

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНКАХ З ПОЧАТКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ

Розвинуто уточнену математичну модель динамічної задачі взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням анізотропії термомеханічних властивостей матеріалу як у напрямку координатних ліній серединної поверхні, так і в трансверсальному напрямку. Модель включає початкові деформації і базується на припущеннях, що компоненти вектора переміщень і температура лінійно розподілені по товщині. Достовірність моделі оцінюється порівнянням розв'язків, отриманих за допомогою запропонованої моделі та теорії термопружності.

Вступ. Пружні оболонки як важливі елементи багатьох конструкцій широко використовуються у різних областях сучасної техніки, де вони працюють у складних умовах швидкозмінного нерівномірного нагріву, яке може спричинити значні температурні напруження. Тому розрахунок таких елементів конструкцій залишається проблемою, яка цікавить інженерів [12–14, 17]. Більшість досліджень у цьому напрямі стосувались однорідних конструкцій з традиційних матеріалів на основі моделей ізотропного [2, 10, 14, 15] або ортотропного тіла [11, 12, 14]. Для неоднорідних матеріалів такі дослідження проводились значно менше [3, 4, 9, 13].

Сучасні тенденції вдосконалення технологічних процесів спрямовані на заміну традиційних матеріалів новими композитними та вогнетривкими, зокрема, армованими пластиками, графітами та функціонально градієнтними матеріалами, які характеризуються високою питомою міцністю і можливістю працювати тривалий час в умовах підвищених і знижених температур [1, 5, 13, 17]. Проте ці матеріали мають низку специфічних особливостей, до яких, перш за все, слід віднести неоднорідність, наявність залишкових напружень та сильну анізотропію, пов'язану з низькою зсувною жорсткістю і трансверсальною стисливістю. Тому для розрахунку оболонкових конструкцій з таких матеріалів потрібно використовувати уточнені математичні моделі, які враховували би вказані особливості, оскільки для реальних діапазонів зміни фізико-механічних властивостей матеріалу це може призвести до суттєвих похибок [1, 16, 17].

Крім строгих методів тривимірної теорії термопружності неоднорідних тіл [3, 9, 13] та теорії армованих середовищ [1], вказані особливості можуть бути враховані також простішою двовимірною моделлю термопружності неоднорідних анізотропних оболонок, яка за рахунок введення відповідних гіпотез дозволяє описати явища, пов'язані із суттєвою анізотропією та неоднорідністю по товщині [7, 11, 16]. Такі моделі є цілком доступними в інженерній практиці для проведення розрахунків тонкостінних елементів конструкцій за умов нерівномірного нагрівання.

Метою статті є розвиток лінійної математичної моделі і шляхів дослідження динамічної поведінки податливих поперечним деформаціям зсуву і стисненню неоднорідних анізотропних термопружних оболонок з урахуванням початкових деформацій та анізотропії матеріалу як у площині серединної поверхні, так і в напрямку її нормалі.

Вихідні рівняння. Розглянемо оболонку сталої товщини $2h$, серединна поверхня G якої обмежена контуром g і віднесена до ліній головних кривин α_1, α_2 . Нехай A_1, A_2 – коефіцієнти Ляме серединної поверхні, k_1, k_2 – кривини координатних ліній, z – координата у напрямку зовнішньої нормалі до серединної поверхні. Матеріал оболонки вважаємо неоднорідним і анізотропним, що має в кожній точці одну площину пружної і теплової си-

метрії, перпендикулярну до осі z . Оболонка перебуває під дією власних напружень і поверхневого навантаження, а також нагрівається довільно розподіленими по об'єму внутрішніми джерелами тепла та тепловими потоками або навколишнім середовищем, теплообмін з яким через поверхні $z = \pm h$ відбувається згідно з законом Ньютона.

Для виведення системи рівнянь математичної моделі термопружної поведінки розглядуваної оболонки за основні візьмемо рівняння тривимірної лінійної термопружності неоднорідного анізотропного тіла [3, 8, 9], записані в криволінійних ортогональних координатах з урахуванням початкових деформацій [6, 8]. Зокрема, вирази для компонентів тензора повної деформації e_{ij} , питомої вільної енергії F та її диференціала запишемо у вигляді

$$e_{ij} = e_{ij}^0 + e_{ij}^e,$$

$$F(e_{ij}, e_{ij}^0, t) = \frac{1}{2} [c_{11}(e_{11} - e_{11}^0)^2 + c_{22}(e_{22} - e_{22}^0)^2 + c_{33}(e_{33} - e_{33}^0)^2 + c_{66}(e_{12} - e_{12}^0)^2 + c_{55}(e_{13} - e_{13}^0)^2 + c_{44}(e_{23} - e_{23}^0)^2] + c_{12}(e_{11} - e_{11}^0)(e_{22} - e_{22}^0) + c_{13}(e_{11} - e_{11}^0)(e_{33} - e_{33}^0) + c_{16}(e_{11} - e_{11}^0)(e_{12} - e_{12}^0) + c_{23}(e_{22} - e_{22}^0)(e_{33} - e_{33}^0) + c_{26}(e_{22} - e_{22}^0)(e_{12} - e_{12}^0) + c_{36}(e_{33} - e_{33}^0)(e_{12} - e_{12}^0) + c_{45}(e_{13} - e_{13}^0)(e_{23} - e_{23}^0) - [\beta_{11}^t(e_{11} - e_{11}^0) + \beta_{22}^t(e_{22} - e_{22}^0) + \beta_{33}^t(e_{33} - e_{33}^0) + \beta_{12}^t(e_{12} - e_{12}^0)] t - \frac{c_e}{2T_0} t^2, \quad (1)$$

$$dF = -SdT + \sum_{i,j} \sigma_{ij} de_{ij},$$

де

$$\begin{aligned} \beta_{11}^t &= c_{11}\alpha_{11}^t + c_{12}\alpha_{22}^t + c_{13}\alpha_{33}^t + c_{16}\alpha_{12}^t, & 1 \Leftrightarrow 2, \\ \beta_{33}^t &= c_{13}\alpha_{11}^t + c_{23}\alpha_{22}^t + c_{33}\alpha_{33}^t + c_{36}\alpha_{12}^t, \\ \beta_{12}^t &= c_{16}\alpha_{11}^t + c_{26}\alpha_{22}^t + c_{36}\alpha_{33}^t + c_{66}\alpha_{12}^t, \end{aligned}$$

$\alpha_{ij}^t(\alpha_1, \alpha_2, z)$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення; $c_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ – віднесені до ізотермічного стану коефіцієнти пружності анізотропного тіла; S – питома ентропія; T – абсолютна температура; $c_e(\alpha_1, \alpha_2, z)$ – питома теплоємність; t – приріст температури; e_{ij} – компоненти тензора повної деформації; e_{ij}^0 – компоненти тензора вільної від напружень деформації (дисторсії) [6, 8]; e_{ij}^e – компоненти тензора пружної деформації, які забезпечують нерозривність компонентів тензора повної деформації і які пов'язані з напруженнями σ_{ij} співвідношеннями закону Гука.

Для зведення тривимірної задачі теорії термопружності неоднорідного анізотропного тіла до відповідної двовимірної задачі теорії оболонок використаємо подання вектора переміщень $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, z, \tau)$ і температурного поля $t(\alpha_1, \alpha_2, z, \tau)$ у вигляді лінійних функцій від нормальної координати z :

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, z, \tau) = \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + z\boldsymbol{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2, \tau), \quad (2)$$

$$t(\alpha_1, \alpha_2, z, \tau) = T_1(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + \frac{z}{h} T_2(\alpha_1, \alpha_2, \tau), \quad (3)$$

де $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор переміщення точок серединної поверхні; $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ – вектор кутів повороту нормалі γ_1, γ_2 і поперечної нормальної деформації γ_3 ; $T_n = \frac{2n-1}{2h^n} \int_{-h}^h tz^{n-1} dz$, $n = 1, 2$, – інтегральні характеристики температури.

Тоді усередненням за координатою z із тривимірних рівнянь одержимо двовимірні рівняння теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок. Наведемо основні з них.

Кінематичні співвідношення для компонентів повної деформації у довільній точці оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\varepsilon_{11} + z\alpha_{11}}{1 + k_1 z}, & e_{13} &= \frac{\varepsilon_{13} + z\alpha_{13}}{1 + k_1 z}, & 1 \leftrightarrow 2, & & e_{33} &= \varepsilon_{33}, \\ e_{12} &= \frac{\varepsilon_{12} + z\alpha_{12}}{1 + k_1 z} + \frac{\varepsilon_{21} + z\alpha_{21}}{1 + k_2 z}, \end{aligned} \quad (4)$$

де компоненти деформації серединної поверхні оболонки $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ через узагальнені переміщення u_j, γ_j виражаються формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 u_3, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & 1 \leftrightarrow 2, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 + \gamma_1, & \alpha_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 \gamma_3, & 1 \leftrightarrow 2, \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\gamma_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \alpha_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha_1}, & 1 \leftrightarrow 2, & & \varepsilon_{33} &= \gamma_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Виключивши з (5) узагальнені переміщення і використавши відомі умови Гаусса – Кодаці, одержимо рівняння нерозривності деформацій:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_1 \alpha_{11}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \alpha_{22} - \frac{\partial A_2 \alpha_{21}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \alpha_{12} - A_1 A_2 k_1 \alpha_{23} + k_2 \left\{ -\frac{\partial A_1 \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_{22} - \frac{\partial A_2 \varepsilon_{21}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_{12} + A_1 A_2 k_1 \varepsilon_{23} \right\} = 0, \quad 1 \leftrightarrow 2, \\ &\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[-\frac{\partial A_2 \varepsilon_{22}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_1 \gamma_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \gamma_{12} + A_1 A_2 k_2 \varepsilon_{13} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[-\frac{\partial A_1 \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2 \gamma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \gamma_{12} + \right. \\ &\quad \left. + A_1 A_2 k_1 \varepsilon_{23} \right] + 2A_1 A_2 k_1 k_2 \varepsilon_{33} - A_1 A_2 (k_2 \alpha_{11} + k_1 \alpha_{22}) = 0, \\ &\alpha_{12} - \alpha_{21} + k_1 \varepsilon_{21} - k_2 \varepsilon_{12} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_1 \varepsilon_{13}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \varepsilon_{23}}{\partial \alpha_1} \right] = 0, \\ &\alpha_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \alpha_1}, \quad 1 \leftrightarrow 2, \end{aligned} \quad (6)$$

ТУТ $\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$.

Рівняння руху є такими:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22} + \frac{\partial A_1 N_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{12} + \right. \\
& \quad \left. + k_1 A_1 A_2 N_{13} \right) = \ddot{q}_1 - q_1, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_{23}}{\partial \alpha_2} \right) - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} = \ddot{q}_3 - q_3, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \right. \\
& \quad \left. - A_1 A_2 N_{13} \right) = \ddot{J}_1 - m_1, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{23}}{\partial \alpha_2} \right) - k_1 M_{11} - k_2 M_{22} - N_{33} = \ddot{J}_3 - m_3, \quad (7)
\end{aligned}$$

де $\mathbf{N} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}, N_{21}, N_{13}, N_{23}, N_{33}\}$ і $\mathbf{M} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{23}\}$ – вектори зусиль і моментів, причому

$$\begin{aligned}
\{N_{11}, N_{12}, N_{13}\} &= \int_{-h}^h \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\} (1 + k_2 z) dz, \\
\{M_{11}, M_{12}, M_{13}\} &= \int_{-h}^h \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\} (1 + k_2 z) z dz, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \\
N_{33} &= \int_{-h}^h \sigma_{33} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz,
\end{aligned}$$

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ і $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – зведені до серединної поверхні вектори зусилля і моменту зовнішнього поверхневого навантаження [10];

$$\begin{aligned}
q_1 &= \rho_1 u_1 + \rho_2 \gamma_1, & q_2 &= \rho_1 u_2 + \rho_2 \gamma_2, & q_3 &= \rho_1 u_3 + \rho_2 \gamma_3, \\
J_1 &= \rho_2 u_1 + \rho_3 \gamma_1, & J_2 &= \rho_2 u_2 + \rho_3 \gamma_2, & J_3 &= \rho_2 u_3 + \rho_3 \gamma_3, \\
\rho_j &= \int_{-h}^h (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) z^{j-1} \rho dz, & & & j &= 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що до рівнянь руху (7) потрібно долучити додаткове (недиференціальне) рівняння [10] $N_{12} - N_{21} + k_1 M_{12} - k_2 M_{21} = 0$, яке впливає з умови парності дотичних напружень $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Фізичні рівняння для зусиль і моментів набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
N_{11} &= [A_{11} + (k_2 - k_1)B_{11} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{11}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + A_{12}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) + \\
& \quad + A_{16}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + (A_{13} + k_2 B_{13})(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + \\
& \quad + [A_{16} + (k_2 - k_1)B_{16} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{16}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) + \\
& \quad + [B_{11} + (k_2 - k_1)D_{11}](x_{11} - x_{11}^0) + B_{12}(x_{22} - x_{22}^0) + \\
& \quad + [B_{16} + (k_2 - k_1)D_{16}](x_{12} - x_{12}^0) + B_{16}(x_{21} - x_{21}^0) - \\
& \quad - (A_{11}^t + k_2 B_{11}^t)T - (B_{11}^t + k_2 D_{11}^t) \frac{T^*}{h}, \quad 1 \Leftrightarrow 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{12} = & [A_{16} + (k_2 - k_1)B_{16} + (k_1^2 - k_1k_2)D_{16}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + A_{26}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) + \\
& + A_{66}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + (A_{36} + k_2B_{36})(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + \\
& + [A_{66} + (k_2 - k_1)B_{66} + (k_1^2 - k_1k_2)D_{66}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) + \\
& + [B_{16} + (k_2 - k_1)D_{16}](\mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{11}^0) + B_{26}(\mathbf{x}_{22} - \mathbf{x}_{22}^0) + \\
& + [B_{66} + (k_2 - k_1)D_{66}](\mathbf{x}_{12} - \mathbf{x}_{12}^0) + B_{66}(\mathbf{x}_{21} - \mathbf{x}_{21}^0) - \\
& - (A_{12}^t + k_2B_{12}^t)T - (B_{12}^t + k_2D_{12}^t)\frac{T^*}{h}, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \\
N_{33} = & (A_{13} + k_2B_{13})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + (A_{23} + k_1B_{23})(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) + (A_{36} + \\
& + k_2B_{36})(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) + [A_{33} + (k_2 + k_1)B_{33} + k_1k_2D_{33}](\varepsilon_{33} - \\
& - \varepsilon_{33}^0) + (A_{36} + k_1B_{36})(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + (B_{13} + k_2D_{13})(\mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{11}^0) + \\
& + (B_{23} + k_1D_{23})(\mathbf{x}_{22} - \mathbf{x}_{22}^0) + (B_{36} + k_2D_{36})(\mathbf{x}_{12} - \mathbf{x}_{12}^0)\mathbf{x}_{12} + \\
& + (B_{36} + k_1D_{36})(\mathbf{x}_{21} - \mathbf{x}_{21}^0) - [A_{33}^t + (k_1 + k_2)B_{33}^t + \\
& + k_1k_2D_{33}^t]T - [B_{33}^t + (k_1 + k_2)D_{33}^t]\frac{T^*}{h}, \\
N_{13} = & k'\{A_{45}(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^0) + [A_{55} + (k_2 - k_1)B_{55} + (k_1^2 - k_1k_2)D_{55}](\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^0) + \\
& + [B_{55} + (k_2 - k_1)D_{55}](\mathbf{x}_{13} - \mathbf{x}_{13}^0) + \\
& + B_{45}(\mathbf{x}_{23} - \mathbf{x}_{23}^0)\}, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \quad 4 \Leftrightarrow 5, \\
M_{13} = & k'\{B_{45}(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^0) + [B_{55} + (k_2 - k_1)D_{55}](\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^0) + D_{55}(\mathbf{x}_{13} - \mathbf{x}_{13}^0) + \\
& + D_{45}(\mathbf{x}_{23} - \mathbf{x}_{23}^0)\}, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \quad 4 \Leftrightarrow 5, \\
M_{11} = & [B_{11} + (k_2 - k_1)D_{11}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + B_{12}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) + (B_{13} + k_2D_{13}) \times \\
& \times (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + [B_{16} + (k_2 - k_1)D_{16}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) + B_{16}(\varepsilon_{21} - \\
& - \varepsilon_{21}^0) + D_{11}(\mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{11}^0) + D_{12}(\mathbf{x}_{22} - \mathbf{x}_{22}^0) + D_{16}(\mathbf{x}_{12} - \mathbf{x}_{12}^0 + \\
& + \mathbf{x}_{21} - \mathbf{x}_{21}^0) - (B_{11}^t + k_2D_{11}^t)T - D_{11}^t\frac{T^*}{h}, \quad 1 \Leftrightarrow 2, \\
M_{12} = & [B_{16} + (k_2 - k_1)D_{16}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + B_{26}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) + (B_{36} + k_2D_{36}) \times \\
& \times (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + [B_{66} + (k_2 - k_1)D_{66}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) + B_{66}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + \\
& + D_{16}(\mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{11}^0) + D_{26}(\mathbf{x}_{22} - \mathbf{x}_{22}^0) + D_{66}(\mathbf{x}_{12} - \mathbf{x}_{12}^0 + \\
& + \mathbf{x}_{21} - \mathbf{x}_{21}^0) - (B_{12}^t + k_2D_{12}^t)T - D_{12}^t\frac{T^*}{h}, \quad 1 \Leftrightarrow 2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Тут інтегральні характеристики коефіцієнтів термопружності A_{ij}^t , B_{ij}^t , D_{ij}^t і початкових деформацій ε_{ij}^0 , \mathbf{x}_{ij}^0 подаються формулами

$$\{A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\} = \int_{-h}^h \{1, z, z^2\} \beta_{ij}^t(\alpha_1, \alpha_2, z) dz,$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e_{ij}^0 dz, \quad \mathbf{x}_{ij}^0 = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h e_{ij}^0 z dz,$$

$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^h \{1, z, z^2\} c_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z) dz$ – коефіцієнти мембранної, мембранно-згинної і згинної жорсткостей відповідно (жорсткостями вищих порядків знехтувано); k' – коефіцієнт зсуву; $T \equiv T_1$; $T^* \equiv T_2$.

Інтегральні характеристики температури T_1 і T_2 будемо визначати з рівнянь теплопровідності

$$\Delta_{(1)} T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(1)} T_2 - C^{(1)} \dot{T}_1 - C^{(2)} \dot{T}_2 - T_0 f_1(\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{x}}) + W_1^t = F_1^c,$$

$$\Delta_{(2)} T_1 + \Delta_{(3)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(2)} T_2 - \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{h^2} T_2 - C^{(2)} \dot{T}_1 - C^{(3)} \dot{T}_2 - T_0 f_2(\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{x}}) + W_2^t = F_2^c,$$
(9)

де

$$\Delta^{(k)} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \Lambda_{11}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \Lambda_{12}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \Lambda_{22}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \Lambda_{12}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right],$$

$$f_1(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j}^2 [A_{ij}^t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + B_{ij}^t (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^0)] + A_{33}^t (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0),$$

$$f_2(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = \frac{1}{h} \left(\sum_{i,j}^2 (B_{ij}^t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + D_{ij}^t (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^0)) + B_{33}^t (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) \right),$$

$$W_n^t = \int_{-h}^h w_t \left(\frac{z}{h} \right)^{n-1} dz, \quad n = 1, 2, \quad k_0 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2),$$

$$\{\Lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^h \{\lambda_{ij}, c_e\} \left(\frac{z}{h} \right)^{k-1} dz, \quad k = 1, 2, 3,$$

w_t – густина теплових джерел; $\lambda_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ – коефіцієнти теплопровідності; F_1^c, F_2^c – функції, які залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$. У випадку притоку тепла будемо мати $F_n^c = q_3^+ - (-1)^n q_3^-$, де $q_3^\pm = \pm q_3^t \Big|_{z=\pm h}$. За умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем з температурою $t_c^\pm(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ і коефіцієнтами тепловіддачі $\alpha_z^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ на поверхнях $z = \pm h$ маємо

$$F_n^c = (T_1 - t_1^c) \varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^c) \varepsilon_{3-n}^t,$$

де

$$\varepsilon_n^t = \alpha_z^+ - (-1)^n \alpha_z^-, \quad t_n^c = \frac{1}{2} (t_c^+ - (-1)^n t_c^-), \quad n = 1, 2.$$

Рівняння теплопровідності (9) разом з рівняннями руху (7), фізичними (8) і геометричними (5), (6) співвідношеннями складають повну систему рівнянь теорії взаємозв'язаної термопружності податливих поперечним де-

формаціям зсуву і стисненню неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням початкових деформацій $\varepsilon_{ij}^0, \alpha_{ij}^0$. Для однозначності розв'язку цієї системи на краях оболонки потрібно задати відповідні механічні і температурні граничні умови. Розглянемо випадок, коли границі контуру середньої поверхні співпадають з координатними лініями. Тоді для механічних умов задається по одній величині з кожної пари $(N_{11}, u_1), (N_{12}, u_2), (N_{13}, u_3), (M_{11}, \gamma_1), (M_{12}, \gamma_2), (M_{13}, \gamma_3)$ при $\alpha_1 = \text{const}$ і по одній величині з кожної пари $(N_{22}, u_2), (N_{12}, u_1), (N_{23}, u_3), (M_{22}, \gamma_2), (M_{12}, \gamma_1), (M_{23}, \gamma_3)$ при $\alpha_2 = \text{const}$. Для температурних умов на цих краях потрібно задати по дві комбінації вигляду

$$c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + c_4 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + c_5 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + c_6 \frac{\partial T_2}{\partial x_2},$$

де c_i – сталі, значення яких залежать від типу граничних умов і краю, на якому вони задані. Також у момент часу $\tau = 0$ повинні бути задані значення таких величин: $u_k(x_1, x_2, 0), \dot{u}_k(x_1, x_2, 0), \gamma_k(x_1, x_2, 0), \dot{\gamma}_k(x_1, x_2, 0), k = 1, 2, 3, T_1(x_1, x_2, 0), T_2(x_1, x_2, 0)$ – початкові умови.

Методи розв'язування крайових задач. Одним із шляхів розв'язання наведеної системи диференціальних рівнянь є зведення її до системи в узагальнених переміщеннях і характеристиках температури. Для цього потрібно у фізичних рівняннях (8) і в рівняннях теплопровідності (9) замінити компоненти деформації їхніми виразами (5) через компоненти узагальнених переміщень, а потім одержані фізичні співвідношення підставити у рівняння руху (7). Внаслідок цього отримаємо таку взаємозв'язану систему рівнянь:

$$L_{r1} u_1 + L_{r2} u_2 + L_{r3} u_3 + L_{r4} \gamma_1 + L_{r5} \gamma_2 + L_{r6} \gamma_3 + L_{r7} T_1 + L_{r8} T_2 = b_r, \\ r = 1, 2, \dots, 6, \quad (10)$$

$$L_{s1} u_1 + L_{s2} u_2 + L_{s3} u_3 + L_{s4} \gamma_1 + L_{s5} \gamma_2 + L_{s6} \gamma_3 + L_{s7} T_1 + L_{s8} T_2 = b_s^t, \\ s = 7, 8, \quad (11)$$

де L_{rk} і L_{sk} – диференціальні оператори порядку, не вище другого, зі змінними коефіцієнтами, причому $L_{rk} = L_{kr}$ для $r, k = 1, 2, \dots, 6$. Зокрема, для циліндричної оболонки запишемо деякі з них:

$$L_{11} = \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \partial_1^2 + 2 \frac{A_{16}}{R} \partial_1 \partial_2 + \left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} \partial_2^2 - \rho_1 \partial_\tau^2, \\ L_{12} = \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right) \partial_1^2 + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{R} \partial_1 \partial_2 + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} \partial_2^2, \\ L_{13} = \frac{A_{12}}{R} \partial_1 + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} \partial_2, \\ L_{14} = \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \partial_1^2 + 2 \frac{B_{16}}{R} \partial_1 \partial_2 + \left(B_{66} - \frac{D_{66}}{R} \right) \frac{1}{R^2} \partial_2^2 - \rho_2 \partial_\tau^2, \\ L_{15} = \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \partial_1^2 + (B_{12} + B_{66}) \frac{1}{R} \partial_1 \partial_2 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \frac{1}{R^2} \partial_2^2, \\ L_{16} = \left(A_{13} + (B_{13} + B_{12}) \frac{1}{R} \right) \partial_1 + \left(A_{36} + \frac{B_{26}}{R} - \frac{D_{26}}{R^2} \right) \frac{1}{R} \partial_2, \\ L_{17} = - \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \partial_1 - \frac{A_{12}}{R} \partial_2, \quad L_{18} = - \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{1}{h} \partial_1 - \frac{B_{12}^t}{Rh} \partial_2, \\ \dots, \dots, \dots$$

$$\begin{aligned}
L_{71} &= -T_0 \left(A_{11}^t \partial_1 \partial_t + 2 \frac{A_{12}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right), & L_{72} &= -T_0 \left(2A_{12}^t \partial_1 \partial_t + \frac{A_{22}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right), \\
L_{73} &= -T_0 \frac{A_{22}^t}{R} \partial_\tau, & L_{74} &= -T_0 \left(B_{11}^t \partial_1 \partial_t + 2 \frac{B_{12}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right), \\
L_{75} &= -T_0 \left(2B_{12}^t \partial_1 \partial_\tau + \frac{B_{22}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right), & L_{76} &= -T_0 \left(A_{33}^t + \frac{B_{22}^t}{R} \right) \partial_\tau, \\
L_{77} &= \Lambda_{11}^{(1)} \partial_1^2 + 2 \frac{\Lambda_{12}^{(1)}}{R} \partial_1 \partial_2 + \frac{\Lambda_{22}^{(1)}}{R^2} \partial_2^2 - C^{(1)} \partial_t - \varepsilon_1^t, \\
L_{78} &= \Lambda_{11}^{(2)} \partial_1^2 + 2 \frac{\Lambda_{12}^{(2)}}{R} \partial_1 \partial_2 + \frac{\Lambda_{22}^{(2)}}{R^2} \partial_2^2 - C^{(2)} \partial_\tau + \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{Rh} - \varepsilon_2^t, \\
L_{81} &= \frac{L_{74}}{h}, & L_{82} &= \frac{L_{75}}{h}, & L_{83} &= -T_0 \frac{B_{22}^t}{Rh} \partial_\tau, \\
L_{84} &= -T_0 \left(D_{11}^t \partial_1 \partial_\tau + 2 \frac{D_{12}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right) \frac{1}{h}, \\
L_{85} &= -T_0 \left(2D_{12}^t \partial_1 \partial_\tau + \frac{D_{22}^t}{R} \partial_2 \partial_\tau \right) \frac{1}{h}, & L_{86} &= -T_0 \left(B_{33}^t + \frac{D_{22}^t}{R} \right) \frac{1}{h} \partial_\tau, \\
L_{87} &= \Lambda_{11}^{(2)} \partial_1^2 + 2 \frac{\Lambda_{12}^{(2)}}{R} \partial_1 \partial_2 + \frac{\Lambda_{22}^{(2)}}{R^2} \partial_2^2 - C^{(2)} \partial_\tau - \varepsilon_2^t, \\
L_{88} &= \Lambda_{11}^{(3)} \partial_1^2 + 2 \frac{\Lambda_{12}^{(3)}}{R} \partial_1 \partial_2 + \frac{\Lambda_{22}^{(3)}}{R^2} \partial_2^2 - C^{(3)} \partial_\tau - \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{h^2} + \frac{\Lambda_{33}^{(2)}}{Rh} - \varepsilon_1^t.
\end{aligned}$$

Тут позначено $\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$, $\partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_2}$, $\partial_\tau \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Вільні члени b_r системи (10) виражаються через зовнішнє силове навантаження та через початкові деформації і, зокрема, для циліндричної оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{11}^0 + A_{12} \partial_1 \varepsilon_{22}^0 + \left(A_{13} + \frac{B_{13}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \partial_1 \mathbf{x}_{11}^0 + \\
&\quad + A_{16} \partial_1 \varepsilon_{12}^0 + B_{12} \partial_1 \mathbf{x}_{22}^0 + B_{16} \partial_1 \mathbf{x}_{12}^0 + D_{16} \partial_1 \omega_{12}^0 + \\
&\quad + \left[A_{16} \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \partial_2 \varepsilon_{22}^0 + A_{36} \partial_2 \varepsilon_{33}^0 + \right. \\
&\quad + \left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{R^2} \right) \partial_2 \varepsilon_{12}^0 + B_{16} \partial_2 \mathbf{x}_{11}^0 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \partial_2 \mathbf{x}_{22}^0 + \\
&\quad \left. + \left(B_{66} - \frac{D_{66}}{R} \right) \partial_2 \mathbf{x}_{12}^0 + D_{66} \partial_2 \omega_{12}^0 \right] \frac{1}{R} - q_1, \\
b_2 &= \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{11}^0 + A_{26} \partial_1 \varepsilon_{22}^0 + \left(A_{36} + \frac{B_{36}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \partial_1 \mathbf{x}_{11}^0 + \\
&\quad + A_{66} \partial_1 \varepsilon_{12}^0 + B_{26} \partial_1 \mathbf{x}_{22}^0 + B_{66} \partial_1 \mathbf{x}_{12}^0 + D_{66} \partial_1 \omega_{12}^0 + \\
&\quad + \left[A_{12} \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \left(A_{22} - \frac{B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^2} \right) \partial_2 \varepsilon_{22}^0 + A_{23} \partial_2 \varepsilon_{33}^0 + \right. \\
&\quad \left. + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \partial_2 \varepsilon_{12}^0 + B_{12} \partial_2 \mathbf{x}_{11}^0 + \left(B_{22} - \frac{D_{22}}{R} \right) \partial_2 \mathbf{x}_{22}^0 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \partial_2 \mathbf{x}_{12}^0 + D_{26} \partial_2 \omega_{12}^0 \Big] \frac{1}{R} + k' \left[A_{45} \varepsilon_{13}^0 + \left(A_{44} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{B_{44}}{R} + \frac{D_{44}}{R^2} \right) \varepsilon_{23}^0 + B_{45} \mathbf{x}_{13}^0 + \left(B_{44} - \frac{D_{44}}{R} \right) \mathbf{x}_{23}^0 \right] \frac{1}{R} - q_2, \\
b_3 = & \left[A_{12} \varepsilon_{11}^0 + \left(A_{22} - \frac{B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^2} \right) \varepsilon_{22}^0 + A_{23} \varepsilon_{33}^0 + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \varepsilon_{12}^0 + B_{12} \mathbf{x}_{11}^0 + \left(B_{22} - \frac{D_{22}}{R} \right) \mathbf{x}_{22}^0 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \mathbf{x}_{12}^0 + \right. \\
& \left. + D_{26} \omega_{12}^0 \right] \frac{1}{R} - k' \left[\left(A_{55} + \frac{B_{55}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{13}^0 + A_{45} \partial_1 \varepsilon_{23}^0 + \left(B_{55} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{D_{55}}{R} \right) \partial_1 \mathbf{x}_{13}^0 + B_{45} \partial_1 \mathbf{x}_{23}^0 \right] - k' \left[A_{45} \partial_2 \varepsilon_{13}^0 + \left(A_{44} - \frac{B_{44}}{R} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{D_{44}}{R^2} \right) \partial_2 \varepsilon_{23}^0 + B_{45} \partial_2 \mathbf{x}_{13}^0 + \left(B_{44} - \frac{D_{44}}{R} \right) \partial_2 \mathbf{x}_{23}^0 \right] \frac{1}{R} - q_3, \\
b_4 = & \left[B_{16} \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \partial_2 \varepsilon_{22}^0 + B_{36} \partial_2 \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{66} - \frac{D_{66}}{R} \right) \partial_2 \varepsilon_{12}^0 + \right. \\
& \left. + D_{16} \partial_2 \mathbf{x}_{11}^0 + D_{26} \partial_2 \mathbf{x}_{22}^0 + D_{66} \partial_2 \mathbf{x}_{12}^0 \right] \frac{1}{R} + \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{11}^0 + \\
& + B_{12} \partial_1 \varepsilon_{22}^0 + \left(B_{13} + \frac{D_{13}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{33}^0 + B_{16} \partial_1 \varepsilon_{12}^0 + D_{11} \partial_1 \mathbf{x}_{11}^0 + \\
& + D_{12} \partial_1 \mathbf{x}_{22}^0 + D_{16} \partial_1 \mathbf{x}_{12}^0 - k' \left[\left(A_{55} + \frac{B_{55}}{R} \right) \varepsilon_{13} + \right. \\
& \left. + A_{45} \varepsilon_{23} + \left(B_{55} + \frac{D_{55}}{R} \right) \mathbf{x}_{13} + B_{45} \mathbf{x}_{23} \right] - m_1, \\
b_5 = & \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{11}^0 + B_{26} \partial_1 \varepsilon_{22}^0 + \left(B_{36} + \frac{D_{36}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{33}^0 + B_{66} \partial_1 \varepsilon_{12}^0 + \\
& + D_{16} \partial_1 \mathbf{x}_{11}^0 + D_{26} \partial_1 \mathbf{x}_{22}^0 + D_{66} \partial_1 \mathbf{x}_{12}^0 - k' \left[A_{45} \varepsilon_{13}^0 + \left(A_{44} - \frac{B_{44}}{R} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{D_{44}}{R^2} \right) \varepsilon_{23}^0 + B_{45} \mathbf{x}_{13}^0 + \left(B_{44} - \frac{D_{44}}{R} \right) \mathbf{x}_{23}^0 \right] + \left[B_{12} \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \right. \\
& \left. + \left(B_{22} - \frac{D_{22}}{R} \right) \partial_2 \varepsilon_{22}^0 + B_{23} \partial_2 \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \partial_2 \varepsilon_{12}^0 + \right. \\
& \left. + D_{12} \partial_2 \mathbf{x}_{11}^0 + D_{22} \partial_2 \mathbf{x}_{22}^0 + D_{26} \partial_2 \mathbf{x}_{12}^0 \right] \frac{1}{R} + \\
& + B_{22}^t \frac{1}{R} \partial_2 T_1 + D_{22}^t \frac{1}{Rh} \partial_2 T_2 - m_2, \\
b_6 = & \left[B_{12} \varepsilon_{11}^0 + \left(B_{22} - \frac{D_{22}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0 + B_{23} \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \varepsilon_{12}^0 + \right. \\
& \left. + D_{12} \mathbf{x}_{11}^0 + D_{22} \mathbf{x}_{22}^0 + D_{26} \mathbf{x}_{12}^0 \right] \frac{1}{R} + \left(A_{13} + \frac{B_{13}}{R} \right) \varepsilon_{11}^0 + \\
& + A_{23} \varepsilon_{22}^0 + \left(A_{33} + \frac{B_{33}}{R} \right) \varepsilon_{33}^0 + \left(B_{13} + \frac{D_{13}}{R} \right) \mathbf{x}_{11}^0 + A_{36} \varepsilon_{12}^0 + \\
& + B_{23} \mathbf{x}_{22}^0 + B_{36} \mathbf{x}_{12}^0 + D_{36} \omega_{12}^0 - k' \left[\left(B_{55} + \frac{D_{55}}{R} \right) \partial_1 \varepsilon_{13}^0 + \right. \\
& \left. + B_{45} \partial_1 \varepsilon_{23}^0 + D_{55} \partial_1 \mathbf{x}_{13}^0 + D_{45} \partial_1 \mathbf{x}_{23}^0 \right] - k' \left[B_{45} \partial_2 \varepsilon_{13}^0 + \right. \\
& \left. + \left(B_{44} - \frac{D_{44}}{R} \right) \partial_2 \varepsilon_{23}^0 + D_{45} \partial_2 \mathbf{x}_{13}^0 + D_{44} \partial_2 \mathbf{x}_{23}^0 \right] \frac{1}{R} + m_3.
\end{aligned}$$

Вільні члени b_s^t системи (11) залежать від способу нагрівання поверхонь $z = \pm h$, а також від початкових деформацій. Так, у випадку конвективного теплообміну маємо

$$b_7^t = -A_{11}^t \varepsilon_{11}^0 - A_{22}^t \varepsilon_{22}^0 - A_{33}^t \varepsilon_{33}^0 - A_{12}^t \varepsilon_{12}^0 - B_{11}^t \alpha_{11}^0 - B_{22}^t \alpha_{22}^0 - B_{12}^t \alpha_{12}^0 - \\ - W_1^t - \varepsilon_1^t t_1^c - \varepsilon_2^t t_2^c,$$

$$b_8^t = (-B_{11}^t \varepsilon_{11}^0 - B_{22}^t \varepsilon_{22}^0 - B_{33}^t \varepsilon_{33}^0 - B_{12}^t \varepsilon_{12}^0 - D_{11}^t \alpha_{11}^0 - D_{22}^t \alpha_{22}^0 - D_{12}^t \alpha_{12}^0) \frac{1}{h} - \\ - W_2^t - \varepsilon_1^t t_1^c - \varepsilon_2^t t_2^c.$$

Система диференціальних рівнянь (10), (11) для визначення восьми функцій $u_j, \gamma_j, j = 1, 2, 3, T_1, T_2$ є системою шістнадцятого порядку відносно просторових координат і чотирнадцятого порядку відносно часу. Розв'язавши цю систему за певних граничних і початкових умов, знайдемо шукані функції узагальнених переміщень u_j, γ_j та інтегральних характеристик температури T_1, T_2 . Знаючи їх, за формулами (5) і (8) визначимо деформації $\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}$ та зусилля-моменти N_{ij}, M_{ij} на серединній поверхні оболонки. Потім за допомогою формул (2)–(4) та співвідношення Дюгамеля – Неймана знаходимо напружено-деформований стан і температуру в довільній точці оболонки.

Як частковий випадок з наведених рівнянь впливають рівняння термопружності для однорідних анізотропних [11] і ізотропних [10] оболонок, а також для оболонок з початковими деформаціями [6].

Якщо знехтувати впливом деформації на теплопровідність, то одержимо рівняння незв'язаної задачі теорії температурних напружень неоднорідних анізотропних оболонок і рівняння теорії теплопровідності, які в різних варіантах для однорідних ізотропних оболонок наведені в роботах [2, 10]. Аналогічні рівняння для неоднорідних анізотропних пластинок в рамках класичної теорії виведені в роботах [3, 4, 9].

Іншим важливим методом побудови розв'язків задач термопружності неоднорідних анізотропних оболонок є варіаційний [7]. Для цього можуть бути використані як диференціальні, так і інтегральні варіаційні принципи. Так, для інтегрального варіаційного принципу типу Гамільтона застосуємо метод узагальнених координат.

Розглянемо неперервну послідовність миттєвих станів оболонки між двома фіксованими моментами часу τ_1 і τ_2 . Піддамо варіюванню функції u_i, γ_i, R_n (де $R_n = T_n/T_0, i = 1, 2, 3, n = 1, 2$) і будемо вважати, що в початковий і кінцевий моменти розглядуваного інтервалу часу варіюваний стан співпадає з дійсним $[\delta u_i, \delta \gamma_i, \delta R_n]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$. Тоді, використовуючи рівняння руху, балансові рівняння теплопровідності, інтегрування частинами та формулу Гріна, одержимо варіаційний принцип, який можна вважати узагальненням на задачі неоднорідних анізотропних оболонок відомого принципу Гамільтона:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta \mathcal{F} - \delta \mathcal{K} + \delta \mathcal{D}) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta \mathcal{L}_q - \delta \mathcal{L}_t) d\tau, \quad (12)$$

де \mathcal{F} і \mathcal{K} – відповідно вільна та кінетична енергії в розглядуваній теорії оболонок; \mathcal{D} – функція дисипації; $\mathcal{L}_q, \mathcal{L}_t$ – роботи, які виконуються зовнішнім силовим і температурним навантаженням відповідно.

Припустимо, що функції u_i , γ_i , \mathcal{R}_n залежать від деяких узагальнених координат $q_m = q_m(\tau)$. Тоді, використовуючи методи варіаційного числення, подамо рівняння (12) у формі рівнянь руху Лагранжа для систем з розсіюванням енергії

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_m} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial}{\partial q_m} (\mathcal{F} - \mathcal{K}) = \mathcal{Q}_m, \quad (13)$$

де \mathcal{Q}_m – узагальнені сили.

У випадку лінійної залежності функцій u_i , γ_i , \mathcal{R}_n від узагальнених координат використання (13) дозволяє звести задачу термопружності неоднорідних анізотропних оболонок до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно узагальнених координат.

Оболонки шаруватої структури. Для визначення інтегральних характеристик фізико-механічних параметрів неоднорідного за товщиною матеріалу оболонки потрібно задати їхню залежність від координати z . Якщо оболонка виготовлена з функціонально градієнтного матеріалу з неперервною неоднорідністю за товщиною, то вибирають степеневу залежність [13] $c_{ij} = (zk_1)^n b_{ij}$, $\rho = (zk_1)^n \rho_0$, де b_{ij} , ρ_0 , n – константи, причому n називають параметром неоднорідності. Якщо оболонка складена з жорстко з'єднаних між собою N однорідних анізотропних шарів різної товщини h_k , то фізико-механічні характеристики такого кусково-однорідного матеріалу як одного цілого можна подати у вигляді [3, 6, 9]

$$p(z) = p_1 + \sum_{k=1}^{N-1} (p_{k+1} - p_k) S_+(z - z_k), \quad (14)$$

де $S_+(x)$ – одинична асиметрична функція; p_k – фізико-механічні характеристики k -го шару; z_k – координата границі розділу k -го і $(k+1)$ -го шарів, причому $z_k = -h + \sum_{m=1}^k h_m$.

Тоді інтегральні характеристики A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , A_{ij}^t , B_{ij}^t , D_{ij}^t , $\Lambda_{ij}^{(r)}$, $C^{(r)}$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \eta_1(c_{ij}), & B_{ij} &= \eta_2(c_{ij}), & D_{ij} &= \eta_3(c_{ij}), \\ A_{ij}^t &= \eta_1(\beta_{ij}^t), & B_{ij}^t &= \eta_2(\beta_{ij}^t), & D_{ij}^t &= \eta_3(\beta_{ij}^t), \\ \Lambda_{ij}^{(r)} &= \frac{1}{h^{r-1}} \eta_r(\lambda_{ij}), & C^{(r)} &= \frac{1}{h^{r-1}} \eta_r(c_e), & r &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\eta_r(p) = \frac{1}{r} \left\{ [h^r - (-1)^r h^r] p_1 + \sum_{k=1}^{N-1} (p_{k+1} - p_k) (h^r - z_k^r) \right\}, \quad r = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Залежно від способу розміщення шарів усі шаруваті конструкції можна поділити на три типи [1, 5]: з симетрично розміщеними, з антисиметрично розміщеними та несиметрично розміщеними шарами відносно середньої поверхні.

Для кожного з цих типів співвідношення (15) спрощуються. Крім цього, при обчисленні за формулами (16) потрібно враховувати, чи всі шари мають однакову товщину – конструкція регулярної структури, чи різну – конструкція нерегулярної структури.

Наведемо значення виразів (15) для двох випадків шаруватої оболонки регулярної структури з симетрично розміщеними відносно серединної поверхні однорідними ортотропними шарами, які мають однакові властивості і кількість яких вважатимемо парною.

У першому випадку розглянемо оболонки з ортогональною орієнтацією шарів, тобто оболонки, в яких ортотропні осі симетрії кожного шару орієнтовані під кутами 0° або 90° до координатних осей. У цьому випадку значення деяких коефіцієнтів жорсткості будуть нульовими:

$$\begin{aligned} A_{i6} = D_{i6} = 0, \quad B_{ij} = B_{ij}^t = 0, \quad A_{45} = B_{45} = D_{45} = 0, \\ A_{12}^t = D_{12}^t = 0, \quad \Lambda_{ij}^{(2)} = \rho_2 = C^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

а інші коефіцієнти ефективної жорсткості через коефіцієнти пружності кожного шару c_{ij} , згідно з формулами (15), матимуть вигляд

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} = h(c_{11} + c_{22}), \quad A_{13} = A_{23} = h(c_{13} + c_{23}), \\ A_{44} = A_{55} = h(c_{44} + c_{55}), \quad \{A_{12}, A_{66}, A_{33}\} = 2h\{c_{12}, c_{66}, c_{33}\}, \\ A_{11}^t = A_{22}^t = h(\beta_{11}^t + \beta_{22}^t), \quad A_{33}^t = 2h\beta_{33}^t, \\ \{D_{11}, D_{22}\} = \frac{h^3}{3} \left[\{c_{11}, c_{22}\} \left(1 + \frac{3}{N}\right) + \{c_{22}, c_{11}\} \left(1 - \frac{3}{N}\right) \right], \\ \{D_{44}, D_{55}\} = \frac{h^3}{3} \left[\{c_{44}, c_{55}\} \left(1 + \frac{3}{N}\right) + \{c_{55}, c_{44}\} \left(1 - \frac{3}{N}\right) \right], \\ \{D_{11}^t, D_{22}^t\} = \frac{h^3}{3} \left[\{\beta_{11}^t, \beta_{22}^t\} \left(1 + \frac{3}{N}\right) + \{\beta_{22}^t, \beta_{11}^t\} \left(1 - \frac{3}{N}\right) \right], \\ \{D_{12}, D_{66}\} = \frac{2h^3}{3} \{c_{12}, c_{66}\}, \\ \{\Lambda_{11}^{(3)}, \Lambda_{22}^{(3)}\} = \frac{h}{3} \left[\{\lambda_{11}, \lambda_{22}\} \left(1 + \frac{3}{N}\right) + \{\lambda_{22}, \lambda_{11}\} \left(1 - \frac{3}{N}\right) \right], \\ \Lambda_{11}^{(1)} = \Lambda_{22}^{(1)} = h(\lambda_{11} + \lambda_{22}), \quad \Lambda_{33}^{(1)} = 2h\lambda_{33}, \\ C^{(1)} = 2hc_e, \quad C^{(3)} = \frac{2}{3}hc_e. \end{aligned} \quad (17)$$

У другому випадку розглянемо оболонки з косокутною орієнтацією шарів, тобто оболонки, в яких осі ортотропії кожного шару орієнтовані під кутами $+\varphi$ або $-\varphi$ до координатних осей. У цьому випадку значення таких коефіцієнтів будуть нульовими:

$$\begin{aligned} A_{i6} = 0, \quad A_{45} = B_{45} = 0, \quad B_{ij} = B_{ij}^t = 0, \\ A_{12}^t = 0, \quad \Lambda_{12}^{(2)} = \rho_2 = C^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

а інші коефіцієнти ефективної жорсткості через коефіцієнти пружності кожного шару $c_{ij}(\varphi)$, згідно з формулами (15), виражатимуться співвідношеннями

$$\begin{aligned} \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, A_{44}\} = 2h\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}\}, \\ \{A_{55}, A_{66}\} = 2h\{c_{55}, c_{66}\}, \\ \{\Lambda_{11}^{(1)}, \Lambda_{22}^{(1)}, \Lambda_{33}^{(1)}\} = 2h\{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}, D_{44}, D_{55}\} &= \frac{2h^3}{3} \{c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{66}, c_{44}, c_{55}\}, \\
\{D_{16}, D_{26}, D_{45}, D_{12}^t\} &= \frac{2h^3}{N} \{c_{16}, c_{26}, c_{45}, \beta_{12}^t\}, \\
C^{(1)} &= 2hc_e, \quad C^{(3)} = \frac{2}{3}hc_e, \\
\{A_{11}^t, A_{22}^t, A_{33}^t\} &= 2h\{\beta_{11}^t, \beta_{22}^t, \beta_{33}^t\}, \\
\{D_{11}^t, D_{22}^t\} &= \frac{2h^3}{3}\{\beta_{11}^t, \beta_{22}^t\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

У формулах (18) коефіцієнти пружності $c_{ij}(\varphi)$ косокутно орієнтованого матеріалу виражаються через коефіцієнти пружності \bar{c}_{ij} ортотропного матеріалу, для якого осі ортотропії співпадають з осями координат, за відомими формулами [1, 5].

Аналогічно обчислюються значення коефіцієнтів жорсткості для інших типів шаруватих оболонок.

У випадку однорідного анізотропного матеріалу для визначення інтегральних фізико-механічних характеристик (15) маємо формули

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= 2hc_{ij}, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = \frac{2h^3}{3}c_{ij}, \\
A_{ij}^t &= 2h\beta_{ij}^t, \quad B_{ij}^t = 0, \quad D_{ij}^t = \frac{2h^3}{3}\beta_{ij}^t, \\
\Lambda_{ij}^{(1)} &= 2h\lambda_{ij}, \quad \Lambda_{ij}^{(2)} = 0, \quad \Lambda_{ij}^{(3)} = \frac{2h}{3}\lambda_{ij}, \\
C^{(1)} &= 2hc_e, \quad C^{(2)} = 0, \quad C^{(3)} = \frac{2h}{3}c_e.
\end{aligned}$$

Тестова задача. Запропонований у цій роботі варіант уточненої моделі оболонок дозволяє враховувати анізотропію фізико-механічних властивостей матеріалу як у серединній поверхні оболонки, так і в напрямку її нормалі. Відомо, що теорія типу Тимошенка враховує анізотропію по товщині оболонки, зумовлену лише поперечними зсувами, а класична теорія взагалі нечутлива до зміни властивостей матеріалу у поперечному напрямку. Тому виникає потреба встановлення ступеня точності розв'язку задач для шаруватих та анізотропних оболонок на основі цих теорій порівняно з розв'язком лінійної теорії пружності, яка для пружного матеріалу і малої деформації є безсумнівним стандартом точності.

Розглянемо незв'язану статичну задачу температурних напружень для шаруватої осесиметричної циліндричної оболонки, яка перебуває в умовах плоскої деформації. Тоді система рівнянь рівноваги в узагальнених переміщеннях без урахування початкових деформацій набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\left(A_{22} - \frac{B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^2}\right)u_3 + \left(RA_{23} + B_{22} - \frac{D_{22}}{R}\right)\gamma_3 &= RA_{22}^t T_1 + B_{22}^t T_2 \frac{R}{h}, \\
\left(RA_{23} + B_{22} - \frac{D_{22}}{R}\right)u_3 + (R^2 A_{33} + R(B_{33} + 2B_{23}) + D_{22})\gamma_3 &= \\
&= R(RA_{33}^t + B_{22}^t + B_{33}^t)T_1 + (RB_{33}^t + D_{22}^t + D_{33}^t)T_2 \frac{R}{h}.
\end{aligned}$$

Напруження в оболонці визначаються зі співвідношень Дюгамеля – Неймана. Наприклад, для колового напруження маємо

$$\sigma_\theta = \sigma_{22} = \frac{c_{22}}{R+z}u_3 + \left(\frac{z}{R+z} + c_{23}\right)\gamma_3 - \beta_{22}^t t.$$

Числові розрахунки виконано для чотиришарової косокутно армованої оболонки симетричної структури $(+\varphi / -\varphi / -\varphi / +\varphi)$ з відносною товщиною $\frac{h}{R} = \frac{1}{21}$, що нагрівається сталою температурою $t = t^* = \text{const}$. За матеріал кожного шару вибрали графітоепоксидний композит з такими властивостями [16]:

$$E_1 = 138 \text{ ГПа}, \quad E_3 = 6.9 \text{ ГПа}, \quad \alpha_{11}^t = 1 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_{33}^t = 16.55 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\ \nu_{21} = \nu_{23} = 0.25, \quad G_{12} = 4.1 \text{ ГПа}, \quad G_{23} = 3.4 \text{ ГПа},$$

де індексом 1 позначено напрям уздовж волокон армування, а індексами 2 і 3 – уперек волокон.

На рис. 1 наведено графіки залежності відносного колового напруження $\sigma_\theta(h)/t^*$ на зовнішній поверхні оболонки $z = h$ від кута армування волокон φ . Крива 1 позначає розв'язок, отриманий на основі рівнянь теорії пружності [16], крива 2 – на основі рівнянь уточненої теорії, запропонованих у цій роботі, і крива 3 – розв'язок, отриманий на основі рівнянь, що не враховують нормальних поперечних деформацій [10].

На рисунку бачимо, що розв'язок, одержаний на основі рівнянь уточненої теорії, в достатній мірі кількісно та якісно узгоджується з точним, а неврахування поперечної нормальної деформації може призвести не тільки до значної кількісної відмінності у визначенні колових напружень, але навіть до якісно неправильних результатів для суттєво анізотропних матеріалів.

Висновки. Розвинуто лінійну математичну модель динамічного деформування термопружних неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням анізотропії термомеханічних властивостей матеріалу як у серединній поверхні, так і в нормальному до неї напрямку. Зроблена постановка динамічних крайових задач взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок в ортогональних криволінійних координатах і наведено шляхи їх розв'язування. Виконано порівняльний аналіз температурних напружень для тестової задачі теорії оболонок з відповідним розв'язком тривимірної термопружності. З аналізу випливає, що результати, одержані на основі запропонованої моделі, кількісно і якісно узгоджуються з точними, а неврахування поперечної анізотропії матеріалу може призвести до неправильних результатів. Наведені в роботі основні рівняння можуть використовуватися для розрахунку на температурні та механічні дії оболонок з неперервною неоднорідністю по товщині, анізотропних оболонок шаруватої структури, а також однорідних ортотропних оболонок, коли осі ортотропії не співпадають з осями оболонки.

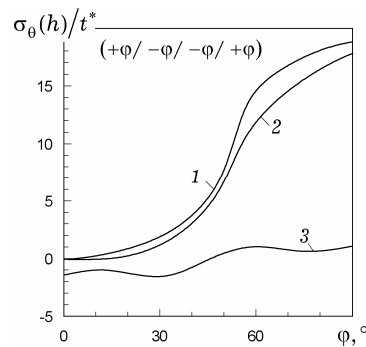


Рис. 1

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Коваленко А. Д. Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – 762 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Коляно Ю. М., Кушнір Р. М. Уравнения теплопроводности и термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин с прямолинейной анизотропией // Обобщенные функции в термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 19–34.
5. Композиционные материалы: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1990. – 512 с.
6. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.

7. Николишин М. М., Жидик У. В. Варіаційні постановки задач взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 94–103.
8. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
9. Подстригач Я. С., Ломакин В. Д., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
10. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
11. Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Флячок В. М. Термомеханика анизотропных оболочек // Науч.-техн. прогресс в машиностроении. – 1990. – Вып. 23. – С. 3–18.
12. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Термоупругий изгиб локально нагретых ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 3. – С. 80–85.
13. Ding H. J., Wang H. V., Chen W. Q. A solution of a non-homogeneous orthotropic cylindrical shell for axisymmetric plane strain dynamic thermoelastic problems // J. Sound and Vibr. – 2003. – **263**. – P. 815–829.
14. Keene F. W., Hetnarsky R. B. Bibliography on thermal stresses in shells // J. Therm. Stresses. – 1990. – **13**, No. 4. – P. 341–531.
15. McQuillen E. J., Brull M. A. Dynamic thermoelastic response of cylindrical shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, No. 3. – P. 15–22.
16. Whitney J. M., Sun C.-T. A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1974. – **41**, No. 2. – P. 441–476.
17. Yoshihiro O., Yoshinobu O. Transient thermal stresses of angle-ply laminated cylindrical panel due to nonuniform heat supply in the circumferential direction // Compos. Struct. – 2002. – **55**, No. 1. – P. 95–103.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧКАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Развита уточненная математическая модель динамической задачи взаимосвязанной термоупругости неоднородных анизотропных оболочек с учетом анизотропии тепломеханических свойств, как в направлениях координатных линий срединной поверхности, так и в трансверсальном направлении. Модель включает начальные деформации и основывается на предположениях, что компоненты вектора перемещений и температура линейно распределены по толщине. Достоверность модели оценивается сравнением решений теории оболочек с соответствующими решениями теории упругости.

MODELING OF THERMOELASTIC PROCESSES IN A HETEROGENEOUS ANISOTROPIC SHELLS WITH INITIAL DEFORMATIONS

A refined mathematical model of dynamic problem for coupled thermoelasticity of heterogeneous anisotropic shells accounting for anisotropy of material thermomechanic properties both in the median surface and transversal direction is developed. The model includes initial deformations and are based on the assumptions in which the displacement vector components and temperature are expanded as linear functions of the thickness coordinate. The validity of the theory is assessed by comparing solutions obtained from the shell theory to results obtained from exact theory of elasticity.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
17.01.10

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

³ Укр. акад. друкарства, Львів