

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НЕУСТАЛЕНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ПІВПРОСТОРИ

На основі моделі термочутливого тіла запропоновано аналітично-числову методику побудови розв'язку осесиметричної квазістатичної задачі термопружності для півпростору, який нагрівається миттєвим лінійним джерелом тепла та обмінюється теплом через обмежуючу поверхню шляхом конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. За допомогою методу збурень задачу зведено до розв'язування послідовності крайових задач для рівнянь Пуассона, розв'язки яких з використанням розвинень за кратними інтегралами ймовірностей побудовано у вигляді швидкозбіжних рядів для кожного з наближень.

Важливим завданням технологічної термомеханіки є вивчення температурних напружень в елементах конструкцій за умов їх виготовлення та експлуатації. При цьому часто виникає необхідність враховувати неоднорідність матеріалу конструкції, яка в багатьох випадках зумовлена впливом температури і є суттєвою при високих і низьких її рівнях [11]. Математична модель, що враховує термочутливість матеріалу (залежність фізико-механічних характеристик матеріалу від температури), більш адекватно описує термонапружений стан конструкції і дозволяє зробити більш прогнозованими її експлуатаційні можливості, але при цьому істотно ускладнюється побудова розв'язків відповідних задач теплопровідності та термопружності. Інженерна практика на сьогоднішній день надає перевагу тим методам чи математичному апарату, які є зручними для реалізації. Серед них цінними є аналітично-числові розв'язки таких задач, які побудовано у вигляді явних формул, що містять елементарні чи спеціальні функції. Деякі особливості числових та аналітично-числових методів дослідження температурних напружень у термочутливих елементах конструкцій знайшли відображення у працях [4, 11, 13, 16]. За умов складного теплообміну та з урахуванням дії силових факторів методи визначення температурних полів і термопружного стану в однорідних та кусково-однорідних тілах простої геометричної форми розглянуто у роботах [2, 5, 9, 14, 15].

У пропонованій роботі квазістатичну осесиметричну задачу термопружності для термочутливого півпростору, який нагрівається миттєвим лінійним джерелом тепла та конвективно обмінюється ним через обмежуючу поверхню, методом збурень [6] зведено до послідовності крайових задач для рівнянь Пуассона. На основі праць [3, 10] запропоновано методику побудови розв'язку отриманої послідовності крайових задач для рівнянь Пуассона, праві частини яких є функції температури.

1. Формулювання задачі. Розглядаємо вільний від навантаження термочутливий півпростір, на лінії $r = 0$ якого в початковий момент часу миттєво виділяється деяка кількість тепла Q . Через поверхню $z = 0$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем температури t_c . Початкова температура півпростору дорівнює t_p .

Нестационарне температурне поле T для такого термочутливого півпростору побудуємо методом поетапної лінеаризації (перетворення Кірхгофа та лінеаризації умови конвективного теплообміну методом «лінеаризуючих параметрів»)

[10], а вираз для змінної Кірхгофа $\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT$ подаємо

на основі розвинень за кратними інтегралами ймовірностей $i^n \operatorname{erfc} \xi =$

$= \int_{\xi}^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc} t dt$ у замкнутому вигляді:

$$\theta = \left(T_c^* - \frac{Q_b}{\text{Fo}} e^{-\rho^2/4\text{Fo}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [2(1+\alpha)\text{Bi}\sqrt{\text{Fo}}]^n \times \\ \times i^n \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\text{Fo}}} \right) + \frac{Q_b}{\text{Fo}} e^{-\rho^2/4\text{Fo}},$$

де $Q_b = Qa_0/(4\pi t_0 \lambda_{t_0} \ell_0^2)$; $T_c^* = (T_c - T_p)/(1+\alpha)$; $\text{Fo} = a_0 \tau / \ell_0^2$; $a_0 = \lambda_{t_0} / c_{v0}$; $\text{Bi} = \alpha \ell_0 / \lambda_{t_0}$; α – «лінеаризуючий параметр»; a_0 – коефіцієнт температуропровідності; $T = t/t_0$; $T_p = t_p/t_0$; $T_c = t_c/t_0$ (t_0 – вибрана відлікова температура); $\rho = r/\ell_0$; $\zeta = z/\ell_0$ (ℓ_0 – вибраний характерний розмір).

Для випадку лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(t) = \lambda_{t_0}(1 + k_\lambda(T - T_p))$ температуру $T = T(\rho, \zeta, \text{Fo}, \alpha)$ як функцію координат ρ, ζ , часу Fo та невідомого параметра α обчислюємо за формулою $T(\theta) = (\sqrt{1 + 2k_\lambda \theta} - 1)/k_\lambda + T_p$. Для кожного моменту часу значення α підбираємо ітераційно, мінімізуючи точність виконання нелінійної умови на змінну θ , отриманої з умови конвективного теплообміну.

Відповідна квазістатична задача термопружності у безрозмірних переміщеннях \bar{u}, \bar{w} має вигляд

$$\Delta \bar{u} - \frac{\bar{u}}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \rho} - \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \rho} + 2 \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right) + \\ + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \right) \bar{e} = 0,$$

$$\Delta \bar{w} + \frac{1}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \rho} - \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} \right) + 2 \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \zeta} \times \\ \times \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \right) \bar{e} = 0, \quad (1)$$

$$G^*(T) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right) n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} \right) n_z \right]_{z=0} = 0,$$

$$G^*(T) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} \right) n_r + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right) n_z \right]_{z=0} = 0, \quad (2)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ – оператор Лапласа; $\bar{\Phi}(t) = \frac{2(1+\nu(T))}{1-2\nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t^*(T) dT$;

$\bar{e} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}}{\rho} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}$; $\bar{u} = \frac{u}{\ell_0 \alpha_{t_0} t_0}$; $\bar{w} = \frac{w}{\ell_0 \alpha_{t_0} t_0}$ – безрозмірні переміщення. Тут модуль зсуву G , температурний коефіцієнт лінійного розширення α_t , та коефіцієнт Пуассона ν , як і коефіцієнт теплопровідності λ_t та об'ємна теплосмістність c_v вище, подано у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де множники з індексом «0» є сталими і мають відповідні розмірності (опорні значення характеристик), а співмножники з індексом «*» – безрозмірні функції, які описують залежність безрозмірних характеристик від безрозмірної температури.

2. Формування послідовності крайових задач методу збурень. Осесиметричну крайову задачу для рівнянь Ляме зі змінними коефіцієнтами (1), (2) методом збурень зводимо до послідовності крайових задач для рівнянь з постійними коефіцієнтами. У результаті розв'язок вихідної задачі термопружності (1), (2) подаємо у вигляді суми розв'язків крайових задач для основного ($k = 0$) і k -х ($k > 0$) наближень:

$$\{\bar{u}, \bar{w}, \sigma_\rho, \dots, \sigma_{\rho\zeta}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\bar{u}_k, \bar{w}_k, \sigma_\rho^{(k)}, \dots, \sigma_{\rho\zeta}^{(k)}\}. \quad (3)$$

Тут $\sigma_\rho = \frac{\sigma_{rr}}{2G_0\alpha_0 t_0}$, \dots , $\sigma_{\rho\zeta} = \frac{\sigma_{rz}}{2G_0\alpha_0 t_0}$ – безрозмірні компоненти тензора напружень, а відповідні компоненти тензора напружень для кожного з наближень визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(k)} &= G^*(T) \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \rho} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e}_k - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \delta_{k0} \right), \\ \sigma_\phi^{(k)} &= G^*(T) \left(\frac{\bar{u}_k}{\rho} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e}_k - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \delta_{k0} \right), \\ \sigma_\zeta^{(k)} &= G^*(T) \left(\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \zeta} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e}_k - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \delta_{k0} \right), \\ \sigma_{\rho\zeta}^{(k)} &= \frac{1}{2} G^*(T) \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\bar{e}_k = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}_k}{\rho} + \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \zeta}$; δ_{ki} – символ Кронекера.

Отримані рівняння для \bar{u}_k, \bar{w}_k , у свою чергу, введенням термопружних потенціалів Γ_0 ($\bar{u}_0 = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \rho}$, $\bar{w}_0 = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \zeta}$) для нульового наближення та Γ_k, Γ_k^* ($\bar{u}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \rho}$, $\bar{w}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \zeta} + \Gamma_k^*$) для решти наближень зводимо [8] до послідовності крайових задач для рівнянь Пуассона. Для визначення термопружного потенціалу Γ_0 отримуємо таку початково-крайову задачу:

$$\Delta \Gamma_0 = \bar{\Phi}(T), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \zeta \partial \rho} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \zeta^2} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \bar{e}_0 - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right] \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (6)$$

Система рівнянь для визначення потенціалів Γ_k і Γ_k^* має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_k &= \int \frac{1-2\nu(T)}{2(1-\nu(T))} F_{\rho k}(\rho, \zeta) d\rho - \frac{1}{2(1-\nu(T))} \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial \zeta}, \\ \Delta \Gamma_k^* &= F_{\zeta k}(\rho, \zeta) - \frac{1-\nu(T)}{1-2\nu(T)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \int \frac{1-2\nu(T)}{1-\nu(T)} F_{\rho k}(\rho, \zeta) d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

розв'язки якої повинні задовольняти граничні умови

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \zeta^2} + \frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \Delta \Gamma_k + \frac{1-\nu(T)}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial \zeta} \right] \Big|_{\zeta=0} &= 0, \\ \left[2 \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial \zeta \partial \rho} + \frac{\partial \Gamma_k^*}{\partial \rho} \right] \Big|_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}
F_{\rho k}(\rho, \zeta) &= \frac{-1}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \rho} \delta_{k1} - 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \right) \bar{e}_{k-1} - \\
&\quad - \frac{2}{G^*(T)} \left[\frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \rho} \sigma_{\rho}^{(k-1)} + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \zeta} \sigma_{\rho \zeta}^{(k-1)} \right], \\
F_{\zeta k}(\rho, \zeta) &= \frac{-1}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \zeta} \delta_{k1} - 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\nu(T)}{1-2\nu(T)} \right) \bar{e}_{k-1} + \\
&\quad + \frac{2}{G^*(T)} \left[\frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \rho} \sigma_{\rho \zeta}^{(k-1)} + \frac{\partial \ln G^*(T)}{\partial \zeta} \sigma_{\rho}^{(k-1)} \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

3. Розв'язування крайової задачі для нульового наближення. Побудуємо аналітично-числовий розв'язок для нульового члена розвинення (3) отриманої крайової задачі (5), (6) у припущенні, що температурний коефіцієнт лінійного розширення є лінійною функцією температури: $\alpha_t(t) = \alpha_{t0}(1 + k_{\alpha}(T - T_p))$. Подамо розв'язок \bar{u}_0, \bar{w}_0 задачі (5), (6) у вигляді суми часткового розв'язку $\bar{u}_{0(p)} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \rho}$, $\bar{w}_{0(p)} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \zeta}$ неоднорідного рівняння (5) і розв'язку Тередзави [7] $\bar{u}_{0T}, \bar{w}_{0T}$ для пружного півпростору, навантаженого нормальними та дотичними осесиметричними навантаженнями.

Для побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння (5) подамо його праву частину у вигляді розвинень за ϑ , а їх коефіцієнти – за кратними інтегралами ймовірностей $i^n \operatorname{erfc} \xi$:

$$\bar{\Phi}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi_n(\xi, \beta) \vartheta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{m=0}^M \Phi_{m,n}(\beta) i^m \operatorname{erfc} \xi \right] \frac{\exp(-n\eta)}{(4Fo)^n}, \quad (10)$$

де $\vartheta = \exp(-\eta)/(4Fo)$, $\eta = \rho^2/(4Fo)$, $\xi = \zeta/(2\sqrt{Fo})$, $\beta = 2\operatorname{Bi}(1 + \varkappa)\sqrt{Fo}$. Тут коефіцієнти $\Phi_{m,n}(\beta)$ знаходимо з числової апроксимації функції для визначення похідної $\Phi_n(\xi, \beta)$, отриманої у аналітичному вигляді:

$$\Phi_n(\xi, \beta) = \left. \frac{\partial^n \Phi}{\partial \vartheta^n} \right|_{\vartheta=0} = - \frac{(2n-3)!(k_{\lambda} - 2k_{\alpha})k_{\lambda}^{n-2}}{(1 + 2k_{\lambda} T_c^* \varphi(\xi, \beta))^{n-1/2}} (-Q^*[1 - \varphi(\xi, \beta)])^n,$$

де $\varphi(\xi, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n i^n \operatorname{erfc} \xi$; $Q^* = Qa_0/(\pi\lambda_t t_0)$.

Частковий розв'язок рівняння (5) з правою частиною (10) у трансформантах Ганкеля ($\theta^H = \int_0^{\infty} r J_0(\alpha r) \theta dr$) побудуємо у вигляді рядів за кратними інтегралами ймовірностей з довільними коефіцієнтами:

$$\Gamma_0^H = \frac{\delta(\alpha)}{\alpha} \sum_{m=0}^M A_m^0 i^m \operatorname{erfc} \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2nn!} \frac{\exp(-(\alpha^2 Fo)/n)}{(4Fo)^{n-1}} \sum_{m=0}^M A_m^n i^m \operatorname{erfc} \xi \right),$$

де $A_0^n = -\Phi_{0,n}/\alpha^2$, $A_1^n = A_2^n = 0$,

$$A_m^n = 4Fo \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} (2\alpha\sqrt{Fo})^{2((m-1)/2-j)} \Phi_{2j-\bar{m},n}, \quad m \geq 3,$$

$$\bar{m} = \begin{cases} 1, & m - \text{парне}, \\ 0, & m - \text{непарне}, \end{cases} \quad [\mu] - \text{ціла частина } \mu.$$

Звідси, здійснивши обернене перетворення Ганкеля [1], шуканий потенціал $\Gamma_0(\rho, \zeta, F_0)$ знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\rho, \zeta, F_0) = & 4F_0 \sum_{m=3}^M \Phi_{[2(m-1)/2]-\bar{m}, 0} i^m \operatorname{erfc} \zeta + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2nn!} \frac{1}{(4F_0)^{n-1}} \left\{ \Phi_{0, n} \left(\frac{1}{2} E_1 \left(\frac{n\rho^2}{4F_0} \right) + \ln \rho \right) + \right. \\ & + 2n \sum_{m=3}^M (4n)^{[(m-1)/2]} i^m \operatorname{erfc} \zeta \sum_{j=1}^{[(m-1)/2]} (4n)^{-j} \Phi_{2j-\bar{m}} \times \\ & \left. \times \left([(m-1)/2] - j \right)! {}_1F_1 \left([(m-1)/2] - j + 1, 1, \frac{-n\rho^2}{4F_0} \right) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

де $E_1(z)$ – інтегральна показникова функція; ${}_1F_1(z)$ – гіпергеометрична функція [12].

Компоненти $\sigma_{\zeta\zeta}^0, \sigma_{\rho\zeta}^0$ напружень (4) використаємо у відомому розв'язку Тередзави [7] для задання поверхневих навантажень у початково-крайовій задачі на визначення $\bar{u}_{0T}, \bar{w}_{0T}$:

$$P(\rho) = \sigma_{\zeta\zeta}^0 \Big|_{\zeta=0} = -2G^*(T) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \rho} \right), \quad S(\rho) = \sigma_{\rho\zeta}^0 \Big|_{\zeta=0} = -2G^*(T) \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial \rho \partial \zeta}.$$

Розв'язок Тередзави, що є сумою розв'язків при заданому нормальному та дотичному навантаженні на границі $\zeta = 0$, запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{0T} = & - \int_0^{\infty} \alpha \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} (1 - \alpha\zeta) J_0(\alpha\rho) d\alpha - \int_0^{\infty} \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} \frac{2\nu - 1 + \alpha\zeta}{\rho} J_1(\alpha\rho) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} \alpha \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} (2 - \alpha\zeta) J_0(\alpha\rho) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} \frac{2\nu - 2 + \alpha\zeta}{\rho} J_1(\alpha\rho) d\alpha, \\ \sigma_{\phi\phi}^{0T} = & - 2\nu \int_0^{\infty} \alpha \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} J_0(\alpha\rho) d\alpha - \int_0^{\infty} \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} \frac{2\nu - 1 + \alpha\zeta}{\rho} J_1(\alpha\rho) d\alpha + \\ & + 2\nu \int_0^{\infty} \alpha \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} J_0(\alpha\rho) d\alpha - \int_0^{\infty} \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} \frac{2\nu - 2 + \alpha\zeta}{\rho} J_1(\alpha\rho) d\alpha, \\ \sigma_{\zeta\zeta}^{0T} = & - \int_0^{\infty} \alpha \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} (1 + \alpha\zeta) J_0(\alpha\rho) d\alpha + \zeta \int_0^{\infty} \alpha^2 \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} J_0(\alpha\rho) d\alpha, \\ \sigma_{\rho\zeta}^{0T} = & - \zeta \int_0^{\infty} \alpha^2 \tilde{P}_0(\alpha) e^{-\alpha\zeta} J_1(\alpha\rho) d\alpha - \int_0^{\infty} \alpha \tilde{S}_1(\alpha) e^{-\alpha\zeta} (1 - \alpha\zeta) J_0(\alpha\rho) d\alpha, \quad (12) \end{aligned}$$

де $\tilde{P}_0(\alpha) = \int_0^{\infty} P(r) r J_0(\alpha r) dr$, $\tilde{S}_1(\alpha) = \int_0^{\infty} S(r) r J_1(\alpha r) dr$.

У результаті співвідношення для обчислення нульового наближення напружень у розв'язку (3), яке задовольняє умову відсутності навантажень на поверхні півпростору, запишеться у вигляді суми компонент тензора напружень, обчислених за формулами (4) з урахуванням (11) і (12) відповідно: $\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(p)}(\Gamma_0) + \sigma_{ij}^{0T}$.

4. Побудова розв'язку послідовності крайових задач для наступних наближень. Розглянемо наявні у правих частинах рівнянь (7) вирази $F_{\rho k}(\rho, \zeta)$, $F_{\zeta k}(\rho, \zeta)$, які містять залежний від температури вираз $G^*(T)$. Вважаємо, що модуль зсуву є квадратичною функцією температури

$$G^*(T) = 1 + \gamma_1(T - T_p) + \gamma_2(T - T_p)^2. \quad (13)$$

Враховуючи вираз для температури [10], модуль зсуву подаємо у вигляді розвинення за радіальною координатою:

$$G^*(T) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \rho^n, \quad (14)$$

де

$$g_{2n} = (-1)^n \frac{G^{0(n)}}{n!(4Fo)^n}, \quad g_{2n+1} = 0, \quad G^{0(0)} = G^*(T)|_{\vartheta=0},$$

$$G^{0(n)} = \left(\frac{\partial^n G^*}{\partial \vartheta^n} \right) \Big|_{\vartheta=0}, \quad n \geq 1.$$

Вирази напружень для нульового наближення $\sigma_{\zeta\zeta}^{(0)}$, $\sigma_{\rho\zeta}^{(0)}$ і функції $\bar{\Phi}(T)$ подамо у вигляді розвинення за радіальною координатою ρ :

$$\sigma_{\rho\zeta}^{(0)} = G^*(T) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{0\rho\zeta}(\rho, \zeta, Fo) \rho^n, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(0)} = G^*(T) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{0\rho\rho}(\rho, \zeta, Fo) \rho^n,$$

$$\bar{\Phi}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \rho^n, \quad (15)$$

де $S_n^{0\rho\zeta}$, $S_n^{0\rho\rho}$ – деякі аналітичні вирази від координат та часу,

$$\Phi_{2n} = \frac{(-4Fo)^n}{n!} \sum_{m=1}^n f_m^n \frac{(2m-3)!!(k_\lambda - k_\alpha)k_\lambda^{m-2} (Q^*[1 - \varphi(\xi, \beta)])^m}{(1 + 2k_\lambda T_c^* \varphi(\xi, \beta))^{m-1/2} (4Fo)^m},$$

$$\Phi_{2n+1} = 0, \quad f_m^{n+1} = m f_m^n + f_{m-1}^n, \quad f_1^n = 1, \quad f_{n+1}^n = 0, \quad f_n^n = 1.$$

Розглянемо систему (7) при $k=1$. З урахуванням співвідношень (13)–(15) і в припущенні, що $v = \text{const}$, розвинення функцій $F_{\rho 1}(\rho, \zeta)$, $F_{\zeta 1}(\rho, \zeta)$ у ряди за ρ мають вигляд

$$F_{\rho 1}(\rho, \zeta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{1-2v} \Phi_{n+1} + 4 \sum_{i=0}^n d_i S_{n-i}^{0\rho\zeta} + 4 \sum_{i=0}^n z_i S_{n-i}^{0\rho\rho} \right\} \rho^n,$$

$$F_{\zeta 1}(\rho, \zeta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-2v} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} - 4 \sum_{i=0}^n d_i S_{n-i}^{0\rho\zeta} - 4 \sum_{i=0}^n z_i S_{n-i}^{0\rho\rho} \right\} \rho^n, \quad (16)$$

де $d_n = \frac{1}{g_0} \left[(n+1)g_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} d_i g_{n-i} \right]$, $z_n = \frac{1}{g_0} \left[\frac{\partial G^{0(m)}}{\partial \xi} \frac{1}{m!(4Fo)^{m+1/2}} - \sum_{i=0}^{n-1} z_i g_{n-i} \right]$.

Праві частини рівнянь системи (7) після підстановки (16) запишемо у вигляді рядів за радіальною координатою:

$$\Gamma_1^{*0} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{1,n}^{*0} \rho^n, \quad \Gamma_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{1,n}^0 \rho^n, \quad (17)$$

а часткові розв'язки цих рівнянь подаємо у вигляді

$$\Gamma_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^*} i^m \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}} \right) \right) \rho^n,$$

$$\Gamma_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^0} i^m \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}} \right) \right) \rho^n.$$

Тут коефіцієнти $\Gamma_{1,n}^{*0}$, $\Gamma_{1,n}^0$ рядів (17) шляхом числової апроксимації функцій Γ_1^{*0} , Γ_1^0 будемо у вигляді розвинень за кратними інтегралами ймовірностей:

$$\Gamma_{1,n}^{*0} = \Gamma_{10,n}^{*0} + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{1m,n}^{*0} i^m \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}}\right),$$

$$\Gamma_{1,n}^0 = \Gamma_{10,n}^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{1m,n}^0 i^m \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}}\right),$$

де

$$\Gamma_{1,n}^{*0} = -\left\{ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} - 4 \sum_{i=0}^n d_0 S_0^{0\rho\zeta} - 4 \sum_{i=0}^n z_0 S_0^{0\rho\rho} \right\} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} - \Phi_n \right] - 4 \sum_{i=0}^{n-1} d_i \left[S_{n-i}^{0\rho\zeta} - \frac{1}{n} S_{n-1-i}^{0\rho\rho} \right] - \right.$$

$$\left. - d_n S_0^{0\rho\zeta} - 4 \sum_{i=0}^{n-1} z_i \left[S_{n-i}^{0\rho\rho} - \frac{1}{n} S_{n-1-i}^{0\rho\zeta} \right] - 4 z_n S_{0i}^{0\rho\rho} \right\} \rho^n,$$

$$\Gamma_{1,n}^0 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{1-2\nu} \Phi_{n+1} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \left[z_i S_{n-i}^{0\rho\zeta} + d_i S_{n-1-i}^{0\rho\rho} \right] \right\} \frac{\rho^{n+1}}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon n A_n J_0(\varepsilon n \rho) \exp(-\varepsilon n \zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=3}^{\infty} \frac{\overline{\Gamma_{m,n}^*}}{2\sqrt{Fo}} i^{m-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}}\right) \right] \rho^n,$$

$$\overline{\Gamma_{m,n}^*} = (1-2\nu) \Gamma_{1m,n-1}^0 + (1-\delta_{m1}) \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \overline{\Gamma_{m+1,n}^*},$$

$$\overline{\Gamma_{m+2,n}^*} = 4Fo \left[\Gamma_{1m,n}^{*0} - (n+2)^2 \overline{\Gamma_{m,n+2}^*} \right], \quad m \geq 1, \quad n \geq 0,$$

$$\overline{\Gamma_{m,1}^*} = 0, \quad m \geq 0, \quad \overline{\Gamma_{1,n}^*} = \overline{\Gamma_{2,n}^*} = 0, \quad m \geq 0,$$

ε – деяка додатна стала.

Загальні розв'язки Γ_1 і Γ_1^* , згідно з (16), (17), запишемо у вигляді

$$\Gamma_1(\rho, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(\varepsilon n \rho) \exp(-\varepsilon n \zeta) +$$

$$+ \frac{1}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon n)^2 \rho A_n J_0(\varepsilon n \rho) \exp(-\varepsilon n \zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^0} i^m \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}}\right) \right] \rho^n,$$

$$\Gamma_1^*(\rho, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\varepsilon n \rho) \exp(-\varepsilon n \zeta) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\overline{\Gamma_{0,n}^*} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\Gamma_{m,n}^*} i^m \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}}\right) \right] \rho^n. \quad (18)$$

Компоненти напружень для k -го наближення обчислюємо через Γ_k і Γ_k^* за формулами (4). Розв'язки (18) записано з точністю до двох множин коефіцієнтів A_n і B_n , які визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої внаслідок задоволення граничних умов (8).

Для наступних наближень підставляємо в праву частину рівняння (7) вже знайдені розвинення напружень за ρ з попередніх ітерацій. Залишається обчислити лише числові апроксимації для розвинень за кратними інтегралами ймовірностей та коефіцієнти A_n і B_n для кожного з наближень.

5. Дослідження впливу термочутливості півпростору на його термонапружений стан. Проведено дослідження напружено-деформованого стану сталевого півпростору з такими фізико-механічними характеристиками [9]:

$$\lambda_t(t) = 41.51(1 - 0.3(T - T_p)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\alpha(t) = 17.08 \cdot 10^{-6}(1 + 0.77(T - T_p)) [\text{К}^{-1}],$$

$$G(t) = 0.74 \cdot 10^5(1 + 0.46(T - T_p) + 0.56(T - T_p)^2) [\text{МПа}], \quad \nu_0 = 0.3.$$

На рис. 1 наведено графіки розподілу безрозмірних радіальних σ_ρ і колових σ_ϕ напружень в залежності від радіальної координати ρ для значень безрозмірного часу $Fo = 0.5, 1.0, 2.0$ при $\zeta = 2, Vi = 1$.

На рис. 2 наведено графіки розподілу безрозмірних колових напружень σ_ϕ в залежності від радіальної координати ρ при значеннях осевої координати $\zeta = 1, 2, 5$ при $Fo = 2, Vi = 1$.

Тут і надалі суцільні лінії відповідають розв'язкам задачі з усіма залежними від температури тепловими і механічними характеристиками, а штрихові – зі сталими характеристиками, що дорівнюють опорним значенням термочутливого півпростору.

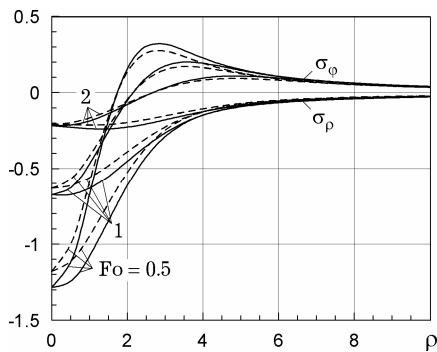


Рис. 1

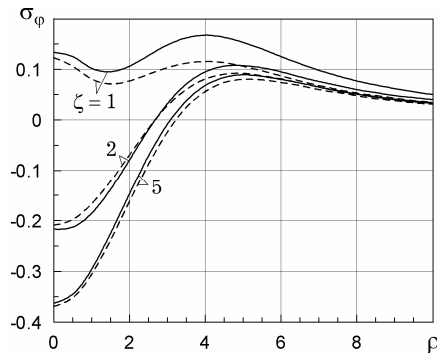


Рис. 2

Зі збільшенням значення Fo спостерігається зменшення величини розглянутих компонент тензора напружень і зменшення розбіжності між розв'язками, отриманими при урахуванні термочутливості і без нього. При віддаленні від лінії дії джерела тепла колові напруження, особливо при малих значеннях безрозмірного часу, частково змінюють знак на протилежний, після чого обидва напруження монотонно зникають до нуля.

При наближенні до поверхні півпростору колові напруження σ_ϕ зі стискувальних стають розтягувальними та зростає розбіжність між їх значеннями при врахуванні залежності термомеханічних характеристик від температури та без нього.

На рис. 3 наведено графіки залежності безрозмірних радіальних σ_ρ та колових σ_ϕ напружень від часу Fo для значень віддалі до джерела тепла $\rho = 2, 4$ при $\zeta = 5, Vi = 1$. Радіальні σ_ρ та колові σ_ϕ напруження набувають максимального значення поблизу зони нагрівання на початку перехідного процесу, а далі зменшуються з часом. Для радіальних напружень σ_ρ розбіжність між значеннями напружень при врахуванні залежності термомеханічних характеристик від температури та без нього збільшується при наближенні до лінії дії джерела.

На рис. 4 проілюстровано вплив рівня тепловіддачі з поверхні (теплообмінних властивостей поверхні $Bi = 0.5$ і $Bi = 2$) півпростору на розподіл радіальних і колових температурних напружень при значеннях осової координати $\zeta = 2$ та безрозмірного часу $Fo = 2$. Проведені числові дослідження показали, що розбіжність між значеннями напружень при врахуванні залежності термомеханічних характеристик від температури та без нього зростає зі збільшенням тепловіддачі з поверхні півпростору. При зменшенні тепловіддачі з поверхні напруження зростають.

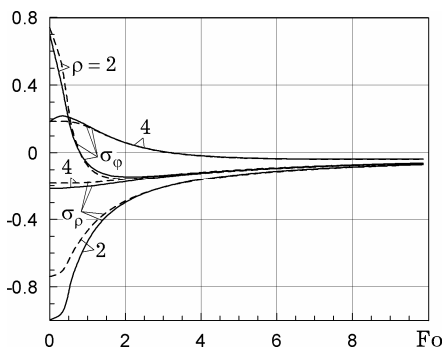


Рис. 3

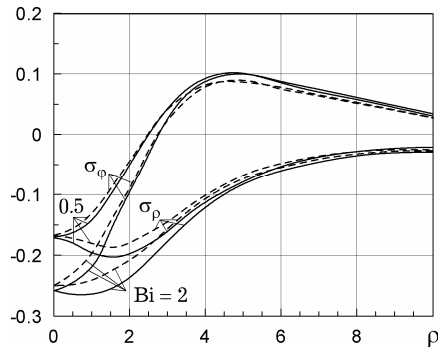


Рис. 4

Обчислені перші три члени отриманих в результаті застосування методу збурень до задачі для термочутливого півпростору рядів показали добру їх збіжність, оскільки перші два члени дають більше ніж 95% сумарних величин переміщень і напружень.

Висновки. З урахуванням температурної залежності механічних характеристик матеріалу осесиметричну задачу термопружності методом збурень зведено до послідовності крайових задач для рівнянь з постійними коефіцієнтами. Вони, в свою чергу, зведені до послідовності крайових задач стосовно рівнянь Пуассона для визначення введених термопружних потенціалів. Співвідношення для визначення напружено-деформованого стану термочутливого півпростору у кожному з наближень методу збурень побудовано у вигляді сум за кратними інтегралами ймовірностей. Отримано рекурентні вирази для розрахунку будь-якого з наближень методу збурень.

Знайдені розв'язки дозволяють проводити аналіз неусталених температурних напружень. Проведений аналіз отриманих числових результатів показав, що порівняно незначна розбіжність (для розглянутого матеріалу не перевищувала 5%) між значеннями температур у термочутливому і нетермочутливому сталевому півпросторі приводить до значних розбіжностей між відповідними значеннями напружень. Цей факт підтверджує важливість врахування температурної залежності характеристик матеріалу при визначенні термопружного стану елементів конструкцій за умов високотемпературного нагрівання.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № Ф29.2/009)

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — Т. 2. — Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций. — Москва: Наука, 1970. — 327 с.
2. Гарматій Г. Ю., Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. — 2008. — № 1. — С. 113–120.
3. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок квазістатичного термонапруженого стану напівбезмежних контактуючих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — 48, № 3. — С. 82–87.
4. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Осесимметричный контакт между термочувствительными телами с различными температурами // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1999. — № 1. — С. 70–77.

5. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл простої форми за складного теплообміну // Акт. аспекти фіз.-мех. досліджень. Механіка. – Київ: Наук. думка, 2007. – С. 153–164.
6. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
7. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
8. Попович В., Горечко Н. Визначення температурних напружень у термочутливих елементах конструкцій, які моделюють тілами обертання // Машинознавство. – 2006. – № 7 (109). – С. 18–22.
9. Попович В. С., Горечко Н. О. Температурне поле термочутливого півпростору від нагрівання миттєвим лінійним джерелом тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 4. – С. 183–188.
10. Попович В. С., Сулим Г. Т. Центральна-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 3. – С. 62–68.
 The same: Popovych V. S., Sulym H. T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body // Mater. Sci. – 2004. – 40, No. 3. – P. 321–330.
11. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – Київ: НМЦ ВО МОНЦ, 2000. – 280 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
13. Kalynyak B., Popovych V. Thermal stresses in multilayer thermal sensitive cylinder an asymptotic thermal conditions // Proc. 6th Int. Congr. Thermal Stresses (26–29 May 2005, Vienna, Austria) / Eds. F. Ziegler, R. Heuer, C. Adam. – Vienna: Vienna University of Technology, 2005. – P. 119–122.
14. Kushnir R., Protsyuk B. Method of Green's functions in quasi-static thermoelasticity problems for layer thermosensitive bodies under complex heat exchange // Modern Anal. and Appl. (MAA-2007): Int. Conf., dedicated to the centenary of Mark Krein (Odessa, April 9–14, 2007): Abstracts. – Kyiv, 2007. – P. 79–80.
15. Kushnir R. M., Popovych V. S., Vovk O. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Eng. Math. – 2008. – 61, Nos. 2–4. – P. 357–369.
16. Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y. Thermal stresses. – Rochester: Lastran Corp., 2000. – 455 p.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

На основе модели термочувствительного тела предложена аналитически-численная методика построения решения осесимметричной квазистатической задачи термоупругости для полупространства, которое нагревается мгновенным линейным источником тепла и обменивается теплом с окружающей средой через ограничивающую поверхность путем конвективного теплообмена. С помощью метода возмущений задача сведена к решению последовательности задач для уравнений Пуассона, решения которых с использованием рядов по кратным интегралам вероятностей построены в виде быстроходящихся рядов для каждого из приближений.

CALCULATION PROCEDURE FOR NONSTATIONARY TEMPERATURE STRESSES IN THERMOSENSITIVE HALF-SPACE

Basing on the model of thermosensitive body the analytic-numerical procedure to construct a solution of the axisymmetric quasi-static thermoelasticity problem for a half-space heated by instantaneous linear heat source and convective heat exchange via bounding surface with the surroundings is proposed. Using the perturbation method this problem is reduced to solving the sequence boundary-value problems for Poisson's equations. Their solutions are constructed in a fast-convergent series form by the multiple probability integrals.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
 27.10.09