

ПРО ДОКРИТИЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ ЗСУВУ В КОМПОЗИТІ З В'ЯЗКОПРУЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Наведено результати дослідження розвитку тріщини поперечного зсуву в композитному матеріалі з лінійно в'язкопружними компонентами під дією зовнішніх зсувних навантажень. Схему розв'язання поділено на два основних етапи: знаходження розкриття у вершині тріщини як функції часу і визначення кінетики росту тріщини у результаті розв'язання інтегральних рівнянь. На першому етапі використовується розв'язок відповідної пружної задачі про визначення розкриття тріщини і задачі про визначення ефективних модулів композита, армованого однонапрямленими дискретними волокнами. За допомогою принципу пружно-в'язкопружної аналогії, можливість застосування якого до розв'язання таких задач було теоретично обґрунтовано раніше, та методу оберненого перетворення Лапласа отримано розв'язок у часовій області. На другому етапі за допомогою критерію критичного розкриття тріщини для тріщини поперечного зсуву і рівняння для в'язкопружного розкриття цієї тріщини побудовано рівняння росту тріщини. Наведено результати числового розв'язання, які ілюструють вплив співвідношень між релаксаційними параметрами матеріалів компонент на довговічність тіла з тріщиною.

Вступ. Результати експериментальних досліджень [4, 8] вказують на те, що причиною виходу з ладу елементів конструкцій із полімерних композитних матеріалів може бути стабільне зростання тріщини, зумовлене спадковими властивостями матеріалів компонент композита.

Дослідженням моделей руйнування в'язкопружних матеріалів внаслідок довготривалого поширення тріщини присвячені роботи багатьох авторів [3, 4, 15, 16]. Результати досліджень докритичного розвитку тріщин у в'язкопружних матеріалах на базі цих моделей отримано здебільшого для тріщин нормального відриву. У той же час для вивчення процесів тривалого руйнування спадкових матеріалів важливим є дослідження росту тріщин при докритичних зсувних навантаженнях. Пропонована робота є продовженням досліджень, початих у роботах [11, 13], в ній розглянуто приклад розв'язання задачі про тривале розповсюдження тріщини поперечного зсуву в трансверсально-ізотропному лінійно в'язкопружному тілі. Досліджено композитний матеріал з анізотропними в'язкопружними властивостями, обумовленими спадковою поведінкою матеріалів компонентів.

1. Постановка задачі та використані моделі. Розглянемо композитний матеріал з однонапрямленим армуванням дискретними трансверсально-ізотропними волокнами. Волокно будемо моделювати еліпсоїдом обертання; відношення більшої осі еліпсоїда до меншої позначимо через k , концентрацію фази армування – через c_1 . Вважатимемо, що матеріали обох фаз виявляють в'язкопружні властивості, які зумовлюють спадкову поведінку композита. Релаксаційні модулі матеріалів компонентів у загальному випадку задаємо скінченною сумою функцій Міттаг-Леффлера [17]

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{(ij)\infty} + \sum_{k=1}^n \mu_{(ij)k} E_{\alpha_{(ij),1}}(-\beta_{(ij)k} t^{\alpha_{(ij)}}), \quad E_{\alpha,\delta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma[\alpha n + \delta]}. \quad (1)$$

Композит будемо моделювати трансверсально-ізотропним тілом з ефективними характеристиками на основі результатів роботи [9]. Використання такої моделі при дослідженні поширення тріщини обґрунтоване експериментальними дослідженнями [18], які вимагають виконання умови малості характерних розмірів включень порівняно з розміром зони передруйнування тріщини.

Будемо досліджувати тривале руйнування в'язкопружного композитного тіла з наскрізною тріщиною. Розглядатимемо повільний докритичний розвиток цієї тріщини, коли на нескінченності на тіло діють зусилля T у нормальному до осі Ox_3 напрямку (рис. 1а). Інтенсивність зусиль вважаємо достатньо малою порівняно з критичною, що зумовлює поширення тріщини за рахунок повзучості матеріалу.

Деформування тіла з композитного матеріалу відбувається в умовах плоскої деформації. Тріщина розташована в площині симетрії механічних властивостей композита і при своєму розвитку не виходить із неї. Це припущення виконується для композитів з високим ступенем адгезії, не схильних до розшарування, що підтверджено експериментально в роботах [4, 8].

Розглянемо два варіанти напрямку армування відносно розташування тріщини: вздовж осі Ox_1 – рис. 1б і вздовж осі Ox_2 – рис. 1в.

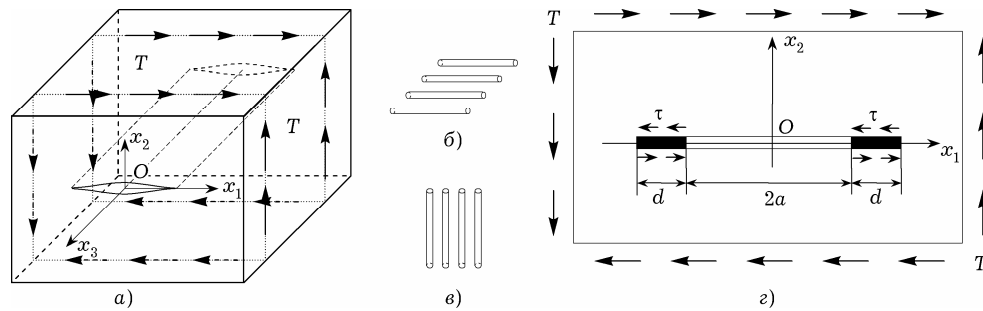


Рис. 1

Тріщину-щілину у в'язкопружному композиті можна подати як розріз, береги якого мають дві характерні ділянки – на одній березі взаємодіють, на іншій – ні [8, 13]. При цьому вважаємо, що взаємодія берегів відбувається у вузьких зонах передруйнування на краях тріщини (рис. 1г). При поперечному зсуві розповсюдження тріщини стримується матеріалом у зоні вершини тріщини, поки максимальний взаємний зсув берегів у зоні передруйнування не перевищить критичної величини δ_{II*} [1, 7, 8]:

$$2u(t)|_{x_1=a} \equiv \delta(t)|_{x_1=a} = \delta_{II*}, \quad (2)$$

де $2a$ – розмір тріщини; $u(t)$ – зміщення уздовж осі x_1 ; t – час.

При моделюванні протидії матеріалу в околі вершини тріщини (зоні передруйнування) відповідними дотичними напруженнями будемо припускати, що ці напруження τ рівномірно розподілені вздовж берегів зони передруйнування $d(t)$ і не змінюються під час докритичного зростання. Для в'язкопружнопластичних матеріалів зазвичай покладають $\tau = \tau_s$, де τ_s – межа текучості при зсуві. У загальному випадку цю характеристику слід визначати експериментально [3]. Розмір зони передруйнування $d(t)$ визначають з умови обмеженості напружень у кінці цієї зони при $x_1 = a + d(t)$. У нашій моделі тріщина розташована й розвивається уздовж однієї з осей ортотропії – осі Ox_1 . Поширення тріщини визначається як процес переходу точок області, де є взаємодія берегів, в область, де її немає.

2. В'язкопружне зміщення берегів тріщини. Виходячи із симетрії задачі, тріщину можна розглядати як розріз уздовж осі x_1 , при цьому на ділянці $a \leq x_1 \leq a + d$ дотичні напруження, що стягують береги тріщини, розподілені рівномірно з інтенсивністю τ . Загальна довжина розрізу $2(a + d)$ визначається в ході розв'язування задачі. Тому крайову задачу лінійної теорії пружності слід сформулювати так: у пружній області є розріз уздовж осі x_1 довжини $2(a + d)$ з центром у початку координат; на поверхні розрізу діють напруження

$$\sigma_{11}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{22}(x, 0) = 0, \quad \tau_{12} = \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \\ \tau, & a < |x| \leq a + d. \end{cases}$$

У нескінченно віддалених точках площини $\tau_{12}(x, \infty) = T$. Зсув берегів макротріщини ($d < a$) довжини $2a$ у точці $(x, 0)$ для досліджуваної задачі можна обчислити за формулою [10]

$$\delta(x, a) = L \frac{4d}{\pi} \tau F\left(\frac{x-a}{d}\right) \quad (3)$$

для випадку малих розмірів зони передруйнування d відносно розміру тріщини a . Тут

$$d = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K_{II}}{2\tau} \right)^2, \quad F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}.$$

У співвідношенні (3) параметр L пов'язаний з властивостями матеріалу і визначається так [8]:

$$L = L(a_{ij}) = -ia_{11}(s_1 + s_2), \quad (4)$$

де $s_1 = s_1(a_{ij})$ і $s_2 = s_2(a_{ij})$ – суто уявні корені рівняння [6]

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0. \quad (5)$$

У виразах (4) і (5) коефіцієнти a_{ij} є компонентами тензора податності ортотропного тіла. Їх отримаємо нижче на основі відомих виразів для модулів релаксації матеріалів компонент і пружного розв'язку задачі про релаксацію композита, армованого однонапрямленими волокнами.

Зважаючи на те, що для цієї задачі $K_{II} = T\sqrt{\pi a}$, запишемо зміщення у формі

$$\delta(x, a) = L \frac{a}{\rho_3} T \zeta(\xi, \eta), \quad \rho_3 = \frac{2\rho_2}{\pi}, \quad \rho_2 = \frac{\tau}{T}, \quad (6)$$

де функція початкових і геометричних параметрів

$$\zeta(\xi, \eta) = \eta F\left(\frac{\xi - \eta}{\rho_4 \eta}\right), \quad \rho_4 = \frac{1}{2\rho_3^2}. \quad (7)$$

Розкриття у вершині тріщини, відповідно до виразів (6) і (7), подамо як

$$\delta(a) \equiv \delta(x, a) = L \frac{a}{\rho_3} T \zeta(\eta), \quad \zeta(\eta) \equiv \zeta(\eta, \eta) = \eta. \quad (8)$$

З виразів (4) і (5) можна одержати агрегат компонентів тензора податності L , присутній у формулі для зсуву берегів тріщини:

$$L = \sqrt{a_{11}(2(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}}) + a_{66})}. \quad (9)$$

Для того щоб на основі пружного розв'язку отримати в'язкопружне зміщення берегів тріщини, скористаємося принципом пружно-в'язкопружної аналогії, що є аналогом принципу Вольтерра, який дістав обґрунтування для аналогічних задач в роботі [3]. З цією метою у виразі (9) змінимо пружні модулі відповідними перетвореними величинами.

Будемо вивчати якісну сторону задачі, тому залишимо лише один доданок у виразі (1). Для спрощення також вважатимемо, що властивості обох матеріалів компонент композита можна описати за допомогою одного параметра α функції Міттаг-Леффлера. Вважатимемо також, що матеріали компонентів композита є ізотропними (механічні властивості описуємо модулем Юнга E і коефіцієнтом Пуассона ν). За цих спрощень вираз (1) в області перетворення Лапласа набуде вигляду

$$\tilde{E}^{(i)}(s) = E_{\infty}^{(i)} + (E_0^{(i)} - E_{\infty}^{(i)}) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta^{(i)}}, \quad (10)$$

де $\tilde{E}(s) = s\bar{E}(s)$; $\bar{E}(s)$ – перетворення Лапласа функції $E(t)$; E_0 – миттєве значення модуля; індекс $i = 1$ відповідає матеріалу арматури, $i = 2$ – матеріалу наповнювача.

Будемо вважати об'ємну деформацію пружною, що надасть змогу записати коефіцієнти Пуассона матеріалів у вигляді

$$\tilde{\nu}^{(i)} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\nu_0^{(i)}) \frac{\tilde{E}^{(i)}}{E_0^{(i)}} \right].$$

Зафіксуємо характеристики матеріалу наповнювача й введемо коефіцієнти, які характеризують взаємозалежність від часу для модулів матеріалів армування й наповнювача

$$k_E = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(2)}}, \quad k_1 = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_\infty^{(1)}}, \quad k_\beta = -\frac{1}{\alpha} \lg \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}}. \quad (11)$$

Перший з коефіцієнтів визначає співвідношення між миттєвим модулем Юнга двох матеріалів (рис. 2а), другий – відношення миттєвого й тривалого модулів Юнга для матеріалу армування (рис. 2б), третій – зсув у додатному напрямку осі часу кривої, що описує зміну в часі модуля матеріалу армування щодо залежності зміни в часі модуля матеріалу наповнювача (рис. 2в).

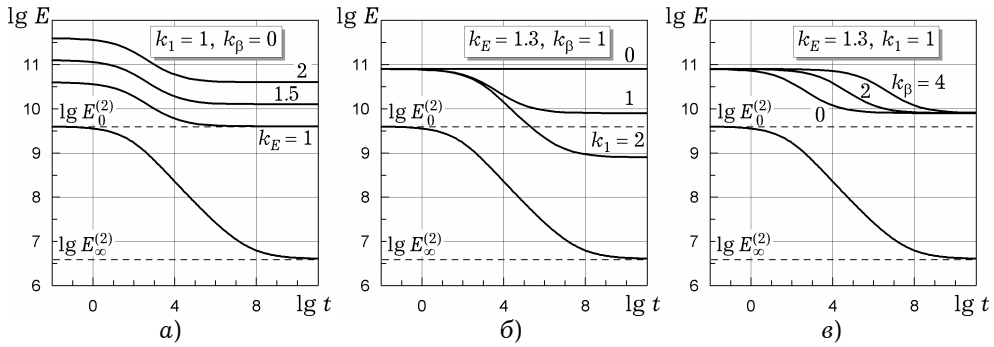


Рис. 2

Для одержання ефективних пружних модулів композитного матеріалу скористаємося результатами роботи [9]. Відповідно до принципу пружно-в'язкопружної аналогії [5], замінюючи залежні від часу характеристики релаксації $E^{(i)}(t)$ відповідними перетвореними величинами $\tilde{E}^{(i)}(s)$ (згідно з (10)), для напрямку армування уздовж осі Ox_1 (рис. 1б) отримаємо

$$\tilde{a}_{11} = A_{33} - \frac{A_{13}^2}{A_{11}}, \quad \tilde{a}_{12} = A_{13} - \frac{A_{13}A_{12}}{A_{11}}, \quad \tilde{a}_{22} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}, \quad \tilde{a}_{66} = A_{44}, \quad (12)$$

де A_{ij} – перетворені модулі податності трансверсально-ізотропного матеріалу (тут і в наступних виразах не ставимо знак перетворення над механічними характеристиками, щоб не захащувати ці вирази позначками); для напрямку армування уздовж осі Ox_2 (рис. 1в) вирази для характеристик \tilde{a}_{11} і \tilde{a}_{22} поміняються місцями;

$$A_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad A_{12} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad A_{13} = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \quad A_{44} = \frac{1}{\lambda_{44}},$$

$$\Delta_{11} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \quad \Delta_{13} = \lambda_{13}(\lambda_{11} - \lambda_{12}),$$

$$\Delta_{12} = \lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \quad \Delta_{33} = \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2, \quad \Delta = \Delta_{33}\lambda_{33} - 2\lambda_{13}\Delta_{13},$$

де λ_{ij} – перетворені ефективні модулі композита з однонапрямленими дискретними волокнами. Ці модулі подамо для напрямку осі симетрії обер-

тання, що збігається з напрямком вісі Ox_3 . У розглянутій постановці вісь симетрії обертання збігається з напрямком осі Ox_1 (рис. 1б) або осі Ox_2 (рис. 1в), але залишаємо λ_{ij} для Ox_3 у такому вигляді, як їх наведено у [9]:

$$\begin{aligned}\lambda_{13} &= \langle \lambda_{13} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left\{ [2(\lambda_{13}^{[3]})^2 + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]})\lambda_{33}^{[3]}] M_1 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{13}^{[3]}(\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) M_2 + \lambda_{13}^{[3]} \lambda_{33}^{[3]} M_3 \right\}, \\ \lambda_{11} + \lambda_{12} &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{12} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left\{ 4\lambda_{13}^{[3]}(\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) M_1 + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]})^2 M_2 + 2(\lambda_{13}^{[3]})^2 M_3 \right\}, \\ \lambda_{33} &= \langle \lambda_{33} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left\{ 4\lambda_{13}^{[3]} \lambda_{33}^{[3]} M_1 + 2(\lambda_{13}^{[3]})^2 M_2 + (\lambda_{33}^{[3]})^2 M_3 \right\}, \\ \lambda_{44} &= \langle \lambda_{44} \rangle + \frac{4c_1 c_2 (\lambda_{44}^{[3]})^2 K_5}{1 - 4\lambda'_{44} K_5}, \\ \lambda_{66} &= \frac{1}{2} (\langle \lambda_{11} \rangle - \langle \lambda_{12} \rangle) + \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^{[3]} - \lambda_{12}^{[3]})^2 K_2}{1 - 2(\lambda'_{11} - \lambda'_{12}) K_2},\end{aligned}$$

де c_1 – об'ємна частка армування, а $c_2 = 1 - c_1$ – наповнювача;

$$\begin{aligned}M_1 &= K_1 - z\lambda'_{13}, & M_2 &= K_3 + z\lambda'_{33}, & M_3 &= K_4 + z(\lambda'_{11} + \lambda'_{12}), \\ z &= 2K_1^2 + K_3 K_4, & \langle \lambda_{ij} \rangle &= c_1 \lambda_{ij}^{(1)} + c_2 \lambda_{ij}^{(2)}, & \lambda_{ij} &= c_1 \lambda_{ij}^{(2)} + c_2 \lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^c\end{aligned}$$

(тут, як і раніше, верхній індекс (1) відповідає арматурі, (2) – наповнювачу);

$$\begin{aligned}K_1 &= -\frac{4(\lambda_{13}^c + \lambda_{44}^c)}{k^2} (E_2 - E_3), \\ K_2 &= \lambda_{44}^c E_1 + \left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2} - 2\lambda_{44}^c \right) E_2 - \left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2} - \lambda_{44}^c \right) E_3 + F_1 - F_2, \\ K_3 &= 4 \left[\lambda_{44}^c E_1 + \left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2} - 2\lambda_{44}^c \right) E_2 - \left(\frac{\lambda_{33}^c}{k^2} - \lambda_{44}^c \right) E_3 \right], \\ K_4 &= \frac{8}{k^2} \left[\lambda_{11}^c E_2 - \left(\lambda_{11}^c - \frac{\lambda_{44}^c}{k^2} \right) E_3 \right], \\ K_5 &= \lambda_{11}^c E_1 - 2 \left(\lambda_{11}^c + \frac{\lambda_{13}^c}{k^2} \right) E_2 + \left(\lambda_{11}^c + \frac{2\lambda_{13}^c}{k^2} + \frac{\lambda_{33}^c}{k^4} \right) E_3 + F_2, \\ \Delta &= 1 - 4K_1 \lambda'_{13} - K_3 (\lambda'_{11} + \lambda'_{12}) - K_4 \lambda'_{33} + z(2\lambda_{13}'^2 - (\lambda'_{11} + \lambda'_{12})\lambda'_{33}), \\ E_n &= -\frac{1}{8\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c} \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{\Delta_1(x)} dx, & F_n &= -\frac{1}{8\lambda_{66}^c} \int_0^1 \frac{x^{2(n-1)}}{\Delta_2(x)} dx, \\ \Delta_1(x) &= (1 - x^2)^2 + \frac{2\bar{p}}{k^2} x^2(1 - x^2) + \frac{\bar{q}}{k^4} x^4, & \Delta_2(x) &= 1 + \left(\frac{\bar{\mu}}{k^2} - 1 \right) x^2, \\ \bar{p} &= \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{33}^c - \lambda_{13}^c (\lambda_{13}^c + 2\lambda_{44}^c)}{2\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c}, & \bar{q} &= \frac{\lambda_{33}^c}{\lambda_{11}^c}, & \bar{\mu} &= \frac{\lambda_{44}^c}{\lambda_{66}^c}.\end{aligned}$$

У випадку, коли матеріали компонент композита є ізотропними ($\lambda^{(1)}$ і $\mu^{(1)}$ – перетворені характеристики Ляме волокон, $\lambda^{(2)}$ і $\mu^{(2)}$ – наповнювача), маємо

при $\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)}$:

$$\lambda_{13}^c = \frac{s_1}{\Delta_c}, \quad \lambda_{11}^c + \lambda_{12}^c = \frac{s_3}{\Delta_c}, \quad \lambda_{33}^c = \frac{s_4}{\Delta_c}, \quad \lambda_{44}^c = \lambda_{66}^c = \frac{1}{\langle 1/\mu \rangle},$$

$$\Delta_c = s_3 s_4 - 2s_2^2, \quad \Delta_s = 2(3\lambda + 2\mu)\mu,$$

$$s_1 = \left\langle \frac{\lambda}{\Delta_s} \right\rangle, \quad s_3 = \left\langle \frac{2(\lambda + \mu)}{\Delta_s} \right\rangle, \quad s_4 = \left\langle \frac{\lambda + 2\mu}{\Delta_s} \right\rangle;$$

при $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)}$:

$$\lambda_{11}^c = \langle \lambda_{11} \rangle, \quad \lambda_{12}^c = \langle \lambda_{12} \rangle, \quad \lambda_{13}^c = \langle \lambda_{13} \rangle, \quad \lambda_{33}^c = \langle \lambda_{33} \rangle, \quad \lambda_{44}^c = \langle \lambda_{44} \rangle.$$

Підставляючи \tilde{a}_{ij} в агрегат (9), отримаємо \tilde{L} в області перетворення.

Агрегат L як функцію часу знайдемо за допомогою оберненого перетворення Лапласа:

$$L(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{L}/s\}. \quad (13)$$

Для визначення в'язкопружного розкриття потрібна похідна від $L(t)$, яку знайдемо як

$$L'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{L} - \tilde{L}_\infty\}.$$

За допомогою результатів роботи [14] знайдемо $L'(t)$ у формі

$$L'(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{z_k t}, \quad t_j \leq t \leq \Lambda t_j, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -\frac{h}{2\pi i} (\tilde{L}(z_k) - \tilde{L}_\infty) z_k', \quad z_k = T(x_k), \quad T(x) = \lambda[1 - \sin(\alpha + ix)], \\ z_k' &= T_x'(x_k), \quad x_k = h \cdot k, \quad k = -n, \dots, n, \\ \lambda &= \frac{2\pi d n (1 - \vartheta)}{t_0 \Lambda a_s(\vartheta)}, \quad h = \frac{a_s}{n}, \quad a_s(\vartheta) = \operatorname{arch}\left(\frac{\lambda}{s(1 - \vartheta) \sin \alpha}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

параметри a і d задовольняють додаткову умову, а $0 < s < 1$, $0 < \vartheta < 1$. Відмітимо також, що параметр Λ приймає значення порядку 10 і відповідний інтервал його зміни є малим порівняно із проміжками інтегрування в інтегралах у рівняннях докритичного зростання тріщини (див. п. 3). Тому виникає потреба розбити згаданий проміжок інтегрування й отримати розв'язок у вигляді (14) на кожному з інтервалів.

Процес докритичного стабільного росту тріщини поперечного зсуву, як і для тріщини нормального відриву, умовно розділимо на три періоди [3]: інкубаційний, перехідний і основний. Виходячи з принципу Вольтерра і співвідношень для визначення пружного зсуву берегів тріщини (2), запишемо вирази для в'язкопружного розкриття тріщини в точці $x_1 = a(t)$ в залежності від її розміщення на лінії продовження тріщини.

• При $x_1 = a_0$ (a_0 – початковий напіврозмір тріщини) маємо розкриття для інкубаційного періоду

$$\delta(t) = \delta(a_0) + \int_0^t L'(t - \tau) \delta(a_0) d\tau. \quad (16)$$

Під час інкубаційного періоду спостерігається зсув берегів тріщини без її зростання. Зазначимо, що, коли з (13) знайдено вираз для $L(t)$, тоді (16) запишеться у вигляді

$$\delta(t) = \delta(a_0)L(t).$$

• При $a_0 < x_1 \leq a_0 + d_0$ (d_0 – початковий розмір зони передруйнування) маємо розкриття для перехідного періоду

$$\delta(t) = \delta[a(t)] + \int_0^{t_0} L'(t - \tau)\delta(a(t), a_0) d\tau + \int_{t_0}^t L'(t - \tau)\delta[a(t), a(\tau)] d\tau, \quad (17)$$

де t_0 – тривалість інкубаційного періоду (див. п. 3); за час цього періоду тріщина стартує і проходить відстань, яка дорівнює довжині її початкової кінцевої зони.

• При $x_1 > a_0 + d_0$ маємо розкриття для основного періоду

$$\delta(t) = \delta[a(t)] + \int_{t'}^t L'(t - \tau)\delta[a(t), a(\tau)] d\tau, \quad (18)$$

де t' визначається з рівняння $a(t) - a(t') = d(t)$; за час цього періоду тріщина повільно підрастає до свого критичного розміру, після чого починається її динамічний розвиток.

3. Розвиток тріщини. Визначальні рівняння докритичного росту тріщини поперечного зсуву отримуємо на підставі підходу, викладеного в [2, 3, 12], виходячи із критерію руйнування (1) і в'язкопружного зсуву берегів тріщини (16)–(18). Для трьох періодів розвитку тріщини отримуємо:

• *інкубаційний період*

$$\delta(a_0) \left[1 + \int_0^{t_0} L'(t_0 - \tau) d\tau \right] = \delta_{II*}; \quad (19)$$

• *перехідний період*

$$\delta[a(t)] + \int_0^{t_0} L'(t - \tau)\delta(a(t), a_0) d\tau + \int_{t_0}^t L'(t - \tau)\delta[a(t), a(\tau)] d\tau = \delta_{II*}; \quad (20)$$

• *основний період*

$$\delta[a(t)] + \int_{t'}^t L'(t - \tau)\delta[a(t), a(\tau)] d\tau = \delta_{II*}, \quad (21)$$

де t' визначається з рівняння $a(t) - a(t') = d(t)$.

Для опису тривалої тріщиностійкості будемо використовувати

– силовий параметр, який дорівнює відношенню інтенсивності дотичних напружень у зоні передруйнування до інтенсивності зовнішнього навантаження:

$$\rho_2 = \tau/T;$$

– геометричний параметр $\eta_* = a_*/a_0$, де a_0 і a_* – початковий і критичний напіврозмір тріщини відповідно. Такий вибір параметрів тріщиностійкості надає змогу за допомогою виразу (6) записати величину, що стоїть у правій частині рівнянь (19)–(21), у формі

$$\delta_{II*} = L_0 \frac{a_0}{\rho_3} T \zeta(\eta_*). \quad (22)$$

Визначальні рівняння докритичного зростання тріщини (19)–(21) перетворюються на кожному з зазначених етапів відповідно в цьому випадку так:

$$\zeta(1) \left[1 + \int_0^{t_0} L'(t_0 - \tau) d\tau \right] = \zeta(\eta_*), \quad (23)$$

$$\zeta[\eta(t)] + \zeta(\eta(t), 1) \int_0^{t_0} L'(t - \tau) d\tau + \int_{t_0}^t L'(t - \tau)\zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta(\eta_*), \quad (24)$$

$$\zeta[\eta(t)] + \int_{t'}^t L'(t - \tau) \zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta(\eta_*). \quad (25)$$

У рівняннях (23)–(25) $\eta(t) = a(t)/a_0$ – відносний розмір тріщини. У рівнянні (25) величину t' знаходимо з рівняння

$$\eta(t) - \eta(t') = \frac{d(t)}{a_0}. \quad (26)$$

Оскільки розглянуту задачу розв'язуємо в рамках концепції сталості напружень у зоні переддруйнування, довжина цієї зони залежить від часу. Постійною під час зростання тріщини залишається величина $d(t)/a(t) = \rho_4$. Таким чином, рівняння (26) набуває вигляду

$$\eta(t) - \eta(t') = \rho_4 \eta(t). \quad (27)$$

Розв'язуючи послідовно рівняння (23)–(25), можна досліджувати кінетику розвитку тріщини зсуву, а також визначити довговічність в'язко-пружного композита з тріщиною.

4. Числові розв'язки та обговорення результатів. Розіб'ємо відрізок на продовженні тріщини від точки a_0 до точки a_* на N відрізків Δa_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Тоді рівняння (23)–(25) можуть бути використані для визначення часу проходження тріщиною K -го вузла розбиття

$$\eta(t_K) = \eta_K = 1 + \sum_{i=1}^N \Delta \eta_i, \quad \Delta \eta_i = \frac{\Delta a_i}{a_0},$$

у межах кожного з них будемо шукати розв'язок у формі показникової функції

$$\eta(t) = \eta_{K-1} (\eta_K / \eta_{K-1})^{(t-t_{K-1})/\Delta t_K}, \quad \Delta t_K = t_K - t_{K-1}, \quad (28)$$

яка задовольняє умови $\eta(t_{K-1}) = \eta_{K-1}$, $\eta(t_K) = \eta_K$.

Тривалість інкубаційного періоду t_0 визначимо з рівняння (23). Початкове відношення довжини зони переддруйнування до половини розміру тріщини, згідно з (26), $d_0/a_0 = \rho_4$. З урахуванням цього моменти часу проходження K -го вузла розбиття визначатимуться з рівнянь

$$\zeta(\eta_K) + \zeta(\eta_K, 1) \int_{t_K-t_0}^{t_K} L'(\theta) d\theta + \int_0^{t_K-t_0} L'(\theta) \zeta[\eta_K, \eta(t_K - \theta)] d\theta = \zeta(\eta_*), \quad (29)$$

якщо $1 < \eta_K \leq 1 + \rho_4$, і

$$\zeta(\eta_K) + \int_0^{t_K-t'} L'(\theta) \zeta[\eta_K, \eta(t_K - \theta)] d\theta = \zeta(\eta_*), \quad (30)$$

якщо $\eta_K > 1 + \rho_4$; $\eta(t_K - \theta)$ визначається згідно з (28).

За допомогою (27) визначимо

$$t' = t_K - t_{I-1} - \Delta t_I \frac{\ln[(1 - \rho_4)\eta_K] - \ln \eta_{I-1}}{\ln \eta_I - \ln \eta_{I-1}}, \quad (31)$$

де I задовольняє умову $\eta_{I-1} \leq (1 - \rho_4)\eta_K \leq \eta_I$.

Виходячи з того, що для досліджуваного класу задач спостерігається збільшення прискорення при достатньому наближенні до початку нестабільного етапу зростання тріщини, виконаємо розбиття відрізка $[1, \eta_*]$ зі зростаючими $\Delta \eta_K$, наприклад, покладаючи довжину кожного наступного відрізка розбиття у q раз більшою від довжини попереднього:

$$\eta_K = 1 + (\eta_* - 1)(q^K - 1)/(q^N - 1), \quad K = 0, 1, \dots, N. \quad (32)$$

Зауважимо, що, коли M задовольняє рівність $\eta_M = 1 + \rho_4$, тоді час $t_I = t_M - t_0$ є тривалістю перехідного періоду, а час $t_{II} = t_N - t_M$ – тривалістю основного періоду. Довговічність визначається величиною t_N .

На рис. 3 наведено кінетичні діаграми росту тріщини в композитному тілі з напрямком армування, що збігається з напрямком осі Ox_1 (див. рис. 1б). Діаграми отримано на підставі розв'язання рівнянь (23), (29)–(31) при таких значеннях параметрів задачі: $k = 10$, $c_1 = 0.33$ (параметри форми і концентрації елементів армування); $\alpha = 0.5$ (параметр функції Міттаг-Леффлера); $v_0^{(1)} = 0.3$ (миттєвий коефіцієнт Пуассона матеріалу елементів армування); $E_0^{(2)} = 4 \cdot 10^9$ Па, $v_0^{(2)} = 0.35$ (миттєві характеристики наповнювача), $\beta^{(2)} = 0.1 \text{ сек}^{-\alpha}$ (реологічний параметр наповнювача); $\eta_* = 2$, $\rho_2 = 5$ (параметри тріщиностійкості). Інші реологічні параметри визначаються за допомогою введених в (11) коефіцієнтів, значення яких подано на рисунку. Таким чином, кінетичні криві на кожному з блоків відповідають зазначеному положенню кривої релаксації матеріалу волокон відносно кривої релаксації наповнювача з відповідного блоку рис. 2.

Наведемо також параметри для реалізації оберненого перетворення Лапласа згідно з виразами (14) і (15): $d = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $n = 35$, $\Lambda = 5$, $\theta = 0.8$, $s = 0.5$. Таким чином, на кожному інтервалі зміни часу $[t_j, \Delta t_j]$ отримуємо ядро у вигляді лінійної комбінації 71-ї експоненти.

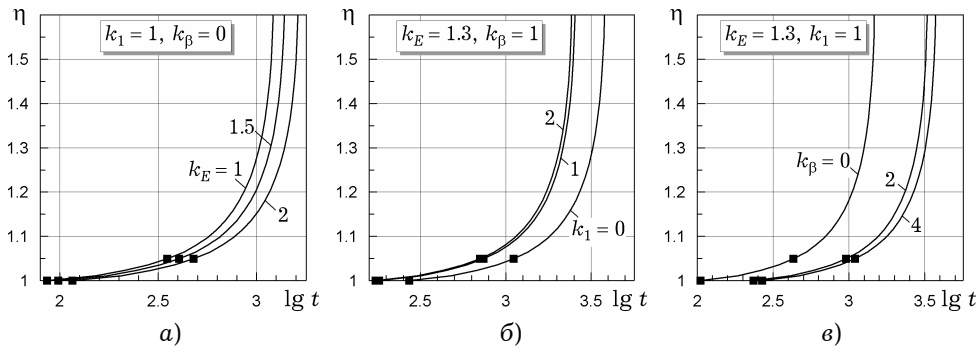


Рис. 3

Розбиття інтервалу $[1, \eta_*]$ побудовано згідно з (32), причому параметр q вибрано наступним чином: покладаючи $q_0 = 1.06$, обчислюємо кількість інтервалів перехідного періоду як найменше натуральне число M , більше ніж M_0 – корінь рівняння

$$1 + (q^{M_0} - 1)/(q^N - 1)(\eta_* - 1) = 1 + \rho_4,$$

далі параметр q визначаємо як корінь рівняння

$$1 + (q^M - 1)/(q^N - 1)(\eta_* - 1) = 1 + \rho_4,$$

найближчий до q_0 . Така побудова надає можливість зберегти розбиття у формі геометричної прогресії, не додаючи окремого вузла в точку $1 + \rho_4$.

Кількість інтервалів у розрахунках $N = 30$. Причому на рисунку вміщена лише частини кінетичних кривих для $\eta < 1.6 < 2 = \eta_*$ (на відсутній частині необмежено зростає швидкість поширення тріщини).

Заповнені квадратики на кожній із кінетичних кривих відповідають тривалості інкубаційного періоду та часу закінчення перехідного періоду.

На рис. 4 подано кінетичні криві для випадку напрямку армування, що відповідає рис. 1в. При розрахунках збережено всі вихідні параметри, крім η_* , параметр побудови розв'язку $q_0 = 1.15$. Як і раніше, на рисунку вміщено лише частини кінетичних кривих для $\eta < 2.6 < 5 = \eta_*$ з вказаної вище причини. Зазначимо, що для всіх кривих релаксації на рис. 2 і кінетичних кривих на рис. 3 і 4 час вимірюється в секундах, модулі пружності на рис. 2 вимірюється в Паскалях.

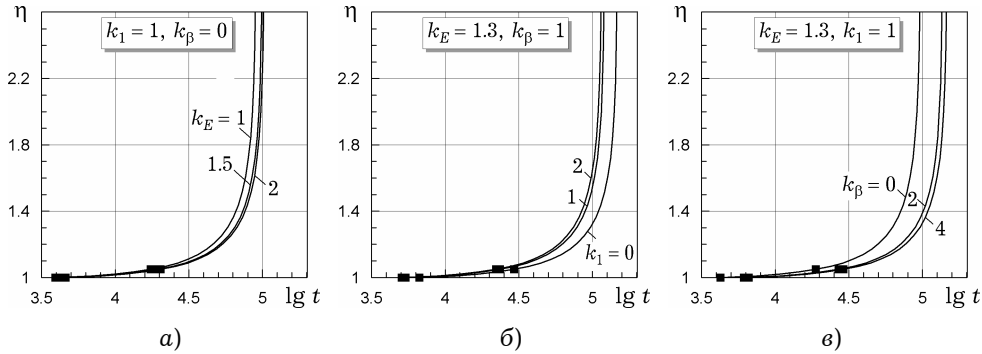


Рис. 4

Характер кінетичних діаграм розвитку тріщини поперечного зсуву якісно відповідає аналогічним діаграмам для тріщини нормального відриву, отриманим у роботах [2–4]. Близькість довговічностей для різних значень одного з параметрів k_E , k_1 і k_β і фіксованих інших зумовлена відповідними розбіжностями між кривими релаксації матеріалу волокон на часовому проміжку, в якому отримано розв'язок рівнянь докритичного розвитку тріщини.

1. Ву Э. Прочность и разрушение композитов // Композиционные материалы. – Т. 5. – Разрушение и усталость / Ред. Л. Браутман. – Москва: Мир, 1978. – 484 с.
2. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – Киев: Наук. думка, 1980. – 160 с.
3. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. Думка, 1990. – 310 с.
4. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
5. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 336 с.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
7. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
8. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 295 с.
9. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикла Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 3).
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
11. Kaminsky A. A., Selivanov M. F. Growth of a mode II crack in an orthotropic plate made of a viscoelastic composite material // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, No. 9. – P. 1036–1044.
Те саме: Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Развитие трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 9. – С. 89–97.
12. Kaminsky A. A., Selivanov M. F. Growth of a penny-shaped crack with a nonsmall fracture process zone in a composite // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, No. 8. – P. 866–871.

- Те саме: Каминский А. А., Селиванов М. Ф. О развитии дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 45–51.
13. Kaminsky A. A., Selivanov M. F. Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate // Int. J. Fract. – 2006. – **139**, No 1. – P. 153–160.
 14. López-Fernández M., Palencia C., Schädle A. A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms // SIAM J. Numer. Anal. – 2006. – **44**, No. 3. – P. 1332–1350.
 15. Schapery R. A. Analysis of deforming and fracture of viscoelastic composites // Inelastic behavior of composite materials / Ed. C. T. Herakovich. – Vol. 13. – New York: ASME, 1975. – P. 180–220.
 16. Schapery R. A. Time-dependent fracture: Continuum aspect of crack growth // Encyclopedia of materials science and engineering / Ed. M. B. Bever. – Oxford, New York: Pergamon Press, 1986. – P. 5043–5053.
 17. Selivanov M. F. Effective properties of a linear viscoelastic composite // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 10. – P. 1084–1091.
- Те саме: Селиванов М. Ф. Об эффективных свойствах линейно-вязкоупругого композита // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 10. – С. 62–70.
18. Zweben C. Fracture mechanics and composite materials: a critical analysis // Analysis of the test methods of high modulus fibers and composites: ASTM STP 521 (Amer. Society for Testing and Materials). – Philadelphia. – P. 65–97.

О ДОКРИТИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ СДВИГА В КОМПОЗИТЕ С ВЯЗКОУПРУГИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Приведены результаты исследования развития трещины поперечного сдвига в композитном материале с линейно вязкоупругими компонентами под действием внешних сдвигающих усилий. Для решения использована схема, состоящая из двух основных этапов: нахождение раскрытия в вершине трещины как функции времени и определение кинетики роста трещины в результате решения интегральных уравнений. На первом этапе используется решение соответствующей упругой задачи о нахождении раскрытия трещины и задачи об определении эффективных модулей композита, армированного однонаправленными дискретными волокнами. При помощи принципа упруго-вязкоупругой аналогии, который теоретически обоснован для подобных задач, и метода обратного преобразования Лапласа получено решение во временной области. На втором этапе при помощи критерия критического раскрытия трещины для трещины поперечного сдвига и уравнения для вязкоупругого раскрытия этой трещины построено уравнение роста трещины. Результаты численного решения иллюстрируют влияние соотношений между релаксационными параметрами материалов компонент на долговечность тела с трещиной.

ON SUBCRITICAL GROWTH OF A SHEAR CRACK IN COMPOSITE WITH VISCOELASTIC COMPONENTS

The paper presents the results of investigation of the transversal shear crack growth in a composite with linearly viscoelastic components under external shear loading. The scheme of solution is divided into two basic stages: the determination of the crack-tip opening displacement as a time function and the study of the crack growth kinetics via the integral equations solution. At the first stage, the solution of the corresponding elastic problem on determination of the crack opening displacement and the solution of the problem on the determination of effective moduli of the composite reinforced by unilateral discrete fibers are used. Using the principle of elasto-visco-elastic analogy, the possibility of utilizing of which to solve such problems was theoretically proved earlier and the method of the inverse Laplace transform we have obtained the solution in a time domain. At the second stage, the crack growth equations are constructed using the criterion of critical crack opening displacement for a transversal shear crack and equation for the viscoelastic opening displacement of this crack. The results of numerical solution are presented. They illustrate the influence of the values of relations between the material relaxation parameters on durability of the body with a crack.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
04.11.09