

## РОЗКЛИНЮВАННЯ ПРУЖНОГО КЛИНА ЖОРСТКОЮ ПЛАСТИНКОЮ ЗА УМОВИ КОНТАКТУ З ВІДСТАВАННЯМ

*Розглянуто задачу про розклинювання пружного клина жорсткою пластинкою уздовж крайової тріщини, яка знаходиться на осі симетрії клина і виходить до його вершини. Враховано відставання берегів тріщини від поверхонь пластинки. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено розмір зони відставання, коефіцієнт інтенсивності напружень, розподіл напружень на лінії продовження тріщини та в області контакту, колові переміщення берегів тріщини.*

Задачі про розклинювання пружних тіл уздовж внутрішніх або крайових тріщин при зануренні в них жорстких клинів або пластинок досліджувалися в роботах [1, 2, 4–6, 9, 10]. У [2, 5] отримано асимптотичний розв'язок задачі про розклинювання пружної півплощини жорстким клином уздовж крайової тріщини, перпендикулярної до межі півплощини. У [6] знайдено наближений розв'язок цієї задачі шляхом спеціальної апроксимації ядра сингулярного інтегрального рівняння. У роботі [10] побудовано асимптотичний розв'язок задачі про розклинювання пружного клина жорсткою пластинкою сталої товщини. Цей розв'язок міститься також у монографії [1]. Огляд інших задач про розклинювання пружної площини, смуги та півсмуги міститься у довіднику [9].

Нещодавно автори статті [7] знову повернулись до задачі про розклинювання пружного клина жорсткою пластинкою сталої товщини і знайшли аналітичний розв'язок цієї задачі із застосуванням методу Вінера – Гопфа. Як з'ясовано в [7], припущення про щільне прилягання берегів тріщини до поверхонь пластинки, закладене у постановці задачі, підтверджується побудованим розв'язком лише у випадку, коли кут при вершині клина дорівнює або перевищує  $\pi$ . Якщо ж кут розхилу клина менший ніж  $\pi$ , розв'язок задачі втрачає зміст, тому що контактні напруження поблизу вершини клина змінюють знак і стають напруженнями розтягу, що свідчить про наявність відставання берегів тріщини від поверхонь жорсткої пластинки. В цьому випадку постановка задачі потребує перегляду. У пропонованій роботі задача розв'язується в уточненій постановці з урахуванням відставання берегів тріщини від поверхонь жорсткої пластинки.

**Інтегральне рівняння задачі.** Розглянемо пружний клин з кутом при вершині  $2\alpha$ ,  $\alpha < \pi/2$ , який має тріщину довжини  $\ell$  на бісектрисі кута. Пружний клин розклинюється жорсткою пластинкою товщини  $2h$ , зануреною уздовж тріщини в клин на глибину  $\ell_1$ ,  $\ell_1 < \ell$  (рис. 1). У результаті береги тріщини  $\vartheta = \pm 0$ ,  $0 \leq r < \ell$  контактують з поверхнями пластинки вздовж відрізка  $\ell_2 \leq r \leq \ell_1$ ,  $\ell_2 < \ell_1$ , а на проміжку  $0 \leq r < \ell_2$  відстають від поверхонь пластинки, так що вершина кожного з півклинів зміщується з осі симетрії клина на відстань  $h_1$  ( $h_1 > h$ ). Розмір  $\ell_2$  зони відставання, як і відстань  $h_1$ , заздалегідь невідомі і підлягають визначенню при розв'язанні задачі. Сили тертя в області контакту не враховуємо. Грані пружного клина  $\vartheta = \pm \alpha$ ,  $0 \leq r < \infty$  та береги тріщини  $\vartheta = \pm 0$  поза областю контакту ( $0 \leq r < \ell_2$ ,  $\ell_1 < r < \ell$ ) вільні від напружень.

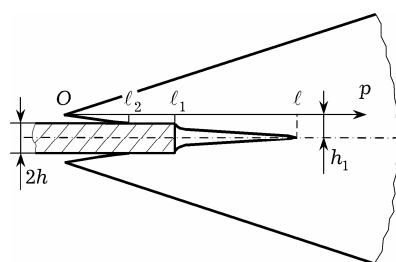


Рис. 1

Оскільки напружено-деформований стан клина симетричний відносно його осі  $\vartheta = 0$ , обмежимося розглядом верхнього півклина  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ . Нехай у процесі деформації початок полярної системи координат залишається зв'язаним з вершиною півклина, а полярна вісь  $p$  – паралельною до осі симетрії клина. Таке введення системи координат зумовлене вимогою, щоб нормальні переміщення у вершині клина були нульовими, що необхідно при використанні інтегрального перетворення Мелліна.

Змішані крайові умови на межі верхнього півклина запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0, & 0 \leq r < \ell_2, & & \ell_1 < r < \ell, \\ u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= -(h_1 - h), & \ell_2 \leq r \leq \ell_1, & & u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -h_1, & \ell \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0, \quad \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2)$$

Введемо невідому функцію радіальної похідної нормальних переміщень верхнього берега тріщини

$$g(r) = \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0}, \quad 0 \leq r < \ell_2, \quad \ell_1 < r < \ell. \quad (3)$$

Тоді, замінивши крайові умови (1) наступною однією

$$\frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = \begin{cases} 0, & \ell_2 \leq r \leq \ell_1, \quad \ell \leq r < \infty, \\ g(r), & 0 \leq r < \ell_2, \quad \ell_1 < r < \ell, \end{cases} \quad (4)$$

отримаємо крайову задачу з умовами (2) і (4). Розв'язок цієї задачі для півклина  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$  знайдемо із використанням інтегрального перетворення Мелліна. Зокрема, на межі  $\vartheta = 0$  будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} &= -\frac{m}{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{\Delta(s)} a(s) r^{-s-1} ds, \\ \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds, \\ \lambda(s) &= \sin^2 \alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \quad \Delta(s) = \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $G$  – модуль зсуву;  $m$  – число Пуассона;  $a(s)$  – невідома густина;  $c$  – будь-яке дійсне число з інтервалу  $-1 < c < \operatorname{Re} \delta_1$ , де  $\delta_1$  ( $\operatorname{Re} \delta_1 > 1$ ) – найменший за модулем корінь рівняння  $\Delta(s) = 0$  із півплощини  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Застосовуючи до другої рівності (5) обернене перетворення Мелліна, з урахуванням умови (4) знайдемо

$$a(s) = \left( \int_0^{\ell_2} + \int_{\ell_1}^{\ell} \right) g(y) y^s dy, \quad (6)$$

і підставимо цей вираз у першу з рівностей (5). Виконавши заміни

$$\begin{aligned} s &= -i\tau, & r &= \ell e^{-\xi}, & y &= \ell e^{-\eta}, \\ g(\ell e^{-\eta}) e^{-\eta} &= \varphi(\eta), & 0 < \eta < a, & & b < \eta < \infty, & a = \ln(\ell/\ell_1), \quad b = \ln(\ell/\ell_2), \end{aligned} \quad (7)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} &= -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \left( \int_0^a + \int_b^{\infty} \right) \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \\ \mathbf{k}(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, & \mathcal{K}(\tau) &= \frac{\lambda(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)}. \end{aligned} \quad (8)$$

При цьому, зважаючи на відсутність полюсів функції  $\mathcal{K}(\tau)$  у смузі  $-1 < \text{Im } \tau < \text{Re } \delta_1$ , контур інтегрування  $-\infty + ic < \tau < \infty + ic$  зміщено на дійсну вісь ( $c = 0$ ).

Задовольнивши першу з крайових умов (1) за допомогою (8), отримуємо інтегральне рівняння задачі відносно функції  $\varphi(\eta)$ :

$$\left( \int_0^a + \int_b^\infty \right) \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = 0, \quad 0 < \xi < a, \quad b < \xi < \infty. \quad (9)$$

**Розв'язання інтегрального рівняння.** Інтегральне рівняння (9) розв'яжемо зведенням його до нескінченної системи алгебричних рівнянь, застосовуючи метод Вінера – Гопфа і узагальнюючи підхід роботи [3], у якій побудовано розв'язок інтегрального рівняння з різницеvim ядром на скінченному інтервалі. Приймаючи, що  $\varphi(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$  і  $a < \eta < b$ , розповсюдимо інтегральне рівняння (9) на всю числову вісь:

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & 0 < \xi < a, \quad b < \xi < \infty, \\ \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & \xi < 0, \quad a < \xi < b, \end{cases} = 0. \quad (10)$$

До рівняння (10) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Phi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Phi_2^+(z) &= \frac{e^{-izb}}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \\ \Psi_2^+(z) &= -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = e^{iz(b-a)} \Psi_2^-(z), \end{aligned} \quad (12)$$

аналітичні відповідно у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$ ,  $c^+ < 0$ ,  $c^- > 0$  комплексної площини. Після застосування теореми про згортку для інтегрального перетворення Фур'є перша складова лівої частини рівняння (11) перетворюється до вигляду  $\mathcal{K}(z)(\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z))$ . Отже, з (11) отримуємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [8] відносно введених функцій:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z)(\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z)) - \Psi_1^-(z) + e^{iza}\Psi_2^+(z) &= 0, \\ \Phi_1^+(z) = e^{iza}\Phi_1^-(z), \quad \Psi_2^+(z) = e^{iz(b-a)}\Psi_2^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \end{aligned} \quad (13)$$

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (13) факторизуємо її коефіцієнт  $\mathcal{K}(z)$  у вигляді

$$\frac{\mathcal{K}(z)}{z} = \mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \quad (14)$$

де  $\mathcal{K}^\pm(z)$  – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ( $\text{Im } z > c^+$ ) та нижній ( $\text{Im } z > c^-$ ) півплощинах відповідно. Факторизацію (14) здійснюємо у нескінченних добутках:

$$\mathcal{K}^+(z) = \mathcal{K}'(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n}\right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^-(z) \equiv \frac{\mathcal{K}^+(-z)}{\mathcal{K}'(0)},$$

$$\mathcal{K}'(0) = -i \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad (15)$$

де  $s_n, \delta_n, n = 1, 2, \dots$ , – корені рівнянь  $\lambda(s) = 0$  (причому  $s_1 = 1$ ) і  $\Delta(\delta) = 0$  відповідно з півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

Систему функціональних рівнянь (13) з урахуванням (14) перепишемо у вигляді

$$z\mathcal{K}^+(z)(\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z)) + \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}^-(z)}\Psi_2^+(z) - \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = 0,$$

$$z\mathcal{K}^-(z)\Phi_1^-(z) + e^{iz(b-a)}z\mathcal{K}^-(z)\Phi_2^+(z) - \frac{e^{-iza}}{\mathcal{K}^+(z)}\Psi_1^-(z) + \frac{\Psi_2^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)} = 0,$$

$$z\mathcal{K}^+(z)\Phi_2^+(z) + e^{-iz(b-a)}z\mathcal{K}^+(z)\Phi_1^-(z) + \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)}(\Psi_2^-(z) - e^{-izb}\Psi_1^-(z)) = 0. \quad (16)$$

Другі складові лівої частини системи рівнянь (16), а також третю складову другого рівняння (16) подамо у вигляді різниці аналітичних у верхній та нижній півплощинах функцій:

$$\frac{e^{iza}}{\mathcal{K}^-(z)}\Psi_2^+(z) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \quad e^{iz(b-a)}z\mathcal{K}^-(z)\Phi_2^+(z) = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z),$$

$$\frac{e^{-iza}}{\mathcal{K}^+(z)}\Psi_1^-(z) = \chi_3^+(z) - \chi_3^-(z), \quad e^{-iz(b-a)}z\mathcal{K}^+(z)\Phi_1^-(z) = \chi_4^+(z) - \chi_4^-(z). \quad (17)$$

Розкладаючи відповідні інтеграли типу Коші [8] у ряд за теорією лишків, отримуємо

$$\chi_1^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}}{s_k + iz} \Psi_2^+(is_k) e^{-s_k a}, \quad \chi_2^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}}{\delta_k + iz} \Phi_2^+(i\delta_k) e^{-\delta_k(b-a)},$$

$$\chi_3^+(z) = -\frac{1}{\mathcal{K}'(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}}{s_k - iz} \Psi_1^-(-is_k) e^{-s_k a},$$

$$\chi_4^+(z) = \mathcal{K}'(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}}{\delta_k - iz} \Phi_1^-(-i\delta_k) e^{-\delta_k(b-a)},$$

$$\alpha_{1k} = \frac{is_k \Delta(s_k) \mathcal{K}^+(is_k)}{\lambda'(s_k)}, \quad \alpha_{2k} = \frac{\lambda(\delta_k)}{\Delta'(\delta_k) \mathcal{K}^+(i\delta_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Внаслідок проведених перетворень система функціональних рівнянь (13) набуває вигляду

$$z\mathcal{K}^+(z)(\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z)) + \chi_1^+(z) = \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + \chi_1^-(z),$$

$$z\mathcal{K}^-(z)\Phi_1^-(z) - \chi_2^-(z) + \chi_3^-(z) = \frac{-\Psi_2^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)} - \chi_2^+(z) + \chi_3^+(z),$$

$$z\mathcal{K}^+(z)\Phi_2^+(z) + \chi_4^+(z) = -\frac{\Psi_2^-(z) - e^{-izb}\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + \chi_4^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (19)$$

Ліва та права частини кожного з рівнянь (19) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і, отже, є довільними цілими функціями. З умов на нескінченності

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^+(z) &\sim -i\sqrt{-\frac{\mathcal{K}'(0)}{2z}}, & \mathcal{K}^-(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{-2\mathcal{K}'(0)z}}, \\ \chi_1^-(z) &= O(z^{-1}), & \chi_2^-(z) &= O(z^{-1}), & \chi_3^+(z) &= O(z^{-1}), & \chi_4^+(z) &= O(z^{-1}), \\ \Phi_1^\pm(z) &= o(1), & |z| &\rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (20)$$

робимо висновок, що обидві частини першого та другого рівнянь (19) є константами, які позначимо відповідно  $C_1$  і  $C_2$ , а обидві частини третього рівняння через обмеженість напружень  $\sigma_9|_{g=0}$  у точці  $r = \ell_2$  ( $\Phi_2^+(z) = o(z^{-1})$ ) дорівнюють нулеві.

Отже, розв'язок системи функціональних рівнянь (13) знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z) &= \frac{C_1 - \chi_1^+(z)}{z\mathcal{K}^+(z)}, & \Psi_1^-(z) &= \mathcal{K}^-(z)[C_1 - \chi_1^-(z)], \\ \Phi_1^-(z) &= \frac{\chi_2^-(z) - \chi_3^-(z) + C_2}{z\mathcal{K}^-(z)}, & \Psi_2^+(z) &= \mathcal{K}^+(z)[\chi_3^+(z) - \chi_2^+(z) - C_2], \\ \Phi_2^+(z) &= -\frac{\chi_4^+(z)}{z\mathcal{K}^+(z)}, & \Psi_2^-(z) - e^{-izb}\Psi_1^-(z) &= \mathcal{K}^-(z)\chi_4^-(z).\end{aligned}\quad (21)$$

З вимоги аналітичності функцій  $\Phi_1^+(z) + e^{izb}\Phi_2^+(z)$ ,  $\Phi_1^-(z)$ ,  $\Phi_2^+(z)$  у смузі  $c^+ < \text{Im } z < c^-$  отримуємо додаткові умови

$$C_1 - \chi_1^+(0) = 0, \quad \chi_2^-(0) - \chi_3^-(0) + C_2 = 0, \quad \chi_4^+(0) = 0. \quad (22)$$

Перші дві з умов (22), враховуючи (17), (21), виявляються залежними і еквівалентними одній рівності:

$$C_1 = \chi_1^-(0) + \mathcal{K}'(0)\chi_3^+(0) - \mathcal{K}'(0)\chi_2^+(0) - \mathcal{K}'(0)C_2. \quad (23)$$

Ще одна рівність для визначення сталих  $C_1$  і  $C_2$  випливає з умови відсутності стрибка переміщень у вершині тріщини ( $r = \ell$ ) і заданого стрибка в точці  $r = \ell_1$ :

$$\int_{\ell_1}^{\ell} \frac{\partial u_9}{\partial r} \Big|_{g=0} dr = -h, \quad (24)$$

яка з огляду на (3), (7), (12) еквівалентна рівності  $\Phi_1^+(0) = -h/(\sqrt{2\pi}\ell)$ . Звідси, враховуючи перше зі співвідношень (21) та першу і третю з умов (22), отримуємо

$$\frac{d}{dz} [\chi_1^+(z) - e^{izb}\chi_4^+(z)] \Big|_{z=0} = \frac{\mathcal{K}'(0)}{\sqrt{2\pi}\ell} h, \quad (25)$$

що еквівалентно рівності

$$\begin{aligned}C_2 &= \chi_3^+(0) - \chi_2^-(0) + \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dz} [\chi_1^-(z) - \mathcal{K}'(0)\chi_2^-(z) + \mathcal{K}'(0)\chi_3^+(z)] \Big|_{z=0} - \frac{1}{\gamma} \frac{\mathcal{K}'(0)}{\sqrt{2\pi}\ell} h, \\ \gamma &= i\mathcal{K}'(0)(a + 2\gamma_0), & \gamma_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{s_n} \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Позначимо

$$C = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dz} [\chi_1^-(z) - \mathcal{K}'(0)\chi_2^-(z) + \mathcal{K}'(0)\chi_3^+(z)] \Big|_{z=0} - \frac{1}{\gamma} \frac{\mathcal{K}'(0)}{\sqrt{2\pi} \ell} h. \quad (27)$$

Тоді

$$C_2 = \chi_3^+(0) - \chi_2^-(0) + C, \quad C_1 = \chi_1^-(0) - \mathcal{K}'(0)C. \quad (28)$$

Співвідношення (21), (27), (28) не визначають повністю функцій  $\Phi_1^\pm(z)$ ,  $\Phi_2^\pm(z)$ ,  $\Psi_1^\pm(z)$ ,  $\Psi_2^\pm(z)$ , а виражають їх через невідомі значення  $\Psi_2^+(is_k)$ ,  $\Psi_1^-(-is_k)$ ,  $\Phi_2^+(i\delta_k)$ ,  $\Phi_1^-(-i\delta_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , із (18). Для визначення останніх покладемо у другій з рівностей (21)  $z = -is_n$ , у третій –  $z = -i\delta_n$ , у четвертій –  $z = is_n$ , а у п'ятій –  $z = i\delta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} z_{1n}^+ + \beta_{1n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{2k} \delta_k}{\delta_k + \delta_n} z_{1k}^- &= 0, \\ z_{1n}^- - \beta_{1n} \delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k - \delta_n} z_{2k}^- + \frac{\tilde{\alpha}_{2k}}{\delta_k + \delta_n} z_{1k}^+ \right) &= g_{1n}, \\ z_{2n}^+ + \beta_{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k + s_n} z_{2k}^- + \frac{\tilde{\alpha}_{2k}}{\delta_k - s_n} z_{1k}^+ \right) &= g_{2n}, \\ z_{2n}^- + \beta_{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k + s_n} z_{2k}^+ &= g_{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

відносно невідомих

$$\begin{aligned} z_{1k}^+ &= \Phi_2^+(i\delta_k) \frac{1}{C}, & z_{1k}^- &= \Phi_1^-(-i\delta_k) \frac{1}{C}, & z_{2k}^+ &= \Psi_2^+(is_k) \frac{1}{C}, \\ z_{2k}^- &= \Psi_1^-(-is_k) \frac{1}{C}, & k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

у якій

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1k} &= \frac{\alpha_{1k}}{s_k} e^{-s_k a}, & \tilde{\alpha}_{2k} &= -\frac{\alpha_{2k}}{\delta_k} \mathcal{K}'(0) e^{-\delta_k (b-a)}, & k &= 1, 2, \dots, \\ \beta_{1n} &= \frac{i}{\delta_n \mathcal{K}^+(i\delta_n)}, & \beta_{2n} &= -s_n \mathcal{K}^-(-is_n), \\ g_{1n} &= \frac{i}{\delta_n \mathcal{K}^-(-i\delta_n)}, & g_{2n} &= -\mathcal{K}^+(is_n), & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Нескінченна система алгебричних рівнянь (29) є регулярною і відноситься до систем типу Пуанкаре – Коха, оскільки її коефіцієнти експоненціально затухають за  $k$ . Розв'язок цієї системи можна знайти за допомогою методу послідовних наближень або методу редукції.

Із рівняння (27) знаходимо

$$\tilde{C} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\mathcal{K}'(0)}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \frac{i}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k} (z_{2k}^+ + z_{2k}^-) + \frac{\tilde{\alpha}_{2k}}{\delta_k} z_{1k}^+ \right) \right]^{-1}, \quad C = \tilde{C} \frac{h}{\ell}. \quad (32)$$

Для визначення невідомого розміру зони відставання  $\ell_2$  (через параметр  $b = \ln(\ell/\ell_2)$ , див. (7)) використаємо третю з умов (22), яку, враховуючи (18), (30), (31), подамо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{2k} z_{1k}^- = 0. \quad (33)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (9) отримуємо оберненим перетворенням Фур'є першої і третьої рівностей (12). З урахуванням (21) маємо

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1^+(\tau) + e^{i\tau b} \Phi_2^+(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1 - \chi_1^+(\tau)}{\tau \mathcal{K}^+(\tau)} e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (34)$$

**Розподіл напружень і переміщення верхнього берега тріщини.** Нормальні напруження на лінії продовження тріщини  $\ell < r < \infty$ ,  $\vartheta = 0$  знаходимо за допомогою виразу (8), який з урахуванням першої і третьої з рівностей (12) запишемо у вигляді

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) [\Phi_1^+(\tau) + e^{i\tau b} \Phi_2^+(\tau)] e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (35)$$

Перетворивши інтеграл із (35) у ряд за теорією лишків при  $\xi < 0$  і використовуючи рівності (21), (17), (30) та заміни (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = & -\frac{m}{m-1} \sqrt{2\pi} \tilde{C} \frac{h}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{i\Delta'(\delta_n) \mathcal{K}^+(i\delta_n)} \times \\ & \times \left( \frac{\mathcal{K}'(0)}{\delta_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k - \delta_n} z_{2k}^+ \right) \left( \frac{r}{\ell} \right)^{-\delta_n - 1}, \quad \ell < r < \infty. \end{aligned} \quad (36)$$

Застосувавши до рівності (35) обернене перетворення Фур'є і враховуючи першу з крайових умов (1), знаходимо

$$\mathcal{K}(z) [\Phi_1^+(z) + e^{izb} \Phi_2^+(z)] = -\frac{m-1}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 + \int_a^b \right) e^{-\xi z} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} e^{iz\xi} d\xi. \quad (37)$$

Звідси з використанням розв'язку (21), оцінок (20), а також на підставі леми Ватсона [11] отримуємо поведінку нормальних напружень поблизу вершини тріщини:

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} \sim \frac{m}{m-1} \frac{\tilde{C}h}{\sqrt{i\mathcal{K}'(0)\ell(r-\ell)}} \left( \mathcal{K}'(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{1k} z_{2k}^+ \right), \quad r \rightarrow \ell + 0. \quad (38)$$

Із (38) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = \lim_{r \rightarrow \ell + 0} \sqrt{2\pi(r-\ell)} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{m}{m-1} \frac{2Gh\tilde{C}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{i\mathcal{K}'(0)\ell}} \left( \mathcal{K}'(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{1k} z_{2k}^+ \right). \quad (39)$$

Нормальні напруження в області контакту  $\ell_2 < r < \ell_1$ ,  $\vartheta = 0$  визначаємо із (35). Після обчислення інтегралів за теорією лишків при  $a < \xi < b$  отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = & \frac{m}{m-1} \sqrt{2\pi} \tilde{C} \frac{h}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{\Delta'(\delta_n)} \left[ z_{1n}^+ \frac{\ell}{\ell_2} \left( \frac{r}{\ell_2} \right)^{-\delta_n - 1} - z_{1n}^- \frac{\ell}{\ell_1} \left( \frac{r}{\ell_1} \right)^{\delta_n - 1} \right], \\ & \ell_2 < r < \ell_1. \end{aligned} \quad (40)$$

За допомогою леми Ватсона із (37) знаходимо, що контактні напруження необмежені на краї жорсткої пластинки і мають при цьому таку асимптотичну поведінку:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} \sim & -\frac{m}{m-1} \frac{\tilde{C}h}{\sqrt{i\mathcal{K}'(0)\ell_1(\ell_1-r)}} \left[ \mathcal{K}'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{2k} z_{1k}^+ - \tilde{\alpha}_{1k} z_{2k}^-) \right], \\ & r \rightarrow \ell_1 - 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Знайдемо нормальні переміщення верхнього берега тріщини в області  $0 < r < \ell_2$ , прилеглий до вершини клина, та в області  $\ell_1 < r < \ell$  поблизу

вершини тріщини. Обчисливши інтеграл із (34) за теорією лишків при  $0 < \xi < a$  та  $b < \xi < \infty$  і використавши заміни (3), (7), отримуємо радіальні похідні від переміщень

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_9}{\partial r} \right|_{9=0} &= \sqrt{2\pi} i \tilde{C} h \left\{ \frac{\ell}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\Delta(s_n)}{\lambda'(s_n)} \left[ z_{2n}^- \left( \frac{r}{\ell} \right)^{s_n-1} + z_{2n}^+ \frac{\ell}{\ell_1} \left( \frac{r}{\ell_1} \right)^{-s_n-1} \right] \right\}, \\ &\quad \ell_1 < r < \ell, \\ \left. \frac{\partial u_9}{\partial r} \right|_{9=0} &= \sqrt{2\pi} \tilde{C} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_n) \mathcal{K}^-(-is_n)}{\lambda'(s_n)} \left( \frac{r}{\ell_2} \right)^{s_n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{2k} \delta_k}{\delta_k - s_n} z_{1k}^-, \\ &\quad 0 < r < \ell_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Нормальні переміщення верхнього берега тріщини визначимо на основі з рівностей

$$\begin{aligned} u_9|_{9=0} &= \int_{\ell}^r \left. \frac{\partial u_9}{\partial r} \right|_{9=0} dr - h_1, & \ell_1 < r < \ell, \\ u_9|_{9=0} &= \int_{\ell_2}^r \left. \frac{\partial u_9}{\partial r} \right|_{9=0} dr - (h_1 - h), & 0 < r < \ell_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Підставивши вирази із (42) у (43), після перетворень будемо мати

$$\begin{aligned} u_9|_{9=0} &= -h_1 + \sqrt{2\pi} i \tilde{C} h \left\{ \ln \frac{r}{\ell} - \gamma_0 - \frac{1}{\mathcal{K}'(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{1k}}{s_k} z_{2k}^+ + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\Delta(s_n)}{s_n \lambda'(s_n)} \left[ z_{2n}^+ \left( \frac{r}{\ell_1} \right)^{-s_n} - z_{2n}^- \left( \frac{r}{\ell} \right)^{s_n} \right] \right\}, \quad \ell_1 < r < \ell, \\ u_9|_{9=0} &= \sqrt{2\pi} \tilde{C} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_n) \mathcal{K}^-(-is_n)}{s_n \lambda'(s_n)} \left( \frac{r}{\ell_2} \right)^{s_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{2k} \delta_k}{\delta_k - s_n} z_{1k}^-, \quad 0 < r < \ell_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Визначимо відхилення  $h_1 - h$  від вершини клина до поверхні пластинки. Поклавши  $r = \ell_2$  у другій з формул (44), після зміни порядку підсумовування і знаходження внутрішньої суми

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_n) \mathcal{K}^-(-is_n)}{s_n \lambda'(s_n)} \frac{1}{\delta_k - s_n} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\Delta(i\tau) \mathcal{K}^-(\tau)}{\tau \lambda(i\tau)} \frac{1}{\delta_k - i\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{1}{\tau^2 \mathcal{K}^+(\tau)} \frac{1}{\delta_k - i\tau} d\tau = \frac{i}{\delta_k \mathcal{K}'(0)} \left( \frac{1}{\delta_k} - \gamma_0 \right), \end{aligned}$$

а також використовуючи умову (33), отримуємо

$$h_1 - h = -u_9|_{9=0, r=\ell_2} = -\sqrt{2\pi} h \frac{i\tilde{C}}{\mathcal{K}'(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_{2k}}{\delta_k} z_{1k}^-. \quad (45)$$

**Результати обчислень.** Безрозмірні напруження  $\bar{\sigma} = \sigma_9|_{9=0} \ell / (2Gh)$  і переміщення  $\bar{u} = (u_9|_{9=0} + h_1)/h$ ,  $\ell_1 < r < \ell$ , і  $\bar{u} = (u_9|_{9=0} + (h_1 - h))/h$ ,  $0 < r < \ell_2$ , при  $m = 10/3$  обчислено для різних кутів  $\alpha$  піврозхилу пружного клина і глибини занурення жорсткої пластинки  $\ell_1 = \ell/2$ . Розподіл нормальних напружень  $\bar{\sigma}$  на лінії продовження тріщини за її вершину  $\ell < r < \infty$  показано на рис. 2, в області контакту  $\ell_2 < r < \ell_1$  – на рис. 3, нормальні пе-



реміщення верхнього берега тріщини в області  $0 < r < \ell_2$ , прилеглий до вершини клина, – на рис. 4, в області  $\ell_1 < r < \ell$  поблизу вершини тріщини – на рис. 5. Криві 1–4 відповідають значенням кута піврозхилу клина  $\alpha = \pi/4, 3\pi/10, \pi/3, 2\pi/5$ ; суцільна крива на рис. 5 відповідає значенню  $\alpha = \pi/4$ , пунктирна –  $\alpha = 2\pi/5$ .

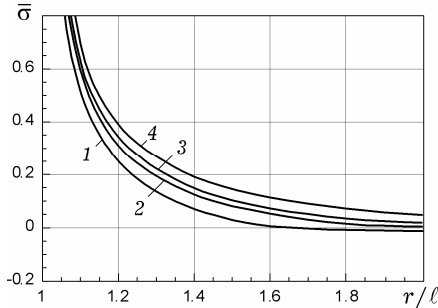


Рис. 2

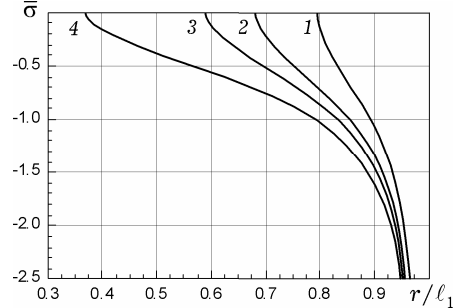


Рис. 3

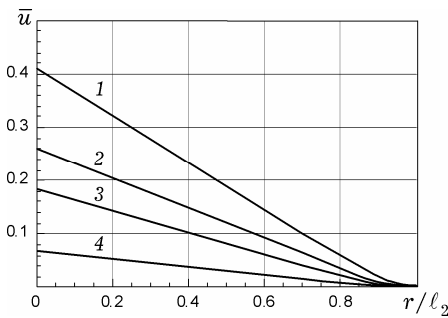


Рис. 4

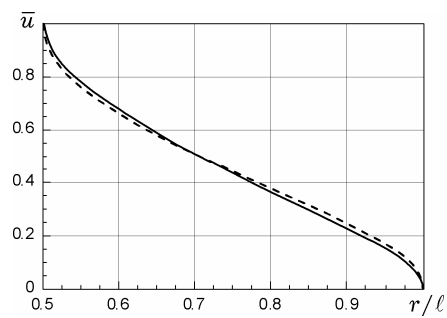


Рис. 5

Значення безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень  $\widehat{K}_I = K_I \sqrt{\ell} / (2Gh)$  для різних значень відносної глибини занурення жорсткої пластинки  $\ell_1/\ell$  і кута піврозхилу пружного клина  $\alpha$  наведено у табл. 1. Для порівняння у дужках наведено відповідні значення при нехтуванні відставанням [7]. При наближенні правого краю пластинки до вершини тріщини  $\widehat{K}_I \sim \frac{m}{1-m} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\ell_1/\ell)}}$ ,  $\ell_1/\ell \rightarrow 1$ , незалежно від кута  $\alpha$ , якщо виходити із значення коефіцієнта інтенсивності напружень у задачі про розклинювання пружної площини вздовж напівнескінченного розрізу напівнескінченною пластинкою сталої товщини [4]. Так, при  $\ell_1/\ell = 0.9$  асимптотичне значення  $\widehat{K}_I$  дорівнює 1.802, що на 3.4% перевищує значення  $\widehat{K}_I$ , наведені в останньому рядку таблиці.

Таблиця 1. Значення  $\widehat{K}_I$ .

$\ell_1/\ell \backslash \alpha$	$\pi/4$	$3\pi/10$	$\pi/3$	$2\pi/5$
0.1	0.1761 (0.1822)	0.2121 (0.2156)	0.2339 (0.2360)	0.2717 (0.2721)
0.3	0.3541 (0.3645)	0.3982 (0.4033)	0.4213 (0.4241)	0.4555 (0.4560)
0.5	0.5766 (0.5863)	0.6124 (0.6166)	0.6289 (0.6310)	0.6508 (0.6511)
0.7	0.9049 (0.9101)	0.9230 (0.9250)	0.9306 (0.9316)	0.9400 (0.9402)
0.9	1.7465 (1.7454)	1.7471 (1.7474)	1.7477 (1.7479)	1.7484 (1.7485)

У табл. 2 наведено значення відносних розмірів зони відставання  $\ell_2/\ell_1$  берегів тріщини від поверхонь жорсткої пластинки для різних значень відношення  $\ell_1/\ell$  і кута  $\alpha$ . Оцінковими для вказаних значень  $\ell_2/\ell_1$  можуть слугувати відносні розміри зони додатних контактних напружень у випадку задачі у спрощеній постановці без урахування відставання берегів тріщини поблизу вершини клина від поверхонь жорсткої пластинки [7]. Відповідні оцінкові значення, які наведено в дужках, приблизно у півтора рази менші від самих значень  $\ell_2/\ell_1$ .

Таблиця 2. Відносний розмір зони відставання  $\ell_2/\ell_1$ .

$\alpha \backslash \ell_1/\ell$	$\pi/4$	$3\pi/10$	$\pi/3$	$2\pi/5$
0.1	0.8727 (0.6405)	0.7768 (0.5363)	0.6911 (0.4597)	0.4622 (0.2892)
0.3	0.8426 (0.6136)	0.7379 (0.5068)	0.6492 (0.4305)	0.4254 (0.2664)
0.5	0.8015 (0.5793)	0.6899 (0.4718)	0.6005 (0.3973)	0.3868 (0.2424)
0.7	0.7476 (0.5371)	0.6347 (0.4326)	0.5483 (0.3622)	0.3494 (0.2191)
0.9	0.6845 (0.4902)	0.5773 (0.3929)	0.4971 (0.3281)	0.3154 (0.1978)

**Зауваження.** Отриманий розв'язок безпосередньо переноситься на задачу про розклинювання пружного клина вздовж напівнескінченної тріщини  $\ell < r < \infty$  ( $\vartheta = 0$ ) пластинкою  $\ell'_1 < r < \infty$  ( $\ell'_1 > \ell$ ) за наявності зони відставання  $\ell'_2 < r < \infty$  ( $\ell'_2 > \ell'_1$ ) і відсутності обертання на нескінченності. Якщо вибрати  $\ell'_1 = \ell^2/\ell_1$ ,  $\ell'_2 = \ell^2/\ell_2$  і у формулах (7) взяти при нових змінних  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  протилежні знаки, то знову прийдемо до інтегрального рівняння (9). Отже, побудований вище розв'язок перетворенням інверсії  $r = \ell^2/r'$  переходить у розв'язок нової задачі для напівнескінченної тріщини. При цьому на лінії симетрії клина за інверсією перетворюються нормальні переміщення і добуток нормальних напружень на радіальну координату, тобто  $u'_\vartheta(r', 0) = u_\vartheta(r, 0)$ ,  $r\sigma'_\vartheta(r', 0) = r\sigma_\vartheta(r, 0)$ . Значення ж коефіцієнта інтенсивності напружень для обох задач співпадають:  $K'_I = K_I$ .

Зауважимо також, якщо відмовитись від умови відсутності обертання на нескінченності, то у такій постановці задача про розклинювання пружного клина вздовж напівнескінченної тріщини потребує окремого розв'язання. У цьому випадку нормальні переміщення берегів тріщини в результаті відставання від поверхонь пластинки є необмеженими на нескінченності. Тому інверсійного аналога останньої задачі для скінченної тріщини при вершині клина не існує через необмежено велике зміщення вершини кожного із півклинів від поверхонь пластинки.

**Висновки.** У розглянутій задачі про розклинювання пружного клина жорсткою пластинкою у випадку, коли кут при вершині клина менший ніж  $\pi$ , має місце відставання берегів тріщини від поверхонь пластинки. При цьому зона відставання займає значну частину пластинки. Разом з тим нехтування відставанням вносить невелику похибку при обчисленні коефіцієнта інтенсивності напружень, який суттєво залежить від глибини занурення пластинки, а також від кута піврозхилу клина.

Розв'язок розглянутої задачі безпосередньо переноситься на задачу про розклинювання пружного клина вздовж напівнескінченної тріщини на його осі симетрії жорсткою пластинкою за умови відсутності обертання на нескінченності.

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – Москва: Наука, 1986. – 334 с.
2. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Физматлит, 1993. – 224 с.
3. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полуплоскость // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // Прикл. математика и механика. – 1959. – **23**, № 4. – С. 706–721.
5. Галаджева М. Р., Сирунян В. Х., Сметанин Б. И. О расклинивании упругой полуплоскости // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1974. – **27**, № 2. – С. 38–45.
6. Луцьшин Р. М. О расклинивании трещины в упругой полуплоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 10. – С. 58–62.
7. Некислих К. М., Острик В. І. Розклинювання пружного клина // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 91–96.
8. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос.: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.)
10. Сметанин Б. И. О расклинивании упругого бесконечного клина // Прикл. математика и механика. – 1969. – **33**, № 5. – С. 935–940.
11. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.

#### **РАСКЛИНИВАНИЕ УПРУГОГО КЛИНА ЖЕСТКОЙ ПЛАСТИНКОЙ В УСЛОВИЯХ КОНТАКТА С ОТСТАВАНИЕМ**

*Рассмотрена задача о расклинивании упругого клина жесткой пластинкой вдоль краевой трещины, которая находится на оси симметрии клина и выходит к его вершине. Учено отставание берегов трещины от поверхностей пластинки. С применением метода Винера – Хопфа получено аналитическое решение задачи. Найдены размер зоны отставания, коэффициент интенсивности напряжений, распределение нормальных напряжений на линии продолжения трещины и в области контакта, окружные перемещения берегов трещины.*

#### **SPLITTING OF ELASTIC WEDGE BY A RIGID PLATE UNDER CONDITIONS OF CONTACT WITH DETACHING**

*The problem on splitting of elastic wedge by a hard plate along edge crack which is on an axis of symmetry of wedge and appearing to its tip is considered. The crack sides detaching from plate surfaces is taken into account. Using the Wiener – Hopf method, an analytical solution of the problem was obtained. The dimension of detaching zone, stress intensity factors, distribution of normal stresses on crack prolongation and in contact domain, and distribution of circular displacements of crack sides are found.*

<sup>1</sup> Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

<sup>2</sup> Сум. держ. пед. ун-т, Суми,

<sup>3</sup> Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми