рис. 7, рис. 8). Радіальні та кільцеві напруження (рис. 5, рис. 6), значення яких при відповідних довжинах циліндра на осі співпадають, за винятком поверхні $\tilde{z} = \tilde{x}_3$, є стискувальними. Максимальними є їх значення у других шарах на поверхнях поділу між першим і другим шаром.

Висновки. Побудовано функції Гріна осесиметричної задачі теплопровідності та статичної задачі термопружності для шаруватого уздовж осі скінченного циліндра, теплоізольована циліндрична поверхня якого гладко закріплена, за конвективного теплообміну з вільних від навантажень торцевих поверхонь. За допомогою цих функцій термопружний стан такого циліндра для широкого діапазону зміни товщин шарів описується функціональною залежністю від заданих розподілів густин об'ємних і поверхневих джерел тепла.

1. Галицин А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
4. Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.
Te same: Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M. Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
5. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.
Te same: Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R. Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669.
6. Процюк Б. В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 95–109.
7. Процюк Б. В. Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 103–112.
8. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Савченко В. Г. Пространственные задачи термопластичности. – Киев: Наук. думка, 1980. – 262 с.
9. Ashida F., Sakata S., Matsumoto K. Control of thermal stress in a piezo-composite disk // Proc. 7th Int. Congr. Therm. Stresses (4–7 June 2007, Taipei, Taiwan) / Eds C. K. Chao and C. Y. Lin. – Taipei: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. – Vol. 1. – P. 77–80.

10. Horvay G., Giaver I., Mirabal J. Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of boundary layer problem in three-dimensional elasticity // Arch. Appl. Mech. – 1959. – **27**, No. 3. – P. 179–194.
11. Matthews J. R. Thermal stress in a finite heat generating cylinder // Nucl. Eng. Desingn. – 1970. – **12**. – P. 291–296.
12. Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhara K. Thermal stresses in a finite solid cylinder due to axisymmetric temperature field at the end surface // Nucl. Eng. Desingn. – 1966. – **3**. – P. 382–393.
13. Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhara K. Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surface // Int. J. Engng Sci. – 1967. – **5**. – P. 393–413.
14. Taucher T. R., Ashida F. Application of the potential function method in piezothermoelasticity: solutions for composite circular plates // J. Therm. Stresses. – 1999. – **22**. – P. 387–420.
15. Valentin R. A., Carey J. J. Thermal stresses and displacements in finite, heat-generating cylinders // Nucl. Eng. Desingn. – 1970. – **12**. – P. 277–290.

ОСЕССИМЕТРИЧНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО ВДОЛЬ ОСИ ГЛАДКО ЗАКРЕПЛЕННОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

С помощью построенных функций Грина задач теплопроводности и термоупругости получено решение осесимметрической статической задачи термоупругости для слоистого вдоль оси конечного цилиндра с гладко закрепленной теплоизолированной цилиндрической поверхностью при действии источников тепла и наличии конвективного теплообмена из торцевых поверхностей для широкого диапазона изменения толщин слоев. При этом использованы обобщенные функции, конечное интегральное преобразование Ханкеля и функции Грина соответствующих задач для одного и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены результаты численных исследований для трехслойного цилиндра.

AXISYMMETRIC STATIC THERMOELASTIC STATE OF LAYERED ALONG THE AXIS OF SMOOTHLY FASTENED FINITE CYLINDER

With using the constructed Green's functions of heat conductivity and thermoelasticity problems the solution of the static axisymmetric thermoelasticity problem for a layered along the axis of finite cylinder with a smoothly fastened thermally insulated cylindrical surface under the action of heat source and the presence of convective heat transfer from the end surfaces for a wide range of varying layer thicknesses is obtained. The generalized functions, finite Hankel integral transform and Green's functions of corresponding problems for one and systems of ordinary differential equations are used. The results of numerical studies for the three-layer cylinder are presented.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
26.04.10