

ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ, ЗАСНОВАНОЇ НА КОНЦЕПЦІЇ КОВЗАННЯ

Запропоновано модифікацію методів розв'язування системи інтегральних рівнянь [3, 5], що описують розвиток плоскопластичної деформації при простому і складному процесах навантаження. Характерною особливістю цих рівнянь є те, що шукані функції входять як під знак інтеграла, так і в межі інтегрування. Записано аналітичні розв'язки при монотонній деформації і в малому околі точки зламу траєкторії навантаження. Для довільних кусково-гладких траєкторій задачу зведено до задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку з відомими початковими умовами. Одержані результати порівняно з одержаними в [5, 6] значно спрощують побудову визначальних рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$ і їх застосування у прикладних задачах теорії пластичності.

1. Вихідні положення. Математична постановка задачі. Задача побудови рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$ диференціально-нелінійного варіанта теорії пластичності [3, 5], заснованої на концепції ковзання [7], за умови плоскопластичної деформації зводиться до визначення швидкості інтенсивності зсуву $\varphi'_t(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ із системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2(\theta_0 + \Phi_0(t))], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут t_0 – початковий, t – довільний моменти пластичного деформування і за параметр часу вибираємо довжину дуги траєкторії навантаження; $R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega] = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*] F(\omega)$ – універсальна функція матеріалу, яка подається у вигляді добутку функцій пластичності Π і зміцнення F ; $\varepsilon_i^{(p)}$ – інтенсивність пластичної деформації, λ_k^* – її екстремальні значення, що відповідають зміні знака швидкості $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}$ або максимальному значенню $\varepsilon_i^{(p)}$ за всю історію навантаження; $\omega = |\theta - \theta_0|$ – кут між напрямком пластичного зсуву $\mathbf{n}(\theta)$ і довільним напрямком $\mathbf{m}(\theta_0)$ у площині деформації;

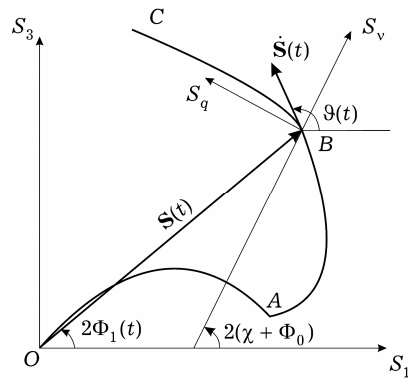


Рис.1

$$\begin{aligned} S(t) = [S_1^2(t) + S_3^2(t)]^{1/2}, \quad S_1(t) = [\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)] \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S_3(t) = \sqrt{2} \sigma_{12}(t), \\ \Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_0, \quad 2\Phi_1(t) = \arctg[S_3(t)/S_1(t)], \quad \Phi_0 = \Phi_1(t_0), \\ \vartheta(t) = \arctg(dS_3/dS_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Використані геометричні параметри траєкторії навантаження ОАВС зображено на рис. 1. При відомих $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ компоненти вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}$ швидкості плоскопластичної деформації визначаються формулами [5, 6]

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta,\end{aligned}\quad (4)$$

де

$$\dot{\Gamma}^{(p)} = \mathbf{i}_1 \dot{\Gamma}_1^{(p)} + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}_3^{(p)}, \quad \dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\varepsilon}_{11}^{(p)} - \dot{\varepsilon}_{22}^{(p)}), \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \sqrt{2} \dot{\varepsilon}_{12}^{(p)}.$$

У роботах [5, 6] запропоновано аналітичні та числові методи розв'язування рівнянь (1) і (2). Вони ефективні для регулярних функцій зміцнення ($F'(0) = 0$), а також сингулярних ($F'(0) \neq 0$), але тільки за умови монотонності деформації ($\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$). При порушенні цих умов методи стають громіздкими, що ускладнює їх реалізацію і побудову визначальних рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$ за довільних процесів складного навантаження. Пропонуємо простіший підхід до розв'язування поставленої задачі. Його сутність викладемо на прикладі сингулярної функції зміцнення

$$F(\omega) = \ln(C \cdot \text{ctg } \omega), \quad \omega \in [0, \pi/2]. \quad (5)$$

Метод залишається в силі і для інших сингулярних, а також регулярних функцій $F(\omega)$. Спочатку розглянемо допоміжне інтегральне рівняння

$$\int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} \ln \text{ctg} |\eta - \eta_0| \cdot \Psi[\eta, t] d\eta = q_0(t) + q_1(t) \sin 2\eta_0 + q_2(t) \cos 2\eta_0, \quad (6)$$

у якому $\eta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)]$, і змінну t розглядаємо поки що як сталий параметр. На основі [2, 4] розв'язок рівняння (6) подамо так:

$$\Psi[\eta, t] = q_0(t) \psi_0(\eta, t) + q_1(t) \psi_1(\eta, t) + q_2(t) \psi_2(\eta, t). \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned}\psi_0(\eta, t) &= \frac{4}{\pi \mathbf{K}(\cos 2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}}, \\ \psi_1(\eta, t) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}} \sin 4\eta, \\ \psi_2(\eta, t) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha} + \left[\frac{4 \mathbf{E}(\cos 2\alpha)}{\pi \mathbf{K}(\cos 2\alpha)} - \sin^2 2\alpha \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}}\end{aligned}\quad (8)$$

і $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{E}(x)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду відповідно.

Якщо в (6) покласти

$$\begin{aligned}q_2 &= \cos[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)]/\sqrt{2}, & q_1 &= \sin[\vartheta - 2(\chi - 2\Phi_0)]/\sqrt{2}, \\ q_0 &= -\ln C \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \Psi[\eta, t] d\eta \equiv -\frac{2}{\pi} [\mathbf{E}(\sin 2\alpha) - \mathbf{K}(\sin 2\alpha) \cos^2 2\alpha] \ln C,\end{aligned}$$

$$2\alpha = \alpha_2 + \alpha_1, \quad 2\chi = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \Psi[\eta, t] = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*] \varphi'_t(\eta + \chi, t), \quad (9)$$

і перейти до змінних $\theta = \eta + \chi$, $\theta_0 = \eta_0 + \chi$, то для функції $F(\omega)$, заданої рівністю (5), одержимо вихідне рівняння (1). На підставі цієї аналогії для

швидкості інтенсивності зсуву $\varphi'_t(\theta, t)$ можемо записати

$$\begin{aligned}\varphi'_t(\theta, t) &= \frac{\Psi[\theta - \chi, t]}{\Pi[\varepsilon_t^{(p)}, \lambda_k^*]}, \\ \Psi[\eta, t] &= \frac{q_2}{\pi} \sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha} + \frac{2}{\pi} \frac{q_1 \sin 4\eta}{\sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}} + \\ &+ \frac{4}{\pi} \frac{q_2 [\mathbf{E}(\cos 2\alpha) - \mathbf{K}(\cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha] + q_0}{\mathbf{K}(\cos 2\alpha) \sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Якщо рівність для $\varphi'_t(\theta, t)$ з (10) підставити в (4) і обчислити інтеграли, то для компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації одержимо

$$\begin{aligned}\Pi \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \cos 2(\chi + \Phi_0) - \\ &- B_{12} \sin[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \sin 2(\chi + \Phi_0), \\ \Pi \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \sin 2(\chi + \Phi_0) + \\ &+ B_{12} \sin[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \cos 2(\chi + \Phi_0),\end{aligned}\quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{1}{2\mathbf{K}(\cos 2\alpha)} \left[\mathbf{E}(\cos 2\alpha) - \mathbf{K}(\cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi \ln C}{\pi \mathbf{K}(\cos 2\alpha) - 2\mathbf{K}(\sin 2\alpha) \ln C} \right] + B_{12}, \\ B_{12} &= \frac{1}{4} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (12)$$

У локальній системі координат $BS_v S_q$ (рис. 1) з початком у поточній точці B траєкторії навантаження, повернутій проти годинникової стрілки відносно $OS_1 S_3$ на кут $2(\chi + \Phi_0)$, формули (11) переписуться так:

$$\Pi \dot{\Gamma}_v^{(p)} = B_{11}(\alpha) \dot{S}_v, \quad \Pi \dot{\Gamma}_q^{(p)} = B_{12}(\alpha) \dot{S}_q. \quad (13)$$

Зауважимо, що наведені визначальні рівняння (11)–(13) мають місце для довільних процесів плоскопластичної деформації. Вони інваріантні відносно перетворень обертання і дзеркального відображення траєкторії навантаження у просторі девіатора напружень, тобто задовольняють постулат ізотропії Гльюшина.

Функції

$$2\alpha(t) = \alpha_2(t) + \alpha_1(t), \quad 2\chi(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t),$$

що входять у формули (11)–(13), залишаються поки що невизначеними. Спосіб їх побудови базується на рівнянні (2) й істотним чином залежить від параметрів внутрішньої геометрії траєкторії навантаження. Доцільно виділити і розглянути окремо характерні типи процесів навантаження, коли розв'язки поставленої задачі суттєво відрізняються між собою та існують у різних класах функцій.

2. Монотонна деформація. При монотонній деформації $\alpha_{1,2}(t)$ є неспадними функціями часу, тобто процес деформування здійснюється без часткового або повного гальмування систем ковзання [5, 6]. За цієї умови у подвійному інтегралі рівняння (2) можна зробити перестановку порядку інтегрування і записати його так:

$$\begin{aligned}\tau_s + \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \ln |C \cdot \operatorname{ctg}(\theta - \theta_0)| \Psi[\theta, t] d\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \\ \theta_0 &\in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)],\end{aligned}\quad (14)$$

де

$$\Psi[\theta, t] = \int_{t^*(\theta^*)}^t \Pi[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi)] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\xi, \quad (15)$$

а $t^*(\theta^*)$ – момент часу, з якого в заданому напрямку $\mathbf{n}(\theta^*)$ започатковуються перші ковзання. При $\theta^* = \mp \alpha_{1,2}(t^*)$ із (15) випливає, що

$$\Psi[\mp \alpha_{1,2}(\theta^*), t^*] = 0. \quad (16)$$

Таким чином, задачу про визначення меж напрямків зсуву $\mp \alpha_{1,2}(t)$ за монотонної деформації зведено до розв'язування рівняння (14) з урахуванням умови (16). Рівняння (14) співпадає з раніше розглянутим рівнянням (6), якщо в ньому покласти

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} S \cos 2(\chi - \Phi), & q_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} S \sin 2(\chi - \Phi), \\ q_0 &= -\tau_s - \frac{\sqrt{2}}{\pi} S \cdot [\mathbf{E}(\sin 2\alpha) - \mathbf{K}(\sin 2\alpha)] \ln C. \end{aligned} \quad (17)$$

З урахуванням вказаної аналогії розв'язок системи (14), (16) існує, коли $\alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\cos 2\alpha) - \mathbf{K}(\cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha - \frac{2}{\pi} [\mathbf{E}(\sin 2\alpha) - \mathbf{K}(\sin 2\alpha) \cos^2 2\alpha] \ln C = \\ = \sqrt{2} \tau_s / S, \end{aligned} \quad (18)$$

і записується так:

$$\Psi[\theta, t] = \frac{S}{\pi} \sqrt{\cos 4(\theta - \Phi) - \cos 4\alpha}. \quad (19)$$

Формули (18) дають розв'язок задачі про визначення функцій $\alpha_{1,2}(t)$ за монотонної деформації. При цьому компоненти вектора швидкості плоскопластичної деформації також визначаються формулами (11)–(13), але в цьому разі $2(\chi + \Phi_0) \equiv 2\Phi_1(t)$ і напрямок осі BS_V локальної системи координат $BS_V S_q$ (рис. 1) співпадає з напрямком вектора навантаження $\mathbf{S}(t)$. Умову монотонності $\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$ з урахуванням формул (3) і (18) можна подати ще так:

$$\beta \leq \beta_0, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{2\sqrt{2}\pi\tau_s}{S \cdot [\pi\mathbf{K}(\cos 2\alpha) + 2\mathbf{K}(\sin 2\alpha) \ln C] \sin 4\alpha}, \quad (20)$$

де β – кут між напрямками векторів \mathbf{S} і $\dot{\mathbf{S}}$. Отже, монотонна деформація має місце, коли в кожній точці траєкторії навантаження за межами пружності кут β не перевершує свого максимального значення β_0 . Якщо $2\alpha \rightarrow 0$ (початок пластичної деформації), то $\beta_0 \rightarrow \pi/2$, тобто залежно від величини відношення S/τ_s кут β_0 може змінюватися у досить широких межах ($0 < \beta_0 < \pi/2$).

3. Задача про кутову точку траєкторії навантаження. Нехай елемент тіла зазнав навантаження, яке характеризується деякою траєкторією OAB (рис. 1). Із точки B надамо елементу тіла довільне мале довантаження $d\mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}} dt$ і визначимо приріст вектора пластичної деформації $d\mathbf{\Gamma}^{(p)} = \dot{\mathbf{\Gamma}}^{(p)} dt$, тобто розглянемо задачу про побудову визначальних рівнянь $d\sigma_{mn} \sim d\varepsilon_{mn}$ у малому околі кутової точки траєкторії навантаження. Вони дають можливість ставити й розв'язувати задачі про стійкість елементів конструкцій за межами пружності. Поки що процес деформування і зміну функцій $\varphi'_t(\theta, t)$,

$\alpha_{1,2}(t)$ до кутової точки $B (t = t_B - 0)$ будемо вважати відомими. Зокрема, за умови монотонності цей процес розглянуто у п. 2.

Залежно від геометрії траєкторії навантаження до кутової точки і напрямку вектора довантаження $d\mathbf{S}$ доцільно виділити і розглянути три окремі випадки. У першому будемо вважати, що довантаження $d\mathbf{S}$ зумовлює розширення меж напрямків ковзання. Оскільки нові ковзання не відбуваються без додаткових зусиль і нескінченно малі прирости напружень призводять до нескінченно малого розширення меж напрямків ковзання, то при переході через кутову точку B траєкторії навантаження функції $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ змінюються неперервно і їх граничні значення $\alpha_{1,2}(t_B - 0)$ і $\alpha_{1,2}(t_B + 0)$ співпадають. При відомих $\alpha_{1,2}(t_B + 0) = \alpha_{1,2}(t_B - 0)$ компоненти приросту плоскопластичної деформації у малому околі точки зламу траєкторії визначаються за формулами (11)–(13) за умов $2\alpha = \alpha_2(t_B - 0) + \alpha_1(t_B - 0)$, $2\chi = \alpha_2(t_B - 0) - \alpha_1(t_B - 0)$. Тривіальним до розглянутого вище є випадок, коли процес навантаження по траєкторіях з кутовими точками здійснюється без порушення умов монотонності (20). При цьому в (11) потрібно покласти $2(\chi + \Phi_0) \equiv 2\Phi_1(t)$ і функції $\alpha_{1,2}(t)$ визначити за формулами (18).

Розглянемо тепер другий можливий випадок, коли значення $\alpha_{1,2}(t_B - 0)$ і $\alpha_{1,2}(t_B + 0)$ не співпадають, тобто, коли приріст $d\mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}} dt$ зумовлює часткове гальмування систем ковзання. Без обмеження загальності будемо вважати, що в процесі довантаження $d\mathbf{S}$ виконується умова $\dot{\Phi}_1(t) > 0$, тобто поворот вектора навантаження $\mathbf{S}(t)$ здійснюється проти годинникової стрілки і при переході через кутову точку траєкторії навантаження від'ємний приріст стрибкоподібно одержує функція $\alpha_1(t)$: $\alpha_1(t_B + 0) < \alpha_1(t_B - 0)$. Друга межа $\alpha_2(t)$ множини напрямків ковзання змінюється неперервно і її граничні значення $\alpha_2(t_B \pm 0)$ співпадають. Таким чином, у другому випадку задача встановлення зв'язку $d\Gamma^{(p)} \sim d\mathbf{S}$ у малому околі кутової точки траєкторії навантаження звелася до визначення величини $\alpha_1(t_B + 0)$. Для цього можна використати доведену в роботах [5, 6] умову

$$\phi'_t(\theta, t)|_{\theta=-\alpha_1(t)} = 0, \quad t \geq t_B + 0, \quad \alpha_1(t) < \alpha_1(t_B - 0). \quad (21)$$

Відповідно до неї на рис. 2 показано якісну картину зміни інтенсивності зсуву $\phi(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ в малому околі точки зламу траєкторії навантаження. Лінія 1 відповідає моменту часу $t = t_B - 0$, а лінія 2 – значенню $t \geq t_B + 0$. На межі $\theta = -\alpha_1(t)$ змикання графіків функцій $\phi(\theta, t_B - 0)$ і $\phi(\theta, t), t \geq t_B + 0$, здійснюється плавно, як показано на рис. 2, і аналітично визначено умовою (21). З урахуванням формул (9) і (10) зазначена умова дає

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{\mathbf{E}(\cos 2\alpha)}{\mathbf{K}(\cos 2\alpha)} - \sin^2 2\alpha \right] \cos [9 - 2(\chi + \Phi_0)] - \sin 4\alpha \sin [9 - 2(\chi + \Phi_0)] = \\ & = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mathbf{E}(\sin 2\alpha) - \mathbf{K}(\sin 2\alpha)}{\mathbf{K}(\cos 2\alpha)} \ln C \end{aligned} \quad (22)$$

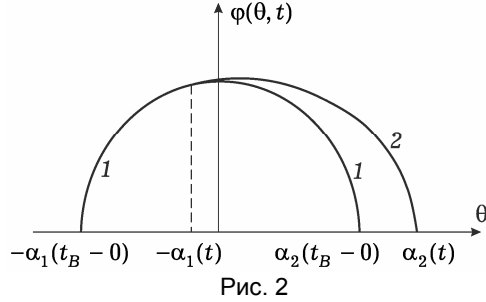


Рис. 2

або в іншій формі

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{2} \vartheta(t) + \alpha - \Phi_0 - \arccos \frac{mp + n\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}, \quad (23)$$

де

$$m = 2 \left[\frac{\mathbf{E}(\cos 2\alpha)}{\mathbf{K}(\cos 2\alpha)} - \sin^2 2\alpha \right], \quad n = \sin 4\alpha,$$

$$p = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mathbf{E}(\sin 2\alpha) - \mathbf{K}(\sin 2\alpha)}{\mathbf{K}(\cos 2\alpha)} \ln C, \quad \chi = \alpha_2 - \alpha. \quad (24)$$

За умови (22) функція інтенсивності ковзання $\varphi'_t(\theta, t)$, означена рівнянням (10), визначається формулами

$$\varphi'_t(\theta, t) = \frac{\Psi[\theta - \chi, t]}{\prod \varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*},$$

$$\Psi[\eta, t] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin[\vartheta - 2(\chi + \Phi_0)] \frac{\sin 4\eta + \sin 4\alpha}{\sqrt{2 \cos 4\eta - 2 \cos 4\alpha}}. \quad (25)$$

При цьому для компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації на основі (4) одержуємо

$$\Pi \dot{\Gamma}_1^{(p)} = B_{11}^* \cos 2(\chi + \Phi_0) - B_{12}^* \sin 2(\chi + \Phi_0),$$

$$\Pi \dot{\Gamma}_3^{(p)} = B_{11}^* \sin 2(\chi + \Phi_0) + B_{12}^* \cos 2(\chi + \Phi_0), \quad (26)$$

або в локальній системі координат $BS_v S_q$:

$$\Pi \dot{\Gamma}_v^{(p)} = B_{11}^* \dot{S}_v, \quad \Pi \dot{\Gamma}_q^{(p)} = B_{12}^* \dot{S}_q. \quad (27)$$

Тут

$$B_{11}^* = \frac{\pi}{8} \sin^2 2\alpha \cos \beta, \quad B_{12}^* = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \sin \beta, \quad (28)$$

і $\beta = \vartheta - 2(\chi + \Phi_0)$ – кут між віссю S_v і вектором $\dot{\mathbf{S}}$ дотичної до траєкторії навантаження (рис. 1).

Щоб одержати результат у малому околі кутової точки B траєкторії навантаження, у формулах (22)–(28) необхідно покласти

$$2\alpha = 2\alpha^+ \equiv \alpha_2(t_B + 0) + \alpha_1(t_B + 0),$$

$$2\chi = 2\chi^+ \equiv \alpha_2(t_B + 0) - \alpha_1(t_B + 0),$$

$$\vartheta = \vartheta^+ \equiv \vartheta(t_B + 0), \quad \beta = \beta^* \equiv \vartheta^+ - 2(\chi^+ + \Phi_0). \quad (29)$$

Граничне значення кута

$$\beta = \beta_0^* \equiv \vartheta(t_B + 0) - 2[\chi(t_B + 0) + \Phi_0], \quad (30)$$

при якому довантаження $d\mathbf{S}$ із кутової точки траєкторії не приводить до часткового гальмування систем ковзання, можна одержати із рівняння (22) при $2\alpha = 2\alpha(t_B \pm 0) \equiv \alpha_2(t_B - 0) + \alpha_1(t_B - 0)$. Величина кута β_0^* визначає межу між двома розглянутими вище випадками можливої ситуації в малому околі точки зламу траєкторії, якщо до цієї точки процеси навантаження співпадали.

У третьому можливому випадку, коли внаслідок довантаження $d\mathbf{S}$ із точки зламу траєкторії межа $-\alpha_1(t_B + 0)$ змикається з межею $\alpha_2(t_B - 0)$, тобто, коли має місце повне гальмування систем ковзання, відбувається розвантаження за пружним законом ($d\Gamma^{(p)} = 0$). Відповідне значення кута $\beta = \beta_*$ одержимо, якщо в рівнянні (22) перейдемо до границі $2\alpha^+ \equiv \alpha_2(t_B + 0) + \alpha_1(t_B - 0) \rightarrow 0$. У результаті маємо

$$\beta_* = \frac{\pi}{2} + 2\alpha_2(t_B - 0). \quad (31)$$

Наведеним вище для малого околу кутової точки результатам, одержаним за умови $\dot{\Phi}(t) > 0$ і доповненим для $\dot{\Phi}(t) < 0$, з використанням постулату ізотропії Ільюшина можна надати таку геометричну інтерпретацію (рис. 3).

Якщо вектор довантаження $d\mathbf{S}$ знаходиться в симетричному відносно осі BS_V круговому конусі I з кутом при вершині $2\beta_0^*$, то пластичне деформування у процесі довантаження $d\mathbf{S}$ здійснюється без часткового гальмування систем ковзання, тобто $\alpha_{1,2}(t_B + 0) = \alpha_{1,2}(t_B - 0)$. У цьому разі зв'язок між приростами напружень $d\sigma_{mn}$ і деформації $d\varepsilon_{mn}$ не залежить від напрямку (кут β) вектора довантаження $d\mathbf{S}$ і, отже, є диференціально-лінійним. Конус II відповідає повному гальмуванню систем ковзання і процес деформування здійснюється за пружним законом ($d\Gamma^{(p)} = 0$).

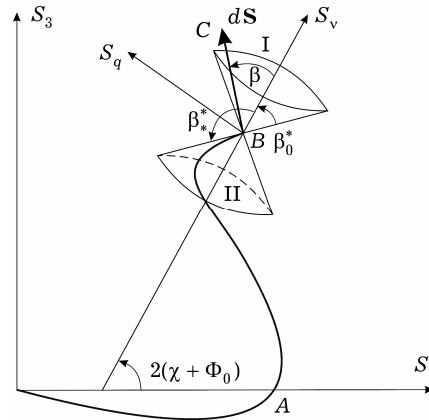


Рис. 3

Множина напрямків $d\mathbf{S}$ в області між конусами I і II, для якої $\beta \in (\beta_0^*, \beta_*)$ і $\alpha_{1,2}(t_B + 0) \neq \alpha_{1,2}(t_B - 0)$, супроводжується частковим гальмуванням систем ковзання, зв'язок $d\sigma_{mn} \sim d\varepsilon_{mn}$ істотним чином залежить від напрямку довантаження $d\mathbf{S}$ і, отже, є диференціально-нелінійним.

4. Кусково-гладкі траєкторії навантаження. Повернемося до рис. 1 і розглянемо дволанкову траєкторію навантаження $OABC$ з кутовою точкою A . Нехай до точки A має місце описана вище монотонна деформація ($\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0, t < t_A - 0$), а після зламу – немонотонна, яка супроводжується частковим гальмуванням систем ковзання. Якщо гальмування здійснюється з боку межі $-\alpha_1(t)$, то при переході через кутову точку траєкторії $OABC$ (рис. 1) функція $\alpha_1(t)$ терпить розрив першого роду і на цій межі відповідно до (2) виконується умова (22). Вона має місце, коли $\alpha_1(t_A + 0) < \alpha_1(t_A - 0)$, $\dot{\alpha}_1(t) < 0, t \geq t_A + 0$, і є одним із рівнянь для визначення меж напрямків зсуву $\mp \alpha_{1,2}(t)$ при немонотонній деформації [5, 6]. Щоб одержати друге рівняння, розглянемо на цей раз співвідношення (2) в околі межі $\theta = \alpha_2(t)$ і запишемо його так:

$$\begin{aligned} R_m[\theta_0, t] &\equiv R_m[\theta_0, t_A] + \int_{t_A - \alpha_1(\xi)}^t \int_{\alpha_2(\xi)} \ln(C \cdot \operatorname{ctg}|\theta_0 - \theta|) \psi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \end{aligned} \quad (32)$$

Тут функція опору зсуву $R_m[\theta_0, t_A]$ для $\theta_0 \geq \alpha_2(t_A)$ визначається формулою [6]

$$R_m[\theta_0, t_A] = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t_A) \{ \cos 2\eta_0 - (1 - k^2) [\mathbf{K}(k) - \mathbf{K}(\gamma, k)] + \mathbf{E}(k) - \mathbf{E}(\gamma, k) \},$$

$$\eta_0 \in \left[\alpha(t_A - 0), \frac{\pi}{2} - \alpha(t_A - 0) \right], \quad (33)$$

де

$$\eta_0 = \theta_0 - \Phi(t_A), \quad 2\alpha(t_A - 0) = \alpha_2(t_A - 0) + \alpha_1(t_A - 0),$$

$$k = \cos 2\alpha(t_A - 0), \quad \gamma = \arcsin [\cos 2\eta_0 / \cos 2(\alpha_A - 0)].$$

Розглянемо рівність (32) для моментів часу $t = t_k > t_A + 0$ і $t = t_k + \Delta t_k$ при $\theta_0 = \alpha_2(t_k)$ та $\theta_0 = \alpha_2(t_k + \Delta t_k)$ відповідно:

$$R_m[\alpha_2(t_k), t_A] + \int_{t_A - \alpha_1(\xi)}^{t_k} \int_{\alpha_2(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \ln(C \cdot \operatorname{ctg} |\alpha_2(t) - \theta|) \psi(\theta, \xi) d\theta d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\alpha_2(t) - \Phi(t)], \quad (34)$$

$$R_m[\alpha_2(t_k + \Delta t_k), t_A] +$$

$$+ \int_{t_A - \alpha_1(\xi)}^{t_k + \Delta t_k} \int_{\alpha_2(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \ln(C \cdot \operatorname{ctg} |\alpha_2(t_k + \Delta t_k) - \theta|) \psi(\theta, \xi) d\theta d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\alpha_2(t_k + \Delta t_k) - \Phi(t_k + \Delta t_k)]. \quad (35)$$

Подвійний інтеграл в (35) розіб'ємо на суму двох за границями інтегрування $[t_A, t_k]$ і $[t_k, t_k + \Delta t_k]$ і розглянемо різницю

$$\Delta R_m = R_m[\alpha_2(t_k + \Delta t_k), t_k + \Delta t_k] - R_m[\alpha_2(t_k), t_k].$$

З точністю до малих величин Δt_k , $\Delta \alpha_2^{(k)}$, $\Delta \alpha^{(k)}$ першого порядку маємо

$$\alpha_2(t_k + \Delta t_k) \approx \alpha_2(t_k) + \Delta \alpha_2^{(k)},$$

$$\alpha(t_k + \Delta t_k) \approx \alpha(t_k) + \Delta \alpha^{(k)},$$

$$\Delta \alpha^{(k)} = \dot{\alpha}^{(k)} \Delta t_k, \quad \Delta \alpha_2^{(k)} = \dot{\alpha}_2^{(k)} \Delta t_k, \quad t \geq t_B + 0.$$

Якщо тепер різницю ΔR_m розвинути в ряд за малими Δt_k , $\Delta \alpha^{(k)}$, $\Delta \alpha_2^{(k)}$, то із вказаною точністю одержимо

$$P_1(\alpha^{(k)}) \Delta \alpha^{(k)} + P_2(\alpha^{(k)}, \alpha_2^{(k)}) \Delta \alpha_2^{(k)} = P_3(\alpha_2^{(k)}) \Delta t_k. \quad (36)$$

Тут позначено

$$P_1 = S(t_A) \left[\sqrt{2} \sin 2\alpha^{(k)} + \sqrt{\cos 4\alpha_A - \cos 4\alpha^{(k)}} \right],$$

$$P_2 = -\sqrt{2}\pi [\cos 2\alpha^{(k)} q_1 - \sin 2\alpha^{(k)} q_2 + q_3 - q_4],$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos [9 - 2\alpha_2^{(k)} + \Phi_0], \quad (37)$$

$$q_1 = \int_{t_A}^{t_k} \sin \{ \vartheta(\xi) - 2[\alpha_2(\xi) - \alpha(\xi) + \Phi_0] \} d\xi,$$

$$q_2 = \int_{t_A}^{t_k} \cos \{ \vartheta(\xi) - 2[\alpha_2(\xi) - \alpha(\xi) + \Phi_0] \} d\xi,$$

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{t_A}^{t_k} \cos \{ \vartheta(\xi) - 2[\alpha_2(\xi) - \alpha(\xi) + \Phi_0] \} \sqrt{\cos 4\alpha(\xi) - \cos 4\alpha^{(k)}} d\xi,$$

$$q_4 = \sqrt{2} \int_{t_A}^{t_k} \sin \{ \vartheta(\xi) - 2[\alpha_2(\xi) - \alpha(\xi) + \Phi_0] \} \frac{\sin 4\alpha^{(k)} + \sin 4\alpha(\xi)}{\sqrt{\cos 4\alpha(\xi) - \cos 4\alpha^{(k)}}} d\xi,$$

$$\alpha_A = \alpha(t_A - 0), \quad \alpha^{(k)} = \alpha(t_k), \quad \alpha_2^{(k)} = \alpha_2(t_k), \quad t_k \geq t_A + 0. \quad (38)$$

Система рівнянь (23), (36) разом з початковими умовами (29) у вигляді $\alpha_1^0 = \alpha_1(t_A + 0)$, $\alpha_2^0 = \alpha_2(t_A + 0)$, які одержуємо в результаті розв'язування задачі в малому околі кутової точки траєкторії навантаження, достатня для визначення меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$ і $\alpha_2(t)$ у довільний момент часу $t > t_A + 0$ немонотонної деформації. Спрямувавши $\Delta t \rightarrow 0$, рівняння (36) з урахуванням (23) можна записати в такій диференціальній формі:

$$\dot{\alpha} = Q(\alpha, \alpha_2), \quad Q = \frac{2P_3 - P_2 \dot{\vartheta}}{2(P_1 + P_2) - P_2 \frac{du(\alpha)}{d\alpha}}, \quad (39)$$

де

$$u(\alpha) = \arccos [mp + n\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}] / (m^2 + n^2)$$

і $\alpha_2(t)$ визначається формулою (23). Індекс (k) при величинах $\alpha_2^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$, $\Delta\alpha_2^{(k)}$, $\Delta\alpha^{(k)}$, ϑ_k , $\dot{\vartheta}_k$, t_k , Δt_k пропущено. Отже, задачу про визначення меж напрямків зсуву $\mp \alpha_{1,2}(t)$ при немонотонній деформації зведено до задачі Коші для диференціального рівняння (39) з початковими умовами (29) у вигляді

$$\alpha^0 = \alpha(t_A + 0), \quad \alpha_2^0 = \alpha_2(t_A + 0).$$

Числову реалізацію її розв'язання розглянуто на прикладі дволанкової траєкторії навантаження OAB з кутом зламу $\vartheta = 55^\circ$ і довжиною першої ланки $OA = 1.2$ ($s_1 = S_1/(\sqrt{2}\tau_s)$, $s_3 = S_3/(\sqrt{2}\tau_s)$, $s = s_A + s_{AB}$) (рис. 4). Лінія oab – графік зміни функції $\alpha_2(t)$, а крива oaa_1b_1 – графік функції $\alpha_1(t)$, яка в точці A зламу траєкторії навантаження терпить розрив першого роду.

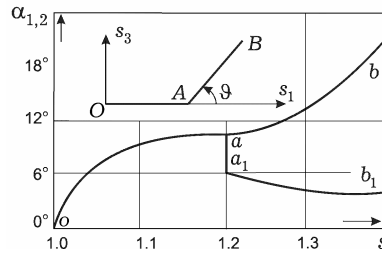


Рис. 4

Зауважимо, що одержані вище для плоскопластичної деформації результати на основі постулату ізотропії Ільюшина [1] узагальнюються на довільні плоскі траєкторії навантаження, як завгодно розміщені в п'ятивимірному дев'яторному просторі напружень.

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. *Крейн М. Г.* Об одном методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго порядка // Докл. АН СССР. – 1955. – **100**, № 3. – С. 413–416.
3. *Леонов М. Я., Швайко Н. Ю.* Сложная плоская деформация // Докл. АН СССР. – 1964. – **159**, № 2. – С. 1007–1010.
4. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуплоскости // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 4. – С. 153–157.
5. *Швайко Н. Ю.* К теории скольжения с гладкими и сингулярными поверхностями нагружения // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 129–137.
6. *Швайко Н. Ю.* Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1989. – 176 с.
7. *Batdorf S. B., Budiansky B.* A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA Techn. Notes. – April, 1949. – No. 1871.
Те саме: *Батдорф С. Б., Будянски Б.* Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: Сб. пер. иностр. статей. – 1962. – № 1. – С. 135–155.

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Предложена модификация методов решения системы интегральных уравнений [3, 5], описывающих развитие плоскопластической деформации при простом и сложном процессах нагружения. Характерная особенность этих уравнений состоит в том, что искомые функции содержатся как под знаком интегралов, так и в пределах интегрирования. Построены аналитические решения при монотонной деформации и в малой окрестности точки излома траектории нагружения. Для произвольных кусочно-гладких траекторий задача сведена к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка с известными начальными условиями. Полученные результаты по сравнению с полученными в [5, 6] упрощают задачу построения определяющих уравнений связи $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\epsilon}_{mn}$ и их использование в прикладных задачах теории пластичности.

ON METHODS OF SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS OF PLASTICITY THEORY, BASED ON SLIDING CONCEPT

A modification of the methods for solving a system of integral equations [3, 5] is proposed. These equations describe the plane plastic deformation development process at simple and complex loading. The peculiarity of these equations consists in the presence of unknown functions both under the integral sign and in the integration limits. Analytical solutions are presented for monotone deformation and at an angular point of the loading trajectory. For an arbitrary piecewise-smooth trajectory the problem is reduced to the initial-value problem for a first-order differential equation with known initial conditions. The obtained results simplify the construction of constitutive equations $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\epsilon}_{mn}$ and their application in the problems of plasticity theory in comparison with [5, 6].

Дніпропетр. нац. ун-т
ім О. Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
09.06.09