УДК 539.3

Г. С. Кіт, О. П. Сушко

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА З ТЕПЛОАКТИВНИМ АБО ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНИМ ДИСКОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ (ТРІЩИНОЮ)

Наведено розв'язки осесиметричних задач стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з тонким теплоактивним дисковим включенням (на якому задана температура або тепловий потік), а також теплоізольованим включенням. Задачі теплопровідності зведено до інтегральних рівнянь і одержано точні розв'язки, якщо їх праві частини є поліноми довільного степеня. Визначено компоненти тензора напружень і вектора переміщень, а у випадку тріщин – коефіцієнти інтенсивності напружень.

Наявність у тілі концентраторів типу тонких теплоактивних включень, на яких задана температура або теплові потоки, зумовлює локальне зростання в їх околі температурних градієнтів і напружень. Список робіт стосовно дослідження напружено-деформованого стану тіл з дисковими теплоактивними включеннями та тріщинами наведено у монографії [3] і праці [4]. Важливим є також вивчення розподілу температури та напружень в околі теплоізольованих включень і тріщин. У цьому випадку таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту порушується, воно починає впливати на теплові та механічні поля у тілі, його поверхні прогріваються нерівномірно, внаслідок чого виникають дотичні напруження.

Плоским задачам стаціонарної теплопровідності та термопружності тіл з теплоізольованими тріщинами присвячено низку робіт, огляд яких наведено у монографіях [1, 10]. Значно менше розв'язано задач у випадку тривимірних тіл. Це можна пояснити відсутністю єдиного загального методу розв'язування мішаних тривимірних задач теплопровідності та термопружності, такого як метод Колосова – Мусхелішвілі в плоскій задачі теорії пружності.

Розв'язуванню задач теплопровідності та термопружності для тіл з круговими теплоактивними або теплоізольованими тріщинами в осесиметричній постановці з використанням інтегрального перетворення Ганкеля і дуальних інтегральних рівнянь присвячені роботи, огляд яких наведено в працях [3, 4]. У вказаних працях задачі теплопровідності зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь на круговій області з полярним та гіперсингулярними ядрами. Для осесиметричних задач інтегральні рівняння одержано із загального вигляду у працях [2, 3]. Загальний метод розв'язування просторових задач для безмежного тіла з плоскими тріщинами, на поверхнях яких задані різні теплові та силові навантаження, наведено у монографії [3]. З використанням гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів такі задачі зведені до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: у випадку задач теплопровідності – це густини джерел і диполів тепла на місці розташування тріщин, а у випадку задачі термопружності – це стрибки зміщень протилежних поверхонь тріщин.

Ця робота присвячена визначенню температурного поля і напруженого стану тіла з теплоактивним чи теплоізольованим дисковим включенням або тріщиною в осесиметричній постановці.

Визначення температурного поля. Розглянемо пружне ізотропне тіло з тонким дисковим включенням радіуса a: теплоактивним, на якому задана температура чи тепловий потік, або теплоізольованим. Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S, який є серединною площиною включення, спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до області S.

Теплоактивне включення. Стаціонарне температурне поле, зумовлене тепловиділенням, подамо через ньютонівський потенціал простого шару з густиною $w(x_1, x_2)$, який описує потужність теплових джерел в області S [4]:

$$T_1(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S, \qquad x^* = (x_1, x_2, x_3), \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (1)$$

$$R(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності.

Задаючи різні вирази для функції $w(\xi)$, із подання (1) знаходимо значення температури в довільній точці тіла. Зокрема, розподіл температури в площині області S визначається за формулою (1) при $x_3 = 0$:

$$T_1(x) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S, \qquad x = x^*(x_1, x_2, 0). \quad (3)$$

Якщо в області тепловиділення S відома температура $T_1(x)$, то інтегральне рівняння (3) служить для визначення потужності відповідних джерел тепла.

В осесиметричному випадку, коли густина теплових джерел $w(\xi)$ не залежить від кутової координати φ, інтеграл із виразу (1) вигідно подати у вигляді [3]

$$\iint_S \frac{w(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho w(\rho)}{R^*(\rho, r, \varphi, \theta, x_3)} d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\eta|x_3|} d\eta \int_0^a \rho w(\rho)\, d\rho \int_0^{2\pi} J_0(\eta R)\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \int_0^a \rho w(\rho) J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|} d\rho\, d\eta, \quad (4)$$

де $R^* = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + x_3^2}$; $R = R^*\big|_{x_3=0}$; $J_0(u)$ – функція Бесселя.

Із урахуванням подання (4) вираз для температури $T_1(x^*)$ та інтегральне рівняння (3) запишемо у вигляді

$$T_1(r, x_3) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|} d\eta, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty W(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta = T_1(r), \quad (6)$$

$$W(\eta) = \int_0^a \rho w(\rho) J_0(\eta\rho)\, d\rho. \quad (7)$$

Інтегральні рівняння типу (3) і (6) мають у загальному випадку необмежений розв'язок на контурі області S [13], який для рівняння (6) можна записати у вигляді

$$w(\rho) = \frac{\psi(\rho)}{\sqrt{L(\rho)}}, \qquad L(\rho) = a^2 - \rho^2, \quad (8)$$

де $\psi(\rho)$ – обмежена функція. При певному значенні функції $T_1(r)$ розв'язок може бути і обмеженим [4].

Якщо права частина рівняння (6) є поліномом степеня $2n$, то $\psi(\rho)$ також є поліномом такого ж степеня і тоді можна одержати точний розв'язок цього рівняння. Нехай

$$T_1(r) = \sum_{k=0}^{n} t_k r^{2k}, \qquad w(\rho) = \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \sum_{k=0}^{n} c_k \rho^{2k}. \tag{9}$$

Підставимо вираз (8) для $w(\rho)$ у формулу (7) і обчислимо інтеграл

$$W(\eta) = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_0^a \frac{\rho^{2k+1}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} J_0(\eta\rho)\, d\rho =$$

$$= \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} c_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2 (k-i)!} \eta^{i-k-1/2} J_{i+k+1/2}(\eta a). \tag{10}$$

Знайдемо значення інтегральної частини рівняння (6) [9], використавши подання (10):

$$\int_0^\infty W(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} c_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i\, 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2 (k-i)!} \int_0^\infty \eta^{i-k-1/2} J_{i+k+1/2}(\eta a) J_0(\eta r)\, d\eta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k a^{2k} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (2i-1)!!}{2^i (i!)^2 (k-i)!} F\left(i+\frac{1}{2}, -k, 1, \frac{r^2}{a^2}\right), & r \le a, \\ \dfrac{a}{r} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{2^{k-i} a^{2k+2i} ((2i-1)!!)^2}{(i!)^2 (k-i)!\, r^{2i} (2k+2i+1)!!} F\left(i+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, i+k+\frac{3}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right), & r > a, \end{cases} \tag{11}$$

де $F(a,b,c,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m\, m!} z^m$ – гіпергеометрична функція;

$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ – символ Похгамера.

Після врахування (9) та (11) рівняння (6) набуде вигляду

$$\frac{\pi}{4\lambda} \sum_{k=0}^{n} c_k a^{2k} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (2i-1)!!}{2^i (i!)^2 (k-i)!} F\left(i+\frac{1}{2}, -k, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} t_k r^{2k}. \tag{12}$$

де $(2i-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях r^{2k}, отримаємо систему алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів c_k, через які за формулою (9) знаходимо потужність теплових джерел в області S.

Врахувавши вирази (11) і (5), температуру поза областю S у площині включення $x_3 = 0$ знаходимо так:

$$T_1(r) = \frac{a}{2\lambda r} \sum_{k=0}^{n} c_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{2^{k-i} a^{2k+2i} ((2i-1)!!)^2}{(i!)^2 (k-i)!\, r^{2i} (2k+2i+1)!!} \times$$

$$\times F\left(i+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, i+k+\frac{3}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right). \tag{13}$$

Приклад 1. Нехай в області S задана температура

$$T_1(r) = \frac{\pi}{4\lambda}\left(t_0 + t_1 r^2 + t_2 r^4\right), \tag{14}$$

де t_k – відомі сталі. Для визначення потужності теплових джерел рівняння (12) запишемо так:

$$c_0 F\left(\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) + c_1 a^2 \left[F\left(\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{3}{2}, -1, 1, \frac{r^2}{a^2}\right)\right] +$$

$$+ c_2 a^4 \left[F\left(\frac{1}{2}, -2, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) - F\left(\frac{3}{2}, -2, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} F\left(\frac{5}{2}, -2, 1, \frac{r^2}{a^2}\right)\right] = t_0 + t_1 r^2 + t_2 r^4 .$$

Розкривши гіпергеометричні функції, маємо

$$c_0 + \frac{c_1}{2}\left(a^2 + \frac{r^2}{2}\right) + \frac{c_2}{8}\left(3a^4 + a^2 r^2 + \frac{9r^4}{8}\right) = t_0 + t_1 r^2 + t_2 r^4 .$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях r, маємо систему алгебричних рівнянь для знаходження c_k, розв'язавши яку одержимо

$$c_0 = t_0 - 2a^2 t_1 + \frac{8}{9} a^4 t_2, \qquad c_1 = 4\left(t_1 + \frac{8}{9} a^2 t_2\right), \qquad c_2 = \frac{64}{9} t_2 . \tag{15}$$

Потужність теплових джерел в області S запишемо так:

$$w(\rho) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\left[t_0 - 2a^2 t_1 + \frac{8}{9} a^4 t_2 + 4\left(t_1 + \frac{8}{9} a^2 t_2\right)\rho^2 + \frac{64}{9} t_2 \rho^4\right].$$

Приклад 2. Якщо в області S відома потужність теплових джерел

$$w(\rho) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} (c_0 + c_1 \rho^2 + c_2 \rho^4) , \tag{16}$$

де c_k – відомі сталі, то температуру в цій області знаходимо за формулою (14), в якій

$$t_0 = c_0 - \frac{a^2}{2} c_1 + \frac{3a^4}{8} c_2, \qquad t_1 = \frac{1}{4}\left(c_1 + \frac{a^2}{2} c_2\right), \qquad t_2 = \frac{9}{64} c_2 . \tag{17}$$

Температуру поза областю S визначаємо за формулою (13):

$$T_1(r) = \frac{1}{2\lambda}\left\{c_0 \frac{a}{r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right) + c_1 a^2 \left[\frac{2a}{3r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right) +\right.\right.$$

$$\left. + \frac{a^3}{15r^3} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right)\right] + 4c_2 a^4 \left[\frac{2a}{15r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right) +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2a^3}{105r^3} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{a^5}{420r^5} F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right)\right]\right\}, \quad r > a .$$

Визначивши гіпергеометричні функції, одержимо

$$T_1(r) = \frac{1}{2\lambda}\left[c_0 \arcsin\frac{a}{r} + c_1 a^2 \left(\frac{2}{3}\frac{a}{r} + \frac{2}{15}\frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{140}\frac{a^5}{r^5}\right) +\right.$$

$$\left. + 4c_2 a^4 \left(\frac{2}{15}\frac{a}{r} + \frac{1}{35}\frac{a^3}{r^3} + \frac{1}{70}\frac{a^5}{r^5}\right)\right], \qquad r > a . \tag{18}$$

Зауважимо, що формула (18) вірна і для *прикладу 1*, якщо в області S задана температура (14). Тоді c_k знаходимо за формулою (15).

Теплоізольоване включення. Температурне поле у тілі з включенням подамо у вигляді

$$T(x^*) = T_0(x^*) + T_2(x^*) , \tag{19}$$

де $T_0(x^*)$ – температурне поле в тілі без включення; $T_2(x^*)$ – температурне поле, зумовлене збуренням температури $T_0(x^*)$ включенням. Граничну умову на включенні при $x_3 = 0$ з використанням (19) запишемо так:

$$\frac{\partial T(x^*)}{\partial x_3} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial T_2(x^*)}{\partial x_3} = -\frac{\partial T_0(x^*)}{\partial x_3}, \quad x^* = x^*(x_1, x_2, x_3). \tag{20}$$

Температуру $T_2(x^*)$ будемо шукати у вигляді гармонічного потенціалу подвійного шару [5, 6]

$$T_2(x^*) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x^*,\xi)}\,d_\xi S = \frac{x_3}{4\pi\lambda}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*,\xi)}\,d_\xi S\,, \tag{21}$$

де $R(x^*, \xi)$ задається виразом (2), а густина розподіленого по області S подвійного шару $\gamma(\xi)$ виражається через граничні значення температури на поверхнях включення співвідношенням

$$\gamma(x) = \lambda\left[T_2^+(x) - T_2^-(x)\right], \qquad x \in S\,. \tag{22}$$

Для визначення $\gamma(\xi)$ знайдемо похідну по нормалі до області S від $T_2(x^*)$ із виразу (21) [5] і підставимо в умову (20), помноживши обидві її сторони на $4/\pi$. Тоді одержимо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x,\xi)}\,d_\xi S = q(x), \qquad q(x) = -\frac{4\lambda}{\pi}\left.\frac{\partial T_0(x^*)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}. \tag{23}$$

Гіперсингулярне інтегральне рівняння (23) служить також для визначення стрибка переміщень $\gamma(x)$ поверхонь тріщини при заданому на ній тиску $q(x)$ [3].

В осесиметричному випадку, коли густина теплових диполів не залежить від кутової координати, вираз для температури (21) та інтегральне рівняння (23) можна записати в циліндричній системі координат (r, x_3), використавши інтеграл (4) при $w(\rho) = 1$, тобто

$$\iint_S \frac{d_\xi S}{R(x^*,\xi)} = 2\pi\int_0^\infty\int_0^a \rho J_0(\eta\rho)J_0(\eta r)e^{-\eta|x_3|}\,d\rho\,d\eta\,. \tag{24}$$

Якщо потужність теплових диполів в області S є $\gamma(\rho)$, то, підставивши (24) у вираз (21), маємо

$$T_2(r, x_3) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}\iint_S \frac{\gamma(\rho)}{R(x^*,\xi)}\,dS = \frac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda}\int_0^\infty \eta H(\eta)J_0(\eta r)e^{-\eta|x_3|}\,d\eta\,, \tag{25}$$

$$H(\eta) = \int_0^a \rho\gamma(\rho)J_0(\eta\rho)\,d\rho\,. \tag{26}$$

Знайдемо похідну по нормалі x_3 до області S від $T_2(r, x_3)$ і підставимо в граничну умову (20). Тоді інтегральне рівняння (23) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \eta^2 H(\eta)J_0(\eta r)\,d\eta = q(r), \qquad q(r) = -\lambda\left.\frac{\partial T_0(r, x_3)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}. \tag{27}$$

Рівняння (27) має обмежений на контурі області S розв’язок [3], і якщо його права частина є поліномом степеня $2n$, то можна одержати точний розв’язок цього рівняння. Нехай

$$q(r) = \sum_{k=0}^n q_k r^{2k}, \qquad \gamma(\rho) = \sqrt{a^2 - \rho^2}\sum_{k=0}^n b_k \rho^{2k}. \tag{28}$$

Підставимо вираз для $\gamma(\rho)$ у формулу (26) і обчислимо інтеграл [9]

$$H(\eta) = \sum_{k=0}^n b_k \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho^{2k+1}J_0(\eta\rho)\,d\rho =$$

$$= a\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} b_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2 (k-i)!} \eta^{i-k-3/2} J_{i+k+3/2}(\eta a). \quad (29)$$

Враховуючи (29), запишемо вираз для температури (25) [9]

$$T_2(r) = \frac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda}\sqrt{\frac{a^3\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} b_k k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^{k-i} k!\, a^{i+k}}{(i!)^2 (k-i)!} \int_0^\infty \eta^{i-k-1/2} J_{i+k+3/2}(\eta a) J_0(\eta r)\, d\eta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda} a \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{a^{2k}(k!)^2}{(3/2)_k} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} F\left(i+1, -k-\frac{1}{2}, 1, \frac{r^2}{a^2}\right), & r \le a, \\ \dfrac{\operatorname{sgn} x_3}{4\lambda} \dfrac{a^3\sqrt{\pi}}{r^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i a^{2k+2i}}{(i!)^2 (k-i)!\, r^{2i}} \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(-i)\Gamma(i+k+5/2)} \times & \\ \qquad \times F\left(i+1, i+1, i+k+\frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right), & r > a, \end{cases} \quad (30)$$

де $\Gamma(\cdot)$ – ґамма-функція.

З формули (30) видно, що при $r > a$ температура дорівнює нулеві, оскільки $\Gamma(-i) = \infty$. Це випливає також із властивостей потенціалу подвійного шару.

Зауважимо, що згідно зі співвідношеннями (22) і (28)

$$T_2(\rho) = \frac{\gamma(\rho)}{2\lambda} = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{2\lambda}\sum_{k=0}^{n} b_k \rho^{2k}, \qquad \rho \le a. \quad (31)$$

Легко переконатись, що вирази (30) і (31) тотожні.

Інтеграл із рівняння (27) знайдемо за формулою [9]

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta) J_0(\eta r)\, d\eta = a\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} b_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2 (k-i)!} \int_0^\infty \eta^{i-k+1/2} J_{i+k+3/2}(\eta a) J_0(\eta r)\, d\eta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a^{2k} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (3/2)_i}{(i!)^2 (k-i)!} F\left(i+\frac{3}{2}, -k, 1, \frac{r^2}{a^2}\right), & r \le a, \\ -\dfrac{a^3}{2r^3} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{((3/2)_i)^2 a^{2i+2k}}{(i!)^2 (k-i)! (3/2)_{i+k+1} r^{2i}} \times & \\ \qquad \times F\left(i+\frac{3}{2}, i+\frac{3}{2}, i+k+\frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right), & r > a. \end{cases} \quad (32)$$

Після врахування виразів (32) і (28) рівняння (27) матиме вигляд

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n} b_k a^{2k} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (3/2)_i}{(i!)^2 (k-i)!} F\left(i+\frac{3}{2}, -k, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} q_k r^{2k}. \quad (33)$$

Якщо у (33) прирівняти коефіцієнти при однакових степенях r^{2k}, то одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення b_k, через які знаходимо температуру на включенні за формулами (30) або (31). Тепловий потік поза включенням при $x_3 = 0$ і $r > a$

$$q(r) = -\frac{a^3}{4r^3}\sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{i=0}^{k} \frac{a^{2i+2k}(k!)^2((3/2)_i)^2}{(i!)^2 (k-i)! (3/2)_{i+k+1} r^{2i}} \times$$
$$\times F\left(i+\frac{3}{2}, i+\frac{3}{2}, i+k+\frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (34)$$

Приклад 3. Нехай в області S задано тепловий потік

$$q(r) = q_0 + q_1 r^2 + q_2 r^4, \qquad r \le a, \quad (35)$$

де q_k – відомі сталі. Рівняння (33) подамо через гіпергеометричні функції:

$$\frac{\pi}{4}\left\{b_0 F\left(\frac{3}{2},0,1,\frac{r^2}{a^2}\right)+b_1 a^2\left[F\left(\frac{3}{2},-1,1,\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{3}{2}F\left(\frac{5}{2},-1,1,\frac{r^2}{a^2}\right)\right]+\right.$$

$$+2b_2 a^4\left[\frac{1}{2}F\left(\frac{3}{2},-2,1,\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{3}{2}F\left(\frac{5}{2},-2,1,\frac{r^2}{a^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{15}{16}F\left(\frac{7}{2},-2,1,\frac{r^2}{a^2}\right)\right]\right\}=q_0+q_1r^2+q_2r^4,$$

розкривши які, маємо

$$\frac{\pi}{4}\left[b_0-\frac{b_1}{4}(2a^2-9r^2)-\frac{b_2}{8}\left(a^4+9a^2r^2-\frac{225}{8}r^4\right)\right]=q_0+q_1r^2+q_2r^4. \quad (36)$$

Прирівнявши у (36) коефіцієнти при однакових степенях r, для визначення b_k одержимо систему алгебричних рівнянь, розв'язок якої записується так:

$$b_0=\frac{4}{\pi}\left(q_0+\frac{2}{9}a^2q_1+\frac{24}{225}a^4q_2\right),$$

$$b_1=\frac{16}{9\pi}\left(q_1+\frac{8}{25}a^2q_2\right), \qquad b_2=\frac{256}{225\pi}q_2. \quad (37)$$

На основі формул (31) і (37) отримуємо температуру на включенні:

$$T_2(r)=\frac{2\sqrt{a^2-r^2}}{9\pi\lambda}\left[9q_0+2(a^2-2r^2)q_1+\frac{8}{25}(3a^4+4a^2r^2+8r^4)q_2\right], \quad r\le a.$$

Потужність теплових диполів $\gamma(r)$ визначаємо з формули (31):

$$\gamma(r)=2\lambda T_2(r).$$

Тепловий потік поза включенням за формулою (34) при $x_3=0$

$$q(r)=-\frac{a^3}{6r^3}b_0F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{a^5}{4r^3}b_1\left[\frac{4}{15}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{6a^2}{35r^2}F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right]-\frac{a^7}{r^3}b_2\left[\frac{4}{105}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{63r^2}F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{11}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{15a^4}{r^4}F\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right], \qquad r>a.$$

Виділивши кореневу особливість у наявних гіпергеометричних функціях, з використанням формули $F(a,b,c,z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,z)$ одержимо

$$q(r)=-\frac{a^3}{6r^2\sqrt{r^2-a^2}}b_0F\left(1,1,\frac{5}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{a^5}{4r^3}b_1\left[\frac{4}{15}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{6a^2}{35r\sqrt{r^2-a^2}}F\left(2,2,\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right]-\frac{a^7}{r^3}b_2\left[\frac{4}{105}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{63r^2}F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{11}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{15a^4}{r^3\sqrt{r^2-a^2}}F\left(3,3,\frac{13}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right], \qquad r>a.$$

Визначення напружено-деформованого стану. Зумовлені тепловими джерелами або диполями одиничної потужності напруження і переміщення знаходимо за допомогою термопружних потенціалів переміщень, які в декартовій системі координат задовольняють диференціальні рівняння

$$\Delta\Phi_i(x^*) = mT_i(x^*), \qquad m = \alpha_t \frac{1+\nu}{1-\nu}, \tag{38}$$

де α_t і ν – відповідно коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона, а функції $T_i(x^*)$ описуються виразами (1) і (25).

Легко переконатись, що при $i = 1$ рівняння (38) задовольняє функція

$$\Phi_1(x^*) = \frac{m}{8\pi\lambda} \iint\limits_S R(x^*, \xi)\, d_\xi S, \tag{39}$$

де $R(x^*, \xi)$ задається виразом (2), а при $i = 2$ розв'язком рівняння (38) є

$$\Phi_2(x^*) = -\frac{\partial\Phi_1(x_1)}{\partial x_3} = -\frac{m}{8\pi\lambda} \iint\limits_S \frac{x_3}{R(x^*, \xi)}\, d_\xi S. \tag{40}$$

Потенціал $\Phi_2(r, x_3)$ у циліндричній системі координат з урахуванням виразу (24) має вигляд

$$\Phi_2(r, x_3) = -\frac{m}{4\lambda} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^a \rho J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) x_3 e^{-\eta|x_3|}\, d\rho\, d\eta. \tag{41}$$

Із рівняння (40) випливає, що

$$\Phi_1(x^*) = -\int \Phi_2(x^*)\, dx_3 + C$$

або в циліндричній системі координат з урахуванням формули (41)

$$\Phi_1(r, x_3) = -\frac{m}{4\lambda} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^a \rho J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) \eta^{-2} (1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\rho\, d\eta. \tag{42}$$

Із формул (39) і (42) знаходимо подання в циліндричній системі координат для інтеграла від $R(x^*, \xi)$:

$$\iint\limits_S R(x^*, \xi)\, d_\xi S = 2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^a \rho J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) \eta^{-2} (1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\rho\, d\eta.$$

Компоненти тензора напружень і вектора переміщень виражаються формулами [7]

$$\sigma_{rr} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Phi_i(r, x_3) = -2G\left[\Delta\Phi_i(r, x_3) - \frac{\partial^2\Phi_i(r, x_3)}{\partial r^2}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Phi_i(r, x_3) = -2G\left[\Delta\Phi_i(r, x_3) - \frac{\partial\Phi_i(r, x_3)}{r\partial r}\right],$$

$$\sigma_{33} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi_i(r, x_3) = -2G\left[\Delta\Phi_i(r, x_3) - \frac{\partial^2\Phi_i(r, x_3)}{\partial x_3^2}\right],$$

$$\sigma_{r3} = 2G\frac{\partial^2\Phi_i(r, x_3)}{\partial r\partial x_3}, \qquad u_r = \frac{\partial\Phi(r, x_3)}{\partial r}, \qquad u_3 = \frac{\partial\Phi(r, x_3)}{\partial x_3}. \tag{43}$$

Перші три з формул (43), врахувавши (38), запишемо ще так:

$$\sigma_{rr} = -2G\left[mT_i(r, x_3) - \frac{\partial^2\Phi_i(r, x_3)}{\partial r^2}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G\left[mT_i(r, x_3) - \frac{\partial\Phi_i(r, x_3)}{r\partial r}\right],$$

$$\sigma_{33} = -2G\left[mT_i(r, x_3) - \frac{\partial^2\Phi_i(r, x_3)}{\partial x_3^2}\right]. \tag{44}$$

Зауважимо, що вирази для напружень і переміщень, зумовлених диполем тепла одиничної потужності, можна одержати шляхом диференціювання за x_3 відповідно напружень і переміщень, викликаних одиничним джерелом тепла.

Теплоактивне включення. Для теплоактивного включення при довільному розподілі джерел тепла $w(\rho)$ термопружний потенціал переміщень $\Phi_1(r, x_3)$ з урахуванням виразу (42) подаємо у вигляді

$$\Phi_1(r, x_3) = -\frac{m}{4\lambda}\int_0^\infty \eta^{-2} W(\eta) J_0(\eta r)(1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta, \tag{45}$$

де $W(\eta)$ задається виразом (7).

За формулами (43) або (44) з врахуванням подання (45) знаходимо напруження і переміщення:

$$\sigma_{rr}(r, x_3) = -\frac{3}{2} D T_1(r, x_3) + \frac{D|x_3|}{4\lambda}\int_0^\infty \eta W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta -$$

$$-\frac{D}{4\lambda}\int_0^\infty W(\eta) J_2(\eta r)(1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, x_3) = -\frac{3}{4} D T_1(r, x_3) + \frac{D|x_3|}{4\lambda}\int_0^\infty \eta W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta +$$

$$+\frac{D}{4\lambda}\int_0^\infty W(\eta) J_2(\eta r)(1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta,$$

$$\sigma_{33}(r, x_3) = -D T_1(r, x_3) - \frac{D|x_3|}{2\lambda}\int_0^\infty \eta W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta,$$

$$\sigma_{r3}(r, x_3) = -\frac{D x_3}{2\lambda}\int_0^\infty \eta W(\eta) J_1(\eta r) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta,$$

$$u_r(r, x_3) = \frac{m}{4\lambda}\int_0^\infty \eta^{-1} W(\eta) J_1(\eta r)(1 + \eta|x_3|) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta,$$

$$u_3(r, x_3) = \frac{m x_3}{4\lambda}\int_0^\infty W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|x_3|}\, d\eta, \qquad D = Gm = G\alpha_t \frac{1+\nu}{1-\nu}, \tag{46}$$

де $T_1(r, x_3)$ визначається формулою (5).

У площині $x_3 = 0$ із (46) маємо

$$\sigma_{33}(r) = -D T_1(r), \qquad \sigma_{r3}(r) = 0. \tag{47}$$

Із формул (47) бачимо, що нормальні напруження $\sigma_{33}(r)$ у площині $x_3 = 0$ пропорційні температурі. Тому, коли в області S відома температура, то через неї відразу визначаються нормальні напруження $\sigma_{33}(r, 0)$.

Приклад 4. Нехай потужність теплових джерел задається виразом (16). Тоді в області S при $x_3 = 0$ нормальні напруження $\sigma_{33}(r)$ записуються згідно з формулою (47), підставивши в яку подання (14) і (17), маємо

$$\sigma_{33}(r) = -\frac{D\pi}{4\lambda}\left[c_0 - \frac{a^2}{2}c_1 + \frac{3a^4}{8}c_2 + \frac{r^2}{4}\left(c_1 + \frac{a^2}{2}c_2\right) + \frac{9}{64}c_2 r^4\right]. \tag{48}$$

Поза областю S маємо $\sigma_{33}(r) = -D T_1(r)$, де $T_1(r)$ визначається формулою (18).

Теплоізольоване включення. Для цього випадку при довільному розподілі теплових диполів $\gamma(\rho)$ термопружний потенціал переміщень $\Phi_2(r, x_3)$ з урахуванням формули (41) подаємо у вигляді

$$\Phi_2(r, x_3) = -\frac{m x_3}{4\lambda} \int_0^\infty H(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta |x_3|} \, d\eta , \tag{49}$$

де $H(\eta)$ задається виразом (26).

Тоді за формулами (43) або (44) з врахуванням подання (49) напруження і переміщення записуємо так:

$$\sigma_{rr}(r, x_3) = -2D \left\{ T_2(r, x_3) - \frac{x_3}{8\lambda} \int_0^\infty \eta^2 H(\eta) \left[J_0(\eta r) - J_2(\eta r) \right] e^{-\eta |x_3|} \, d\eta \right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, x_3) = -2D \left\{ T_2(r, x_3) - \frac{x_3}{8\lambda} \int_0^\infty \eta^2 H(\eta) \left[J_0(\eta r) + J_2(\eta r) \right] e^{-\eta |x_3|} \, d\eta \right\},$$

$$\sigma_{33}(r, x_3) = -\frac{D x_3}{2\lambda} \int_0^\infty \eta^2 H(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta |x_3|} \, d\eta ,$$

$$\sigma_{r3}(r, x_3) = \frac{D}{2\lambda} \int_0^\infty \eta H(\eta) J_1(\eta r) (1 - \eta |x_3|) e^{-\eta |x_3|} \, d\eta ,$$

$$u_r(r, x_3) = \frac{m x_3}{4\lambda} \int_0^\infty \eta H(\eta) J_1(\eta r) e^{-\eta |x_3|} \, d\eta ,$$

$$u_3(r, x_3) = -\frac{m}{4\lambda} \int_0^\infty H(\eta) J_0(\eta r) (1 - \eta |x_3|) e^{-\eta |x_3|} \, d\eta , \tag{50}$$

де $T_2(r, x_3)$ визначається формулою (25).

Зокрема в площині включення $x_3 = 0$ із (50) маємо

$$\sigma_{r3}(r) = 2\pi D_1 \int_0^\infty \eta H(\eta) J_1(\eta r) \, d\eta, \qquad \sigma_{33}(r) = 0, \qquad D_1 = \frac{D}{4\pi\lambda} . \tag{51}$$

Підставимо у формулу (51) вираз (26) для $H(\eta)$ і обчислимо інтеграл. Тоді

$$\sigma_{r3}(r) = \frac{\pi^2}{2} D_1 r \sum_{k=0}^{n} b_k a^{2k} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (2i+1)!!}{2^i (i!)^2 (k-i)!} F\left(i + \frac{3}{2}, -k, 2, \frac{r^2}{a^2} \right), \qquad r \le a ,$$

$$\sigma_{r3}(r) = \frac{2\pi D_1 a^3}{r^2} \sum_{k=0}^{n} b_k (k!)^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{2^{k-i} a^{2k+2i} (2i-1)!! (2i+1)!!}{(i!)^2 (k-i)! (2k+2i+3)!! \, r^{2i}} \times$$

$$\times F\left(i + \frac{3}{2}, i + \frac{1}{2}, i + k + \frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2} \right), \qquad r > a . \tag{52}$$

Приклад 5. Нехай в тілі задано тепловий потік (35). Тоді $\sigma_{r3}(r)$ при $n = 2$ за формулою (52) запишемо на включенні

$$\sigma_{r3}(r) = \frac{\pi D_1 r}{2} \left\{ b_0 F\left(\frac{3}{2}, 0, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) + b_1 a^2 \left[F\left(\frac{3}{2}, -1, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) - \right. \right.$$

$$- \frac{3}{2} F\left(\frac{5}{2}, -1, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) \Bigg] + 2 b_2 a^4 \left[\frac{1}{2} F\left(\frac{3}{2}, -2, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{3}{2} F\left(\frac{5}{2}, -2, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{15}{16} F\left(\frac{7}{2}, -2, 2, \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \right\}, \qquad r \le a , \tag{53}$$

і поза включенням

$$\sigma_{r3}(r) = \frac{2\pi D_1 a^3}{r^2}\left\{\frac{1}{3}b_0 F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{a^2}{r^2}\right) + b_1 a^2\left[F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2},\frac{a^2}{r^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{35r^2}F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right] + 4b_2 a^4\left[\frac{2}{105}F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{2},\frac{a^2}{r^2}\right) + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{2a^2}{315r^2}F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{11}{2},\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{a^4}{924r^4}F\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{13}{2},\frac{a^2}{r^2}\right)\right]\right\}, \quad r > a\,. \quad (54)$$

Розкривши гіпергеометричні функції, подання (53) при $r \le a$ має вигляд

$$\sigma_{r3}(r) = \frac{\pi^2 D_1 r}{2}\left[b_0 - \frac{b_1 a^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{b_2 a^4}{8}\left(1 + \frac{9r^2}{2a^2} - \frac{75r^4}{8a^4}\right)\right], \quad r \le a\,. \quad (55)$$

Підставивши (37) у (55), знайдемо

$$\sigma_{r3}(r) = \pi D_1 r\left(2q_0 + q_1 r^2 + \frac{2}{3}q_2 r^4\right), \qquad r \le a\,. \quad (56)$$

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Нехай на місці включення міститься теплоактивна або теплоізольована кругова тріщина.

Теплоактивна тріщина. Розглянемо теплоактивну тріщину, на якій відома температура або тепловий потік. Тоді нормальні напруження визначаються формулою (38), а коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) подамо у вигляді [3, 11, 14]

$$K_1(a) = -\frac{2}{\sqrt{a\pi}}\int_0^a \frac{r\sigma_{33}(r)\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,. \quad (57)$$

Підставивши вирази (9) і (47) у формулу (57), одержимо

$$K_1(a) = \frac{2D}{\sqrt{a\pi}}\sum_{k=0}^{n} t_k \int_0^a \frac{r^{2k+1}dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{2D\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n} a^{2k} t_k k!\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)\ell!(k-\ell)!}\,. \quad (58)$$

Згідно з поданням (58) $K_1(a)$ при $n = 2$ має вигляд

$$K_1(a) = \frac{2D\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\left(t_0 + \frac{2}{3}a^2 t_1 + \frac{8}{15}a^4 t_2\right). \quad (59)$$

Вираз (59) для $K_1(a)$ при $t(r) = t_0$ збігається з наведеним у монографії [3].

Теплоізольована тріщина. В осесиметричному випадку, коли на поверхнях тріщини задано радіальне дотичне навантаження $\sigma_{r3}(r)$, КІН $K_2(a)$ задається виразом [3, 11, 14]

$$K_2(a) = -\frac{2}{a\sqrt{a\pi}}\int_0^a \frac{r^2\sigma_{r3}(r)\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,. \quad (60)$$

Підставивши (52) у (60), маємо

$$K_2(a) = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}D_1\sum_{k=0}^{n} b_k a^{2k} k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i(2i+1)!!}{2^i(i!)^2(k-i)!}\int_0^a \frac{F\left(i+\frac{3}{2},-k,2,\frac{r^2}{a^2}\right)r^3\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= -\pi D_1 a\sqrt{a\pi}\sum_{k=0}^{n} b_k a^{2k} k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i(2i+1)!!}{2^i(i!)^2(k-i)!}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)\left(i+\frac{3}{2}\right)_m(-k)_m}{(2)_m}\sum_{p=0}^{m+1}\frac{(-1)^p}{(2p+1)p!(m-p+1)!}\,. \quad (61)$$

При $n = 0$ вираз (61) для $K_2(a)$ збігається з наведеним у монографії [3], а при $n = 1$ з (61) отримуємо, що $K_2(a) = -\pi D_1 a\sqrt{a\pi}\left(\frac{2}{3}b_0 + \frac{4}{15}a^2 b_1\right)$.

Приклад 6. Розглянемо теплоізольовану кругову тріщину, перпендикулярно до якої спрямований тепловий потік (35), який зумовлює дотичні напруження (56). Тоді за формулою (60)

$$K_2(a) = -\frac{2D_1\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}\left(2q_0 + q_1 r^2 + \frac{2}{3}q_2 r^4\right)dr =$$

$$= -\frac{8D_1 a\sqrt{a\pi}}{3}\left(q_0 + \frac{2}{5}q_1 a^2 + \frac{8}{35}q_2 a^4\right).$$

Висновки. Наведеними в роботі виразами для температури (5) і (25) та рівняннями (6) і (27) описується також температурне поле у півбезмежному тілі $x_3 \ge 0$, коли в області S його межі задані температура або тепловий потік, а решта частини межі теплоізольована або перебуває при нульовій температурі. Тоді у першому випадку ця межа ковзно (гладко) закріплена $(\sigma_{r3} = 0,\ u_3 = 0)$, а в другому – закріплена гнучкою нерозтяжною діафрагмою $(\sigma_{33} = 0,\ u_r = 0)$.

Розв'язок рівняння (6) можна використати при розв'язуванні задач електростатики для безмежного простору з тонкою круговою пластинкою, на якій задано електричний потенціал або електричні заряди, а розв'язок рівняння (27) – для простору з електроізольованою пластинкою, при цьому функція $\gamma(\rho)$ описує розподіл електричних диполів, а $q(r)$ – напруженість електричного поля.

Інтегральне рівняння типу (6) має місце в контактних задачах теорії пружності при дії абсолютно гладкого штампа на пружний півпростір або у випадку абсолютно жорсткого нагрітого диска. Тоді функції $w(\rho)$ відповідають контактний тиск між штампом і півпростором або зсувні зусилля на поверхнях диска. Функція $T(r)$ визначається геометрією основи штампа та його переміщенням або радіальним переміщенням на місці диска при його відсутності.

Із формули (47) видно, що при тепловиділенні дія заданої на тріщині у безмежному тілі температури рівносильна певному силовому навантаженню і тріщина буде розкриватися тільки тоді, коли температура на ній є меншою, ніж у навколишньому середовищі.

При нагріві в області S всі напруження у тілі є стискувальними, тому якщо в околі області тепловиділення містяться навантажені внутрішнім тиском тріщини, то нагрівом можна понизити інтенсивність напружень, тобто створити умови гальмування тріщин [12].

1. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения осесимметричных задач термоупругости для тела с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – Вып. 6. – С. 3–7.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
4. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 120–128.

   Те саме: *Kit H. S.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 141–153.
5. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 150–159.

6. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
7. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – Москва: Наука, 1983. – 752 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.
10. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.)
12. *Финкель В. М.* Физические основы торможения разрушения. – Москва: Металлургия, 1977. – 360 с.
13. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
14. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1975. – 452 p. – (Ser. Mechanics of fracture; Vol. 2.)

ОСЕСИМЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТЕПЛОАКТИВНЫМ ИЛИ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ ДИСКОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ (ТРЕЩИНОЙ)

Приведены решения осесимметричных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для тела с тонким теплоактивным дисковым включением (на котором задана температура или тепловой поток), а также теплоизолированным включением. Задачи теплопроводности сведены к интегральным уравнениям и получены точные решения, если их правые части есть полиномы произвольной степени. Определены компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, а в случае трещин – коэффициенты интенсивности напряжений.

AXIALLY SYMMETRIC STATIONARY HEAT CONDUCTION AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A SOLID WITH THERMALLY ACTIVE OR THERMALLY INSULATED DISK INCLUSION (CRACK)

The solutions of axially symmetric stationary heat conduction and thermoelasticity problems for a solid with thin thermally active disk inclusion (with temperature or heat flow given) and also with thermally insulated inclusion have been presented. The heat conduction problems have been reduced to the integral equations and exact solutions have been obtained when their right-hand parts are polynomials of arbitrary degree. The stress tensor and displacement vector components have been defined and in the case of cracks, the stress intensity factors have been determined.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.01.10