УДК 621.396.01: 519.614

Л. П. Процах, П. О. Савенко, М. Д. Ткач

ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДІЙСНОЇ ФІНІТНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ МОДУЛЕМ ПОДВІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Досліджується галуження розв'язків нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна, що виникає в задачах середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є, залежного від двох параметрів [7, 8]. *Знайдено аналітичні вирази власних функцій відповідного лінійного однорідного інтегрального рівняння, необхідні для побудови відгалужених розв'язків, та одержано системи трансцендентних рівнянь для знаходження точок їх галуження. Наведено у першому наближенні аналітичні подання комплексних розв'язків, відгалужених від дійсного розв'язку, для двовимірного випадку галуження.*

Вступ. У роботах [7, 8] варіаційну задачу про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної фінітної функції $F(s_1, s_2)$, $(s_1, s_2) \in \bar{\Omega}$, модулем подвійного перетворення Фур'є зведено до знаходження розв'язків нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна

$$f(Q) = \mathbf{B}f \equiv \iint\limits_{\bar{\Omega}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) F(Q') e^{i \arg f(Q')}\, dQ' \,, \tag{1}$$

де

$$\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{G} \exp\left[i(c_1 x(s_1' - s_1) + c_2 y(s_2' - s_2))\right] dx\, dy \,,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2), \qquad Q = (s_1, s_2), \qquad dQ = ds_1 ds_2 . \tag{2}$$

Показано, що характерними властивостями рівняння (1) є неєдиність і галуження розв'язків, які залежать від двох дійних параметрів c_1, c_2. Там же побудовано й обґрунтовано чисельний метод для знаходження ліній можливого галуження розв'язків рівняння (1), які є розв'язками двовимірної нелінійної спектральної задачі

$$\varphi(Q) = T(\mathbf{c})\varphi \equiv \iint\limits_{\bar{\Omega}} \frac{F(Q')}{f_0(Q', \mathbf{c})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \varphi(Q')\, dQ' \,, \tag{3}$$

де

$$f_0(Q, \mathbf{c}) = \iint\limits_{\bar{\Omega}} F(Q') \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})\, dQ' \tag{4}$$

– дійсний (первинний) розв'язок рівняння (1). Знаходження відгалужених розв'язків здійснюється чисельними методами. Проте застосування чисельних методів не дає повної відповіді на питання – чи відбувається галуження розв'язків у знайдених точках можливого галуження, яка кількість та властивості відгалужених розв'язків?

У цій роботі на основі теорії галуження розв'язків нелінійних рівнянь [1, 11] подаються дослідження розв'язків у точках галуження двовимірного типу. Для знаходження відгалужених комплексних розв'язків від первинного (дійсного) розв'язку (4) знайдено необхідні аналітичні вирази для власних функцій однорідного інтегрального рівняння (3), які використовуються при побудові відгалужених розв'язків, та одержано системи трансцендентних рівнянь для знаходження точок галуження розв'язків двох типів. У першому наближенні наведено аналітичні вирази комплексних розв'язків, які відгалужуються від дійсного розв'язку (4).

1. Аналітичні подання власних функцій рівняння (3).

1.1. Умова ортогональності. Розглянемо рівняння (1) для часткового випадку, коли області $\bar{\Omega}$ і $\bar{G}$ мають прямокутну форму і відповідним нормуванням координат зводяться до вигляду

$$\bar{\Omega} = \{(s_1, s_2) \in \bar{\Omega} : |s_1| \le 1, \ |s_2| \le 1\},$$

$$\bar{G} = \{(x, y) \in \bar{G} : |x| \le 1, \ |y| \le 1\}.$$

При цьому рівняння (3) набуває вигляду

$$\varphi(s_1, s_2) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\mathcal{K}(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2)\frac{\varphi(t_1, t_2)}{f_0(t_1, t_2, c_1, c_2)}\, dt_1\, dt_2, \qquad (5)$$

де

$$\mathcal{K}(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2) = \mathcal{K}_1(s_1, t_1, c_1)\cdot\mathcal{K}(s_2, t_2, c_2) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}.$$

Покладемо, що параметри c_1, c_2 належать області

$$\Lambda_c = \{(c_1, c_2) \in \Lambda_c : 0 < c_1 \le a_1, \ 0 < c_2 \le a_2\}.$$

Легко впевнитись, що однією із власних функцій рівняння (5) при будь-яких значеннях параметрів $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$ є функція (4), яка у випадку прямокутної області $\bar{\Omega}$ набуває вигляду

$$\varphi_0(s_1, s_2, c_1, c_2) = \iint_{\Omega} F(t_1, t_2)\frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\, dt_1\, dt_2. \qquad (6)$$

Для знаходження відмінних від (6) власних функцій аналогічно, як у роботі [2], виконаємо над рівнянням (5) наступні перетворення. Спочатку виконаємо в (5) заміну $\chi(t_1, t_2) = \dfrac{\varphi(t_1, t_2)}{f_0(t_1, t_2, c_1, c_2)}$. Тоді $\varphi(t_1, t_2) = \chi(t_1, t_2) f_0(t_1, t_2, c_1, c_2)$ і на підставі (5) з урахуванням (6) одержуємо рівняння відносно функції $\chi(t_1, t_2)$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\mathcal{K}(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2)\chi(s_1, s_2)\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\mathcal{K}(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2)\chi(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

На розв'язку це рівняння перетворюється у тотожність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\times$$

$$\times\left[\chi(s_1, s_2) - \chi(t_1, t_2)\right] dt_1\, dt_2 \equiv 0. \qquad (7)$$

Проінтегрувавши (7) за змінними s_1, s_2, одержимо рівняння

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\times$$

$$\times\left[\chi(s_1, s_2) - \chi(t_1, t_2)\right] dt_1\, dt_2\, ds_1\, ds_2 = 0, \qquad (8)$$

з якого випливає, що різниця функцій $\left[\chi(s_1, s_2) - \chi(t_1, t_2)\right]$ є ортогональною до ядра інтегрального оператора (8). Виходячи з цієї властивості, рівняння

(8) будемо називати ***умовою ортогональності***. Відзначимо, що (8) є необхідною, а тотожність (7) – достатньою умовами для того, щоб $\varphi(t_1,t_2) = \chi(t_1,t_2) f_0(t_1,t_2,c_1,c_2)$ була власною функцією рівняння (5).

1.2. Точки галуження першого типу. Покажемо, що у випадку парної за обома аргументами функції $F(t_1,t_2)$ рівняння (5) має спектральні лінії, належні до області $\boldsymbol{\Lambda}_c$, яким (крім власної функції (6)) відповідає власна функція

$$\varphi_1(s_1,s_2) = s_1 \cdot f_0(s_1,s_2,c_1,c_2), \tag{9}$$

тобто $\chi(s) = s$. Підставляючи цей вираз у тотожність (7), одержуємо

$$\Bigg\{\sin(c_1 s_1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\cos(c_1 t_1)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_2\,dt_1 - $$
$$ - \cos(c_1 s_1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\sin(c_1 t_1)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_2\,dt_1\Bigg\} \equiv 0 .$$

Оскільки $\sin c_1 s_1$ і $\cos c_1 s_1$ – лінійно незалежні функції, то для перетворення останнього виразу у тотожність необхідно, щоб при $|s_2| \le 1$ для параметрів c_1, c_2 справджувались такі тотожності:

$$\int_{-1}^{1}\cos(c_1 t_1)\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_2\,dt_1 \equiv 0 , \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{1}\sin(c_1 t_1)\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_2\,dt_1 \equiv 0 . \tag{11}$$

Розглянемо вираз (11). Легко переконатись, що функція

$$f_{0,2}(t_1,s_2) = \int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_2 \tag{12}$$

є парною за обома аргументами. За наявності під зовнішнім інтегралом у (11) непарної функції $\sin c_1 t_1$ одержуємо, що тотожність (11) справджується при будь-яких $(c_1,c_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$. Отже, як рівняння для знаходження множини власних значень (c_1,c_2), яка не співпадає зі всією областю $\boldsymbol{\Lambda}_c$, будемо розглядати тотожність (10), яка повинна справджуватись при $|s_2| \le 1$.

Для знаходження множини власних значень $(c_1^{(0)},c_2^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$, що відповідають власним функціям вигляду (9), чисельними методами перейдемо від тотожності (10) до відповідного їй трансцендентного рівняння, застосовуючи умову ортогональності (8). Підставляючи вираз $[\chi(s_1,s_2) - \chi(t_1,t_2)] = s_1 - t_1$ у (8) і виконуючи відповідні перетворення, одержуємо рівняння

$$\Phi_1(c_1,c_2) \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\cos(c_1 t_1)\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}\,dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0 \tag{13}$$

на знаходження множини значень параметрів $(c_1,c_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_c$ (спектральних ліній), що є двократними власними значеннями рівняння (5), яким відповідають власні функції (6), (9).

Відзначимо, що в частковому випадку, коли $F(t_1,t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)$ і $F_1(t_1)$, $F_2(t_2)$ – парні функції, на підставі рівняння (13) одержуємо трансцендентне рівняння (2.3.31) із [5] для знаходження власних значень відповідного (5) одновимірного інтегрального рівняння стосовно функції $F_1(t_1)$.

Для знаходження розв'язків рівняння (13) чисельними методами розглядаємо його як рівняння $\Phi_1(c_1, c_2) = 0$ на знаходження неявно заданих функцій $c_2 = c_2(c_1)$ або $c_1 = c_1(c_2)$. У першому випадку приходимо до такої задачі Коші [6]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi_1(c_1, c_1)}{\partial c_1}}{\dfrac{\partial \Phi_1(c_1, c_1)}{\partial c_2}}, \tag{14}$$

$$c_2\left(c_1^{(0)}\right) = c_2^{(0)}. \tag{15}$$

Для знаходження початкових умов (15) розв'язуємо допоміжну однопараметричну задачу на промені $(c_2 = \alpha c_1) \in \Lambda_c$, тобто знаходимо корені трансцендентного рівняння

$$\tilde{\Phi}_1(c_1) = \Phi_1(c_1, \alpha c_1) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\cos(c_1 t_1)\frac{\sin(\alpha c_1(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\,dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0, \tag{16}$$

використовуючи відомі чисельні методи.

До точок галуження першого типу віднесемо також таку множину значень параметрів $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$, що є двократними власними значеннями рівняння (5), яким відповідають власні функції (6) і функція

$$\tilde{\varphi}_1(s_1, s_2) = s_2 \cdot f_0(s_1, s_2, c_1, c_2). \tag{17}$$

Повторюючи викладки й міркування, аналогічні до наведених вище, приходимо до рівняння

$$\Phi_2(c_1, c_2) \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\cos(c_2 t_2)\frac{\sin(c_1(s_1 - t_1))}{\pi(s_1 - t_1)}\,dt_1\,dt_2\,ds_1 = 0, \tag{18}$$

розв'язки якого знаходимо чисельно, розв'язуючи відповідну задачу Коші, аналогічну до (14), (15).

Розглянемо більш загальний випадок, коли функція $F(t_1, t_2)$ немає визначеного типу парності. Тут відмінна від $\varphi_0(s_1, s_2)$ власна функція рівняння (5) має вигляд

$$\varphi_1(s_1, s_2) = \frac{s_1}{1 + \eta_1 s_1} \cdot f_0(s_1, s_2, c_1, c_2), \tag{19}$$

де η_1 − параметр функції. Використовуючи умову (7) з урахуванням (19), одержуємо необхідні трансцендентні рівняння для знаходження множини власних значень $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \Lambda_c$ і параметра власної функції η_1:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\frac{\cos(c_1 t_1)}{(1 + \eta_1 t_1)} \cdot \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\,dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0, \tag{20}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\frac{\sin(c_1 t_1)}{(1 + \eta_1 t_1)} \cdot \frac{\sin(c_2(s_2 - t_2))}{\pi(s_2 - t_2)}\,dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0. \tag{21}$$

Система (20), (21) містить три невідомих, тому її розв'язки будемо знаходити на променях $c_2 = \alpha c_1$.

Поряд з власною функцією (17) для функцій $F(t_1, t_2)$ невизначеного типу парності існує також власна функція

$$\tilde{\varphi}_1(s_1, s_2) = \frac{s_2}{1 + \eta_2 s_2} \cdot f_0(s_1, s_2, c_1, c_2). \tag{22}$$

Система рівнянь для знаходження власних значень $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ і параметра власної функції η_2 має вигляд

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\cos(c_2t_2)}{(1+\eta_2t_2)}\cdot\frac{\sin(c_1(s_1-t_1))}{\pi(s_1-t_1)}dt_1\,dt_2\,ds_1 = 0, \tag{23}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\sin(c_2t_2)}{(1+\eta_2t_2)}\cdot\frac{\sin(c_1(s_1-t_1))}{\pi(s_1-t_1)}dt_1\,dt_2\,ds_1 = 0. \tag{24}$$

Розв'язки цієї системи будемо знаходити на променях $c_1 = \alpha c_2$.

1.3. Точки галуження другого типу. У випадку парної за двома аргументами функції $F(t_1,t_2)$ існує множина власних значень $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$, кратність яких дорівнює трьом. Власні функції, що відповідають таким власним значенням, мають вигляд

$$\varphi_0(s_1,s_2) = f_0(s_1,s_2,c_1,c_2),$$

$$\varphi_1(s_1,s_2) = \frac{1}{1+\tau_1s_1^2}\cdot f_0(s_1,s_2,c_1,c_2),$$

$$\varphi_2(s_1,s_2) = \frac{s_1}{1+\tau_1s_1^2}\cdot f_0(s_1,s_2,c_1,c_2). \tag{25}$$

Систему трансцендентних рівнянь для знаходження власних значень $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ і параметра власної функції τ_1 одержуємо на підставі міркувань, аналогічних до попереднього:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\cos(c_1t_1)}{(1+\tau_1t_1^2)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0, \tag{26}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{t_1\sin(c_1t_1)}{(1+\tau_1t_1^2)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0. \tag{27}$$

Поряд із власними функціями (25) існують також власні функції

$$\varphi_0(s_1,s_2) = f_0(s_1,s_2,c_1,c_2),$$

$$\tilde{\varphi}_1(s_1,s_2) = \frac{1}{1+\tau_2s_2^2}\cdot f_0(s_1,s_2,c_1,c_2),$$

$$\tilde{\varphi}_2(s_1,s_2) = \frac{s_2}{1+\tau_2s_2^2}\cdot f_0(s_1,s_2,c_1,c_2). \tag{28}$$

Власні значення $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ і параметр власної функції τ_2 визначаємо, розв'язуючи систему

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{\cos(c_1t_1)}{(1+\tau_2t_1^2)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0, \tag{29}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\frac{t_1\sin(c_1t_1)}{(1+\tau_2t_1^2)}\cdot\frac{\sin(c_2(s_2-t_2))}{\pi(s_2-t_2)}dt_1\,dt_2\,ds_2 = 0 \tag{30}$$

на променях $c_1 = \alpha c_2$.

Розглянемо числовий приклад. На рис. 1 наведено спектральні лінії рівняння (5), що відповідають власним функціям різних типів для

$$F(s_1, s_2) = \begin{cases} 2\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \cdot \sqrt{1 - (s_1^2 + s_2^2)}, & s_1^2 + s_2^2 \le 1, \\ 0, & s_1^2 + s_2^2 > 1. \end{cases} \tag{31}$$

Числові результати одержано шляхом розв'язування наведених вище відповідних трансцендентних рівнянь з використанням методу неявних функцій [3, 6]. Криві *1* відповідають власній функції вигляду $\varphi_1(s_1, s_2) = s_1 f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)$, крива *2* – $\varphi_2(s_1, s_2) = \dfrac{s_1}{1 + \tau_1 s_1^2} f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)$, криві *3* – функції $\tilde{\varphi}_1(s_1, s_2) = s_2 f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)$, крива *4* – функції $\tilde{\varphi}_2(s_1, s_2) = \dfrac{s_2}{1 + \tau_2 s_2^2} \times f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)$.

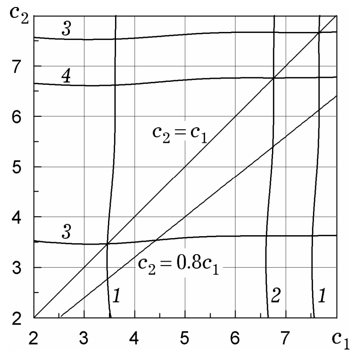


Рис. 1

2. Двовимірний випадок галуження розв'язків. Розглянемо галуження розв'язків рівняння (1) для часткового випадку, коли область $\bar{\Omega}$ – прямокутник, кратність власного значення $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ на відповідних спектральних лініях дорівнює двом, а відповідні йому власні функції мають вигляд (6), (19).

Рівняння (1) в декомплексифікованому просторі $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ [9] зводиться до еквівалентної системи рівнянь

$$u(Q) = B_1(u, v) \equiv \iint_{\Omega} F(Q')\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}}\, dQ',$$

$$v(Q) = B_2(u, v) \equiv \iint_{\Omega} F(Q')\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}}\, dQ'. \tag{32}$$

Для спрощення досліджуватимемо галуження розв'язків системи рівнянь (32) на промені $c_2 = \alpha c_1$ при $0 < \alpha < 1$.

Нехай $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) = \left(c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}\right)$ власне значення однорідного інтегрального рівняння (5). Надамо параметру $c_1^{(0)}$ малого збурення, тобто покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu. \tag{33}$$

Тоді на промені $c_2 = \alpha c_1$ параметр c_2 матиме таке збурення:

$$c_2 = \alpha c_1^{(0)} + \alpha\mu. \tag{34}$$

Розглянемо задачу про знаходження всіх відмінних від $f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)$ розв'язків системи (32), які при $\mu \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{Q\in\Omega}\left|u(Q,c_1,c_2)-f\left(Q,c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)\right|\to 0\,,$$

$$\max_{Q\in\Omega}\left|v(Q,c_1,c_2)\right|\to 0\,. \tag{35}$$

Умови (35) означають, що необхідно знайти такі малі неперервні на $\overline{\Omega}$ розв'язки

$$w(Q,\mu)=u(Q,c_1,c_2)-f_0\left(Q,c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right),$$

$$\omega(Q,\mu)=v(Q,\mu)\,,$$

які рівномірно збігаються до нуля при $\mu\to 0$. Тобто шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u(Q,c_1,c_2)=f_0\left(Q,c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)+w(Q,\mu)\,,$$

$$v(Q,c_1,c_2)=\omega(Q,\mu)\,. \tag{36}$$

Надалі для скорочення записів залежність функцій $w(Q,\mu)$, $\omega(Q,\mu)$ від параметра μ будемо опускати.

З урахуванням виразів (33), (34), (36) розклади підінтегральних функцій системи (32) в околі точки $\left(\mathbf{c}^{(0)},f_0(Q,\mathbf{c}^{(0)}),0\right)$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w, ω і числовим параметром μ набувають вигляду

$$F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}=$$
$$=\sum_{m+n+p\ge 0}A_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\mu^p\,, \tag{37}$$

$$F(Q')\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}=$$
$$=\sum_{m+n+p\ge 1}B_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\mu^p\,, \tag{38}$$

де $A_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$, $B_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$ – коефіцієнти розкладу, неперервно залежні від своїх аргументів. Відмінними від тотожного нуля при $m+n+$ $+p\le 4$ у розкладах (37), (38) є такі коефіцієнти: A_{001}, A_{002}, A_{020}, A_{120}, A_{021}, A_{003}, A_{220}, A_{040}, A_{121}, A_{022}, A_{004}; B_{001}, B_{010}, B_{011}, B_{110}, B_{210}, B_{030}, B_{111}, B_{012}, B_{310}, B_{130}, B_{211}, B_{031}, B_{112}, B_{103}.

Запишемо перші $m+n+p\le 3$ відмінні від тотожного нуля коефіцієнти $A_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$ та $B_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$, необхідні надалі для знаходження відгалужених розв'язків у першому наближенні:

$$A_{001}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)=F(Q')\left\{\frac{\sin\left(c_1^{(0)}(s_1-s_1')\right)}{\pi(s_1-s_1')}\cdot\frac{\alpha\cos\left(\alpha c_1^{(0)}(s_2-s_2')\right)}{\pi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(\alpha c_1^{(0)}(s_1-s_1')\right)}{\pi(s_1-s_1')}\cdot\frac{\cos\left(c_1^{(0)}(s_1-s_1')\right)}{\pi}\right\},$$

$$A_{002}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)=-F(Q')\left\{\frac{\sin\left(c_1^{(0)}(s_1-s_1')\right)}{\pi(s_1-s_1')}\times\right.$$

$$\times \frac{\alpha^2 (s_2 - s_2')^2 \sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{2\pi (s_2 - s_2')} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \frac{(s_1 - s_1')^2}{2!} -$$

$$- \alpha \frac{\cos\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi} \frac{\cos\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{\pi} \Bigg\},$$

$$A_{020}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{1}{2} \frac{F(Q')}{f_0^2 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}), \tag{39}$$

$$B_{010}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = \frac{F(Q')}{f_0 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}),$$

$$B_{011}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = \frac{F(Q')}{f_0 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \Bigg\{ \frac{\sin\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \cdot \frac{\alpha \cos\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{\pi} +$$

$$+ \frac{\sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \cdot \frac{\cos\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi} \Bigg\},$$

$$B_{110}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = \frac{F(Q')}{f_0^2 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}),$$

$$B_{210}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = \frac{F(Q')}{f_0^3 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}),$$

$$B_{030}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{F(Q')}{2 f_0^3 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}),$$

$$B_{111}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{F(Q')}{f_0^2 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \Bigg\{ \frac{\sin\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \cdot \frac{\alpha \cos\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{\pi} +$$

$$+ \frac{\sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \cdot \frac{\cos\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi} \Bigg\},$$

$$B_{012}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) = -\frac{F(Q')}{f_0 (Q', \mathbf{c}^{(0)})} \Bigg\{ \frac{\sin\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \times$$

$$\times \frac{\alpha^2 (s_2 - s_2')^2 \sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{2\pi (s_2 - s_2')} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\alpha c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi (s_1 - s_1')} \frac{(s_1 - s_1')^2}{2!} -$$

$$- \alpha \frac{\cos\left(c_1^{(0)} (s_1 - s_1')\right)}{\pi} \frac{\cos\left(\alpha c_1^{(0)} (s_2 - s_2')\right)}{\pi} \Bigg\}. \tag{40}$$

Підставляючи (37), (38) у систему (32) і враховуючи, що $f_0(Q', \mathbf{c}^{(0)})$ є її розв'язком, одержуємо систему нелінійних рівнянь відносно малих розв'язків w, ω:

$$w(Q) = a_{01}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)\mu +$$
$$+\sum_{m+n+p\geq 2}\mu^p\iint\limits_{\Omega} A_{mnp}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \qquad (41)$$

$$\omega(Q) - \iint\limits_{\Omega} F(Q')\mathcal{K}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\frac{\omega(Q')}{f_0\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)}\,dQ' =$$
$$= \sum_{m+n+p+q\geq 2}\mu^p\nu^q\iint\limits_{\Omega} B_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \quad (42)$$

де $a_{01}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right) = \iint\limits_{\Omega} A_{001}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)dQ'$.

Запишемо необхідні надалі власні функції спряженого з (5) рівняння, що відповідають власним значенням $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) = \left(c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}\right)$:

$$\psi_0(s_1,s_2) = F(s_1,s_2),$$
$$\psi_1(s_1,s_2) = \frac{s_1}{1+\eta_1 s_1}\cdot F(s_1,s_2). \qquad (43)$$

Оскільки у правій частині рівняння (41) відсутні лінійні члени відносно невідомих функцій $w(s)$, $\omega(s)$ (з урахуванням параметра μ), то згідно з [1] це рівняння належить до найпростіших інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта. Для зведення до цього типу рівняння (42) виконаємо такі перетворення: додамо й віднімемо від ядра лінійного інтегрального оператора, що знаходиться у правій частині (42), вираз

$$\sum_{j=0}^{1}\psi_j(Q)\varphi_j(Q'),$$

де $\psi_j(Q)$ і $\varphi_j(Q')$ – ортонормовані власні функції операторів T^* і T відповідно, які одержуємо на основі функцій (6), (19), (43) шляхом ортогоналізації й нормування. При цьому рівняння (42) набуде вигляду

$$\omega(Q) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} E\left(Q,Q';\mathbf{c}^{(0)}\right)\omega(Q')\,dQ' + \sum_{j=0}^{1}\zeta_j\psi_j(Q) +$$
$$+\sum_{m+n+p\geq 2}^{\infty}\mu^p\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B_{mnp}(Q,Q')w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ', \qquad (44)$$

де

$$E\left(Q,Q';\mathbf{c}^{(0)}\right) = \frac{F(Q')}{f_1(Q',c_1)}\mathcal{K}\left(Q,Q';\mathbf{c}^{(0)}\right) - \sum_{j=0}^{1}\psi_j(Q)\,\varphi_j(Q'), \qquad (45)$$

$$\zeta_0 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega(Q)\,\varphi_0(Q)\,dQ,$$
$$\zeta_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega(Q)\,\varphi_1(Q)\,dQ. \qquad (46)$$

Згідно з лемою Шмідта [1] одиниця не може бути власним значенням лінійного однорідного рівняння

$$\omega(Q) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} E\left(Q,Q';\mathbf{c}^{(0)}\right)\omega(Q')\,dQ'.$$

Внаслідок цього існує резольвента Фредгольма $R\left(s,s';\mathbf{c}^{(0)}\right)$ ядра $E\left(s,s';\mathbf{c}^{(0)}\right)$.

Розглядаючи рівняння (44) при фіксованій правій частині як рівняння Фредгольма II-го роду і записуючи формально його розв'язок через резольвенту $R(s,s';c_1)$, одержуємо

$$\omega(Q) = \sum_{j=0}^{1} \zeta_j \varphi_j(Q) + \sum_{m+n+p\geq 2}^{\infty} \mu^p \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{mnp}(Q,Q')\, w^m(Q')\, \omega^n(Q')\, dQ', \quad (47)$$

де

$$g_{mnp}(Q,Q') = B_{mnp}(Q,Q') + \int_{-1}^{1} R(Q,P;\mathbf{c}^{(0)}) B_{mnp}(P,Q')\, dP. \quad (48)$$

Таким чином, для знаходження відгалужених у точці $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}\right)$ розв'язків отримано систему двох найпростіших рівнянь (41), (47) типу Ляпунова – Шмідта. Згідно з [1] ця система при достатньо малих μ, $|\zeta_0|$, $|\zeta_1|$ має єдиний неперервний розв'язок, який можна записати у вигляді рівномірно збіжних рядів

$$w(s) = a\left(s,\mathbf{c}^{(0)}\right)\mu + \sum_{i+j+\ell\geq 2}^{\infty} \alpha_{ij\ell}(s)\, \zeta_0^i\, \zeta_1^j\, \mu^\ell, \quad (49)$$

$$\omega(s) = \zeta_0\varphi_0(s) + \zeta_1\varphi_1(s) + \sum_{i+j+\ell\geq 2}^{\infty} \beta_{ij\ell}(s)\, \zeta_0^i\, \zeta_1^j\, \mu^\ell. \quad (50)$$

Підставляючи вирази (49), (50) у рівняння (41), (47) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах, одержуємо рекурентну систему для визначення коефіцієнтів $\alpha_{ij\ell}(s)$, $\beta_{ij\ell}(s)$. Наведемо ті з них, які необхідні для знаходження малих розв'язків у першому наближенні:

$$\alpha_{002}(Q) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} A_{002}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right) dQ',$$

$$\alpha_{020}(Q) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} A_{020}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\varphi_2^2(Q')\, dQ',$$

$$\beta_{011}(Q) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[g_{011}(Q,Q') + g_{110}(Q,Q')\, a\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\right]\varphi_1(Q')\, dQ',$$

$$\beta_{030}(Q) = \int_{-1}^{1} \left[g_{110}(Q,Q')\alpha_{020}(Q')\varphi_1(Q') + g_{030}(Q,Q')\varphi_1^2(Q')\right]\varphi_1(Q')\, dQ',$$

$$\begin{aligned}\beta_{012}(Q) = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{011}(Q,Q')\beta_{011}(Q')\, dQ' + \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{110}(Q,Q')\left[a\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\beta_{011}(Q') + \right.\\ &\left. + \alpha_{002}(Q')\varphi_1(Q')\right]\varphi_0(Q')\, dQ' + \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[g_{012}(Q,Q')\varphi_1(Q') + g_{111}(Q,Q')\varphi_1(Q')a\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\right] dQ' + \\ &+ 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{210}(Q,Q')a^2\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right) dQ'. \end{aligned} \quad (51)$$

Для визначення значень параметрів ζ_0, ζ_1 (що входять у розв'язки (49), (50)) як функцій від змінної μ підставимо вираз (50) у формули (45). У результаті отримуємо систему рівнянь розгалуження Ляпунова – Шмідта

$$L_{011}^{(\delta)}\zeta_1\mu + \sum_{i+j+\ell\ge 3} L_{ij\ell}^{(\delta)}\,\zeta_1^i\,\zeta_2^j\,\mu^\ell = 0, \qquad \delta = 0,1\,, \tag{52}$$

де

$$L_{ij\ell}^{(\delta)} = \int_{-1}^{1} \beta_{ij\ell}(s)\,\varphi_\delta(s)\,ds \tag{53}$$

− коефіцієнти системи рівнянь розгалуження [1][1].

Згідно з [1] кількість розв'язків системи (52) визначає кількість відгалужених розв'язків системи (41), (47).

Як показано в [5], розв'язки рівняння (1) визначаються з точністю до сталого множника $\exp(i\beta)$, де β − довільна дійсна константа. Для однозначності шуканих розв'язків будемо вимагати виконання умови $\arg f(0,0) = 0$, що еквівалентно, зокрема, виконанню такої тотожності:

$$\omega(Q,\mu)\big|_{Q=0} = \omega(0,0,\mu) \equiv 0\,. \tag{54}$$

Ця умова буде виконуватись, якщо в рівнянні (47) і в представленні відгалужених розв'язків (50) покласти $\zeta_0(\mu) \equiv 0$. У цьому випадку рівняння розгалуження набуває вигляду

$$L_{11}\zeta_1\mu + L_{12}\zeta_1\mu^2 + L_{30}\zeta_1^3 + \sum_{j+\ell\ge 4,\, j\ge 1} L_{j\ell}\zeta_1^j\mu^\ell = 0\,, \tag{55}$$

де $L_{j\ell} = L_{0j\ell}^{(1)}$.

Для знаходження розв'язків рівняння (55) застосуємо метод діаграми Ньютона [1], який є геометричним методом для знаходження всіх розв'язків рівняння типу (55), що подаються у вигляді дробово-степеневого ряду

$$\zeta_1(\mu) = d_1\mu^{\varepsilon_1} + d_2\mu^{\varepsilon_2} + d_3\mu^{\varepsilon_3} + \ldots\,, \tag{56}$$

де ε_1, ε_2, $\varepsilon_3,\ldots$ − зростаюча послідовність раціональних чисел. Шуканими є коефіцієнти d_n і показники степенів ε_n.

Для побудови діаграми Ньютона, що відповідає рівнянню (55), згрупуємо в ньому члени з однаковими показниками степеня параметра ζ_1:

$$(L_{11}\mu + L_{12}\mu^2)\zeta_1 + L_{30}\zeta_1^3 + \sum_{j+\ell\ge 4,\, j\ge 1} L_{j\ell}\zeta_1^j\mu^\ell = 0\,.$$

Із цього запису випливає, що множина точок площини XOY, необхідна для побудови спадної частини діаграми, складається лише з трьох точок з такими координатами: $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$. Значення абсциси в цих точках відповідає показнику степеня параметра ζ_1, а значення ординати дорівнює найнижчому показнику змінної μ у відповідному поліномі при ζ_1^n. Отже, діаграма Ньютона рівняння (55) має вигляд, зображений на рис. 2. Довжина абсциси спадаючого відрізка діаграми дорівнює двом. Звідси випливає, що рівняння (55) має два відмінні від тотожного нуля розв'язки, які є дійсними у випадку, коли коефіцієнти L_{11}, L_{30} мають різні знаки, й записуються формулою

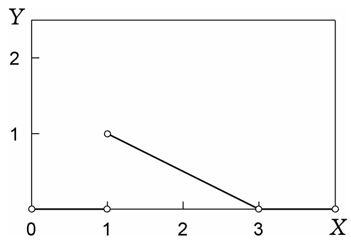


Рис. 2

[1] Зауважимо, що при обчисленні коефіцієнтів (55) застосовується рівність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{ij\ell}(P,Q')\varphi_\delta(P)\,dP = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B_{ij\ell}(P,Q')\psi_\delta(P)\,dP\,.$$

$$\zeta_1^{\delta}(\mu) = \pm h_1 \mu^{1/2} + \sum_{\ell=3}^{\infty} d_{\ell}^{(\delta)} \mu^{\ell+1/2}, \qquad \delta = 1, 2, \tag{57}$$

де

$$h_1 = \sqrt{-\frac{L_{11}}{L_{30}}}. \tag{58}$$

Числа $d_{\ell}^{(\delta)}$ знаходимо методом невизначених коефіцієнтів.

З рівності (50) випливає, що малі розв'язки визначаються через функцію $\zeta_1(\mu)$, записану формулою (57). Підставляючи (57) у ряди (47), (50) і покладаючи $\zeta_1(\mu) \equiv 0$, з використанням формул (51) знаходимо, що в точці c_1 від першого первинного розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c}^{(0)})$ відгалужуються два комплексно-спряжені між собою розв'язки системи (32), які в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1, \alpha c_1) &= f_0(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}) + \big(a(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}) + \\ &+ \alpha_{020}^{(1)}(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}) h_1^2\big)\mu \pm \\ &\pm i \frac{\varphi_1(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})}{\left\|\varphi_1(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})\right\|} h_1 \mu^{1/2} + O(\mu^{3/2}). \end{aligned} \tag{59}$$

Таким чином, дві різні функції $\zeta_2^{(\delta)}(\mu)$, $\delta = 1, 2$, породжують два комплексно-спряжені між собою розв'язки.

Вкажемо на деякі характерні властивості відгалужених розв'язків (59) для випадку парної за обома аргументами функції $F(s_1, s_2)$. У цьому випадку відгалужені в точці $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ розв'язки *мають непарну фазову ДН за аргументом* s_1. У першому наближенні це випливає з формули (59), де $\operatorname{Re} f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ – парна функція за обома аргументами, а $\operatorname{Im} f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ – непарна функція за аргументом s_1, через те що в цьому випадку $a(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)}) \equiv 0$, $\alpha_{020}^{(1)}(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ – парна функція за обома аргументами, $h_1 \neq 0$, а $\varphi_1(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ – парна функція за аргументом s_2 і непарна за аргументом s_1. Властивість непарності функцій $\arg f_{1,2}^{(1)}(s_1, s_2, c_1^{(0)}, \alpha c_1^{(0)})$ за аргументом s_1 у розв'язку (59) випливає, зокрема, з інваріантності нелінійного інтегрального оператора $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\top}$ у системі (32) відносно типу парності функцій $u(s_1, s_2)$ і $v(s_1, s_2)$.

Розглянемо числовий приклад апроксимації функції (31). Лінії можливого галуження первинного розв'язку (4), що відповідає різним власним функціям, поданим у **п. 1**, наведено на рис. 1. Значення функціонала σ, який характеризує середньоквадратичне відхилення заданої й апроксимуючої функцій на всій площині $\mathbb{R}^2$, у логарифмічному масштабі наведено на рис. 3. Крива *1* відповідає первинному (дійсному) розв'язку рівняння (1), крива *2* – відгалуженим комплексно-спряженим між собою розв'язкам при зміні параметрів c_1, c_2 на промені $c_2 = 0.8 c_1$.

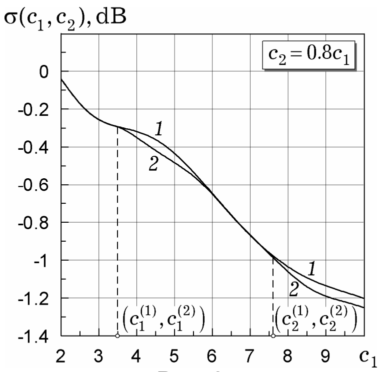
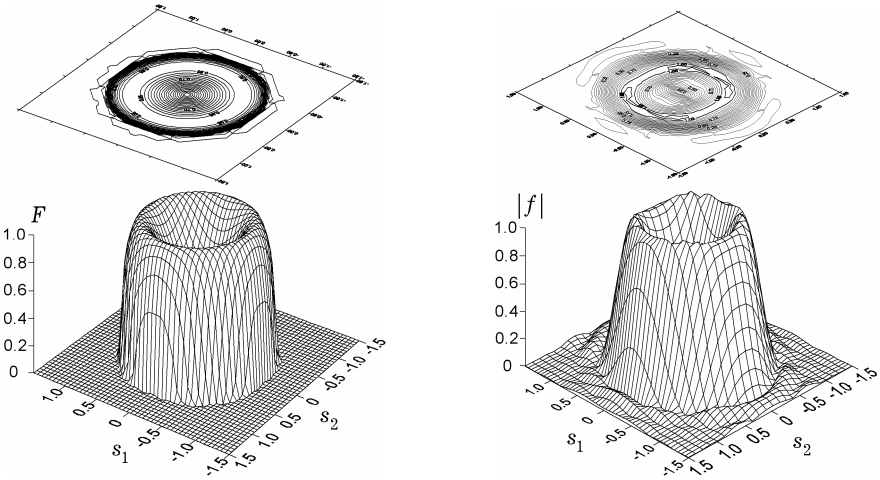


Рис. 3

З аналізу рис. 3 випливає, що відгалужені в точках $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)})$ і $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)})$ розв'язки є більш ефективними у порівнянні з первинним розв'язком f_0, оскільки функціонал σ набуває на них менших значень, ніж на первинному.

Задана та оптимальна апроксимуюча функції наведені відповідно на рис. 4*а* і рис. 4*б* при $c_1 = 9.25$, $c_2 = 7.4$.



а) *б*)

Рис. 4

Оптимальна функція $U(x,y)$ прообразу інтеграла Фур'є [7, 8], яка відповідає наведеній на рис. 4*б* апроксимуючій функції, показана на рис. 5.

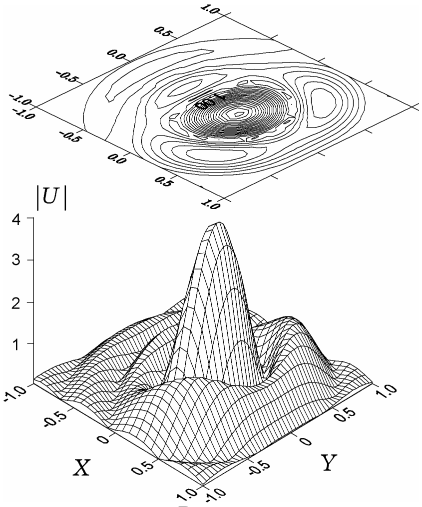


Рис. 5

На завершення роботи відзначимо, що у випадку парної за обома аргументами функції $F(s_1, s_2)$ дослідження тривимірного типу галуження розв'язків рівняння (1), що відповідає трикратним власним значенням рівняння (5) (криві *2*, *4* на рис. 1), доцільно проводити окремо в класах парних і непарних функцій, використовуючи властивість інваріантності нелінійних інтегральних операторів $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^\top$ у системі (32).

Висновки. Відзначимо, що задачі середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної функції модулем інтегрального перетворення Фур'є [7, 8] та задачі середньоквадратичної апроксимації функції модулем дискретного перетворення Фур'є [10] мають практичне застосування в теорії синтезу радіотехнічних та акустичних випромінюючих систем за заданими енергетичними характеристиками направленості [4]. Наявність неєдиності розв'язків у цих класах задач дає можливість для практики вибрати найбільш ефективний розв'язок, який має просту фізичну реалізацію.

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
2. *Войтович Н. Н., Савенко П. А.* Об одном интегральном уравнении теории синтеза антенн // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 161–163.

3. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
4. *Кравченко В. Ф., Процах Л. П., Савенко П. А., Ткач М. Д.* Математические особенности синтеза плоских эквидистантных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности // Антенны. – 2010. – № 3 (154). – С. 34–46.
5. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
6. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
7. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 53–64.
8. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 80–85.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
10. *Savenko P., Tkach M.* Numerical approximation of real finite nonnegative function by the modulus of discrete Fourier transform // Appl. Math. – 2010. – No. 1. – P. 41–51.
11. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems. – New York: Springer-Verlag, 1986. – 897 p.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МОДУЛЕМ ДВОЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Исследуется ветвление решений нелинейного двухмерного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, которое возникает в задачах среднеквадратической аппроксимации действительной финитной неотрицательной функции от двух переменных модулем двойного интеграла Фурье, зависящего от двух параметров [7, 8]. *Найдены аналитические выражения собственных функций соответствующего линейного однородного интегрального уравнения, необходимые для построения ответвленных решений, и получены системы трансцендентных уравнений для нахождения точек их ветвления. Приведены в первом приближении аналитические представления комплексных решений, ответвленных от действительного решения, для двухмерного случая ветвления.*

BRANCHING OF SOLUTIONS OF PROBLEM OF MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF REAL FINITE FUNCTION WITH RESPECT TO TWO VARIABLES BY DOUBLE FOURIER TRANSFORMATION MODULUS

The branching of solutions of nonlinear two-dimensional integral equation of Hammerstein type, arising in the mean-square approximation problems of real finite nonnegative function with respect to two variables by module of double Fourier integral that depends on two parameters is investigated [7, 8]. *The analytical expressions of eigenfunctions of respective linear homogeneous equation, necessary for construction the branched solutions, are found. The systems of transcendental equations for finding the points of their branching are obtained. The analytical representations of complex solutions that branched-off from the first solution, are shown as the first approximation for two-dimensional case of branching.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.12.09