УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1], Г. С. Пасічник[1,2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГОРОВА БАГАТОВИМІРНОГО НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Наведено результати дослідження фундаментального розв'язку, коректної розв'язності задачі Коші та інтегрального зображення розв'язків для рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова одного класу нормальних марковських процесів.

У книзі [4, с. 177–179] розглянуто n-вимірний марковський процес $\{x(t) := (x_1(t),\dots,x_n(t)),\ t \ge 0\}$, який заданий такою системою лінійних стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = -\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}x_k(t) + n_j(t), \qquad t \ge 0, \qquad j \in \{1,\dots,n\},$$

де β_{jk} – сталі коефіцієнти, а $\{n_j(t),\ t \ge 0\}$ – нормальні білі шуми з нульовими середніми значеннями та дельтавидними кореляційними функціями

$$\langle n_j(t_1)n_k(t_2)\rangle = \frac{1}{2}R_{jk}\sqrt{N_jN_k}\,\delta(t_2 - t_1),$$

$$t_1 \ge 0, \qquad t_2 \ge 0, \qquad \{j,k\} \subset \{1,\dots,n\},$$

R_{jk} і N_j – сталі; $R_{jk} = 1$ при $j = k$.

Рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова цього процесу має вигляд

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\partial_{x_j}\partial_{x_k}(\alpha_{jk}u) + b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{jk}x_k u\right), \tag{1}$$

де запроваджено позначення

$$\alpha_{jk} := \frac{1}{2}R_{jk}\sqrt{N_jN_k}, \qquad b_{jk} := \frac{\beta_{jk}}{b}, \qquad b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Припускаючи, що матриці $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$ і $(b_{jk})_{j,k=1}^n$ є симетричними та додатно визначеними, за допомогою лінійної заміни незалежних змінних рівняння (1) можна звести до вигляду

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}u(t,x) - b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}\big(x_j u(t,x)\big) = 0,$$

$$t \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $A := (a_{jk})_{j,k=1}^n$ – додатно визначена матриця зі сталими дійсними елементами. Рівняння (2) є, таким чином, параболічним за Петровським рівнянням з необмежено зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами при похідних від u першого порядку.

У цій статті наводимо такі результати дослідження задачі Коші для рівняння (2): явна формула для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) Z, оцінки та властивості функції Z, властивості породжених цією функцією інтегралів Пуассона, теореми про коректну розв'язність задачі Коші в спеціальних вагових L_p-просторах і про зображення розв'язків у вигляді інтегралів Пуассона.

Зазначимо, що аналогічні результати для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами одержано в працях [1–3]. Розроблену в цих працях методику у відповідно модифікованому вигляді використовуємо для одержання результатів цієї роботи.

1. Нехай τ − фіксоване додатне число. Розглянемо задачу Коші

$$(Lu)(t,x)=0, \qquad t>\tau, \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$u(t,x)\big|_{t=\tau}=\varphi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

де L − диференціальний вираз із (2).

Вважаючи функцію φ досить гладкою і фінітною, розв'яжемо задачу (3) за допомогою перетворень Фур'є $F_{x\to y}$ і $F^{-1}_{y\to x}$. Якщо розв'язок цієї задачі шукати у вигляді

$$u(t,x)=F^{-1}_{y\to x}[v(t,y)](t,x), \qquad t>\tau, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

то для функції v одержимо таку задачу Коші для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$\left(\partial_t+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}y_jy_k+b\sum_{j=1}^{n}y_j\partial_{y_j}\right)v(t,y)=0, \qquad t>\tau, \quad y\in\mathbb{R}^n,$$

$$v(t,y)\big|_{t=\tau}=\psi(y):=F_{x\to y}[\varphi(x)], \qquad y\in\mathbb{R}^n.$$

Розв'язавши цю задачу методом характеристик і використавши (4), отримаємо формулу

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad t>\tau, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

де

$$Z(t,x;\tau,\xi):=\frac{|b|^{n/2}}{\left(\pi\left|1-e^{-b(t-\tau)}\right|\right)^{n/2}\sqrt{\det A}}\times$$

$$\times\exp\left\{-|b|\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{a'_{k\ell}\left(x_k-\xi_ke^{-b(t-\tau)}\right)\left(x_\ell-\xi_\ell e^{-b(t-\tau)}\right)}{\left|1-e^{-2b(t-\tau)}\right|}\right\},$$

$$t>\tau>0, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

тут $a'_{k\ell}$ − елементи оберненої до A матриці.

Використовуючи формулу (6), неважко переконатися в правильності рівностей

$$(LZ)(t,x;\tau,\xi)=0, \qquad t>\tau, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi=|b|^{n/2}\,e^{nb(t-\tau)}, \qquad t>\tau, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

та оцінок

$$\left|\partial_x^k\partial_\xi^m Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le C_{km}\left|1-e^{-2b(t-\tau)}\right|^{-(n+|k|+|m|)/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-|m|\,b(t-\tau)-c\,\frac{\left|x-\xi e^{-b(t-\tau)}\right|^2}{\left|1-e^{-2b(t-\tau)}\right|}\right\},$$

$$t>\tau, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \{k:=(k_1,\ldots,k_n),\ m:=(m_1,\ldots,m_n)\}\subset Z_+^n, \tag{9}$$

де C_{km} і c − додатні сталі, а $|k|:=k_1+\ldots+k_n$, $|m|:=m_1+\ldots+m_n$.

За допомогою (7)–(9) звичайним способом можна довести, що для будь-якої неперервної та обмеженої функції φ формула (5) визначає розв'язок задачі Коші (3). Звідси випливає, що функція (6) є ФРЗК для рівняння (2).

Зауважимо, що аналогічно можна знайти ФРЗК $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $\tau < t$, $\{\xi,x\} \subset \mathbb{R}^n$, для спряженого до рівняння (2) рівняння

$$(L^*v)(\tau,\xi) := \left(-\partial_\tau - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_k} + b\sum_{j=1}^n \xi_j\partial_{\xi_j}\right)v(\tau,\xi) = 0,$$

$$\tau \ge 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

2. Наведемо ряд властивостей ФРЗК. Користуватимемося такою формулою Гріна – Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\beta \int_{K_R} (vLu - uL^*v)(\beta,y)\,dy =$$

$$= \int_{K_R} (uv)(\beta,y)\Big|_{\beta=t_1}^{\beta=t_2} dy - \int_{t_1}^{t_2} d\beta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^n \Big[by_j(uv)(\beta,y) +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(v\partial_{y_k}u - u\partial_{y_k}v)(\beta,y)\Big]\mu_j\,dS_y, \tag{11}$$

де $K_R := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \le R\}$ – куля; Γ_R – її межа; $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R; $t_1 < t_2$; L і L^* – диференціальні вирази з (2) і (10).

Перехід у цій формулі до границі при $R \to \infty$ для тих функцій u і v, для яких інтеграли з (11), що містять інтегрування по Γ_R, прямують до нуля при $R \to \infty$, приводить до формули

$$\int_{t_1}^{t_2} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (vLu - uL^*v)(\beta,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} (uv)(\beta,y)\Big|_{\beta=t_1}^{\beta=t_2} dy. \tag{12}$$

Саме ця формула лежить в основі доведень наступних властивостей ФРЗК Z.

1°. Нормальність ФРЗК. Якщо Z і Z^* – ФРЗК відповідно для рівнянь (2) і (10), то є правильною рівність

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z^*(\tau,\xi;t,x), \qquad \tau < t, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

ФРЗК Z, для якого справджується ця рівність, називається нормальним ФРЗК.

Д о в е д е н н я. Покладемо в формулі (12)

$$u(\beta,y) = Z(\beta,y;\tau,\xi), \quad v(\beta,y) = Z^*(\beta,y;t,x), \quad t_1 = \tau + \varepsilon, \quad t_2 = t - \varepsilon,$$

де ε – досить мале додатне число. Тоді одержимо рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t-\varepsilon,y;\tau,\xi)Z^*(t-\varepsilon,y;t,x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} Z(\tau+\varepsilon,y;\tau,\xi)Z^*(\tau+\varepsilon,y;t,x)\,dy,$$

з якої після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ випливає рівність (13). ◊

2°. Формула згортки. Справджується рівність

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)\,dy, \quad \tau < \gamma < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Як і при доведенні властивості ***1°***, покладемо в формулі (12)

$$u(\beta,y) = Z(\beta,y;\tau,\xi), \quad v(\beta,y) = Z^*(\beta,y;t,x), \quad t_1 = \gamma, \quad t_2 = t - \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ таке, що $\varepsilon < t - \varepsilon$. Скориставшись формулою (13), у результаті одержимо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t-\varepsilon, y; \tau, \xi) Z^*(t-\varepsilon, y; t, x)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \gamma, y) Z(\gamma, y; \tau, \xi)\, dy,$$

звідки випливає рівність (14), якщо перейти до границі при $\varepsilon \to 0$. ◊

Рівність (14) містить у собі інформацію про те, що розглядуваний процес є марковським.

3°. Єдиність нормального ФРЗК. Для рівняння (2) існує тільки один нормальний ФРЗК.

Д о в е д е н н я. Нехай Z_1 і Z_2 – два нормальні ФРЗК для рівняння (2). Скористаємося формулою (12), поклавши в ній

$$u(\beta, y) = Z_1(\beta, y; \tau, \xi), \qquad v(\beta, y) = Z_2(t, x; \beta, y),$$

тоді отримаємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_2, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_2, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_1, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_1, y)\, dy.$$

Оскільки t_1 і t_2 – довільні числа з інтервалу (τ, t), то остання рівність означає, що функція

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_1(\beta, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; \beta, y)\, dy, \qquad \beta \in (\tau, t), \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

не залежить від β. Позначимо цю функцію через $\Phi(t, x; \tau, \xi)$, тобто

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(\beta, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; \beta, y)\, dy. \tag{15}$$

Спрямувавши в рівності (15) β спочатку до τ, а потім до t, отримаємо, що

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = Z_2(t, x; \tau, \xi) = Z_1(t, x; \tau, \xi), \qquad \tau < t, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad ◊$$

4°. Зображення елементів матриці дифузії A ***через ФРЗК.*** Правильними є формули

$$a_{jk} = (n-2)|b|^{1-n/2} \lim_{\tau \to t} \left(\frac{1}{\left| e^{(n-2)b(t-\tau)} - 1 \right|} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\mathbb{R}^n} (x_j - y_j e^{-b(t-\tau)})(x_k - y_k e^{-b(t-\tau)}) Z(t, x; \tau, y)\, dy \right), \quad n \neq 2,$$

$$a_{jk} = |b|^{-1} \lim_{\tau \to t} \left((t-\tau)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (x_j - y_j e^{-b(t-\tau)})(x_k - y_k e^{-b(t-\tau)}) Z(t, x; \tau, y)\, dy \right),$$

$$n = 2, \qquad \{j, k\} \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Д о в е д е н н я проведемо тільки для елемента a_{11} у випадку $n \neq 2$, тобто доведемо правильність формули

$$a_{11} = (n-2)|b|^{1-n/2} \lim_{\tau \to t} \left(\frac{1}{\left| e^{(n-2)b(t-\tau)} - 1 \right|} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 - y_1 e^{-b(t-\tau)})^2 Z(t, x; \tau, y)\, dy \right). \tag{16}$$

Доведення базується на формулі (12). Покладемо в ній

$$u(\beta, y) = (x_1 - y_1 e^{-b(t-\tau)})^2, \qquad v(\beta, y) = Z(t, x; \beta, y),$$

тоді ця формула набуде вигляду

$$-\int_{t_1}^{t_2} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \beta, y) \left(a_{11} e^{-2b(t-\beta)} + nb \left(x_1 - y_1 e^{-b(t-\beta)} \right)^2 \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 - y_1 e^{-b(t-\beta)})^2 \, Z(t, x; \beta, y) \Big|_{\beta = t_1}^{\beta = t_2} dy. \tag{17}$$

Покладемо в (17) $t_1 = \tau,\ t_2 = t - \varepsilon$ і перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$. У результаті одержимо

$$-\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\beta,y)\big(a_{11}e^{-2b(t-\beta)} + nb(x_1 - y_1 e^{-b(t-\beta)})^2\big)\,dy =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} (x_1 - y_1 e^{-b(t-\tau)})^2 Z(t,x;\tau,y)\,dy\,. \tag{18}$$

Оскільки на підставі рівності (8)

$$\int_\tau^t e^{-2b(t-\beta)}\,d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\beta,y)\,dy =$$

$$= |b|^{n/2}\int_\tau^t e^{(n-2)b(t-\beta)}\,d\beta = \frac{|b|^{n/2}}{(n-2)b}\big(e^{(n-2)b(t-\tau)} - 1\big)\,,$$

то (18) можна переписати у вигляді

$$a_{11} = -\frac{(n-2)b}{|b|^{n/2}}\frac{1}{1-e^{(n-2)b(t-\tau)}}\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 - y_1 e^{-b(t-\tau)})^2 Z(t,x;\tau,y)\,dy + I(t,\tau)\,, \tag{19}$$

де

$$I(t,\tau) := \frac{n(n-2)b^2}{|b|^{n/2}}\frac{1}{1-e^{(n-2)b(t-\tau)}}\times$$

$$\times\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\beta,y)(x_1 - y_1 e^{-b(t-\tau)})^2\,dy\,.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{\tau\to t} I(t,\tau) = 0\,. \tag{20}$$

Справді, за допомогою оцінки (9) з $k = m = 0$ маємо

$$|I(t,\tau)| \le C_{00}n(n-2)|b|^{2-n/2}\frac{1}{\left|1-e^{(n-2)b(t-\tau)}\right|}\times$$

$$\times\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left|1-e^{-2b(t-\beta)}\right|^{(n-2)/2}}\left(\frac{\left|x - ye^{-b(t-\beta)}\right|}{\left|1-e^{-2b(t-\beta)}\right|^{1/2}}\right)^2\times$$

$$\times\exp\left\{-c\frac{\left|x-ye^{-b(t-\beta)}\right|^2}{\left|1-e^{-2b(t-\beta)}\right|}\right\}dy \le$$

$$\le C_1\frac{1}{\left|1-e^{(n-2)b(t-\tau)}\right|}\int_\tau^t\left|1-e^{-2b(t-\beta)}\right|e^{nb(t-\beta)}\,d\beta =$$

$$= \frac{C_1}{|b|}\left(\frac{1}{n}\frac{1-e^{nb(t-\tau)}}{1-e^{(n-2)b(t-\tau)}} - \frac{1}{n-2}\right)\to 0,\qquad \tau\to t\,,$$

оскільки $\lim\limits_{\tau\to t}\dfrac{1-e^{nb(t-\tau)}}{1-e^{(n-2)b(t-\tau)}} = \dfrac{n}{n-2}$.

Перейшовши в рівності (19) до границі при $\tau\to t$ і врахувавши (20), одержимо формулу (16). ◊

3. Сформулюємо основні результати, що стосуються коректної розв'язності задачі Коші та інтегрального зображення розв'язків для рівняння (2). Для цього спочатку введемо необхідні норми та простори.

Нехай c_0 – додатна стала така, що $c_0 < c$, де c – стала з оцінок (9); a і T – фіксовані числа такі, що $a \ge 0$ і $0 < T < T_b$, де $T_b := \frac{1}{2b} \ln \frac{a + c_0}{a}$ для $b > 0$ і $T_b := \frac{1}{2b} \ln \frac{a - c_0}{a}$ для $b < 0$; $\Pi := (0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Розглянемо функції

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 - e^{-2bt}, & b > 0, \\ e^{-2bt} - 1, & b < 0, \end{cases}$$

$$k(t, a) := \frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - a e^{2bt} \alpha(t)},$$

$$E_c(t, x, \xi) := \exp \left\{ -c \frac{|x - \xi e^{-bt}|^2}{\alpha(t)} \right\},$$

$$\Phi_r(t, x) := \exp \{ r \cdot k(t, a) |x|^2 \},$$

де $t \in [0, T]$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $c > 0$, $r \in \{-1, 1\}$.

Зауважимо, що ці функції мають такі властивості:

$$k(t - \tau, k(\tau, a)) = k(t, a), \qquad 0 \le \tau \le t \le T,$$

$$E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \Phi_1(\tau, \xi) \le \Phi_1(t, x), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha(t))^{-n/2} E_c(t, x, \xi) \, d\xi = C e^{bnt}, \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha(t))^{-n/2} E_c(t, x, \xi) \, dx = C, \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{\Pi}$, – задана комплекснозначна функція, яка є вимірною за Лебегом при кожному $t \in [0, T]$. Для $t \in [0, T]$ і $1 \le p \le \infty$ означимо норму

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{k(t,a)} := \|u(t, \cdot) \Phi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$ і L_p^a простори всіх комплекснозначних функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для яких є скінченними відповідно норми $\|\varphi\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi\|_p^a := \|\varphi\|_p^{k(0,a)}$. Говоритимемо, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi$, належить до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$, якщо $u(t, \cdot) \in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t \in (0, T]$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : \mathcal{B} \to C$ (узагальнених борелевих мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через M^a позначимо сукупність усіх узагальнених борелевих мір $\mu : \mathcal{B} \to C$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int_A \Phi_{-1}(0, x) \, d\mu(x), \qquad A \in \mathcal{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^a$

$$\|\mu\|^a := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0, x) \, d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Використовуватимемо ще такі простори:

$L_1^{-k(T,a)}$ – множина всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для яких скінченною є норма

$$\|\eta\|_p^{-k(T,a)} := \|\eta(\,\cdot\,)\Phi_1(T,\,\cdot\,)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-k(T,a)}$ – множина всіх неперервних комплекснозначних функцій $\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, таких, що

$$\Phi_1(T,x)|\eta(x)| \to 0, \qquad |x| \to \infty.$$

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in L_p^a$, $1 \le p \le \infty$, *і* $\mu \in M^a$. *Тоді формули*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

$$u_0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi), \qquad (t,x) \in \Pi, \tag{22}$$

визначають єдині класичні розв'язки рівняння (2) *в* Π, *які мають такі властивості:*

існує така стала $C > 0$, *що для довільних* $t \in (0,T]$ *справджуються нерівності*

$$\|u(t,\,\cdot\,)\|_p^{k(t,a)} \le C\,\|\varphi\|_p^a, \qquad \|u_0(t,\,\cdot\,)\|_1^{k(t,a)} \le C\,\|\mu\|^a \qquad \textit{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\,\cdot\,) - \varphi(\,\cdot\,)\|_p^{k(t,a)} = 0 \qquad \textit{при} \quad p = \infty;$$

для функцій (21) *і* (22) $u(t,\,\cdot\,) \to \varphi$, $u_0(t,\,\cdot\,) \to \mu$, *коли* $t \to 0$, *слабко, тобто для довільних* η *з просторів* $L_1^{-k(T,a)}$ *і* $C_0^{-k(T,a)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,u_0(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному розумінні оберненою до теореми 1.

Теорема 2. *Нехай* u *– класичний розв'язок рівняння* (2) *в* Π, *який задовольняє умову*: *існують такі сталі* $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$, *що для всіх* $t \in (0,T]$ *справджується нерівність*

$$\|u(t,\,\cdot\,)\|_p^{k(t,a)} \le C. \tag{23}$$

Тоді при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^a$, *а при* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^a$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (21) *і* (22).

Д о в е д е н н я теорем 1 і 2 є досить громіздкими. Вони базуються на детальному вивченні властивостей інтегралів Пуассона (21) і (22) та використовують методику, розроблену в [1–3, 5].

Наслідок. З теорем 1 і 2 випливають такі твердження:

а) *розв'язки рівняння* (2), *які визначаються формулами* (21) і (22), *належать відповідно до просторів* $L_p^{k(\cdot,a)}$ *і* $L_1^{k(\cdot,a)}$;

б) *умова* (23) *є необхідною і достатньою для того, щоб простори* L_p^a *і* M^a *були множинами початкових значень розв'язків рівняння* (2);

в) *ця умова є також необхідною і достатньою для того, щоб розв'язки рівняння* (2) *зображувалися у вигляді інтегралів Пуассона* (21) *і* (22).

1. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 7–16.
2. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.* Інтегральне зображення розв'язків деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2007. – Вип. 336–337. – С. 7–15.
3. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 288. – С. 5–11.
4. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – Москва: Сов. радио, 1977. – 488 с.
5. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА – КОЛМОГОРОВА МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Приведены результаты исследования фундаментального решения, корректной разрешимости задачи Коши и интегрального представления решений для уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова одного класса нормальных марковских процессов.

CAUCHY PROBLEM FOR THE FOKKER – PLANCK – KOLMOGOROV EQUATION OF MULTIDIMENSIONAL NORMAL MARKOV PROCESS

The results of investigation for the fundamental solution, correct solvability of the Cauchy problem and integral representations of solutions for the Fokker – Planck – Kolmogorov equation for a class of normal Markov processes are presented.

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т», Київ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.05.09