

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМОГО ВИРІЗУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ КЛИНА З ТОНКИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ ДОВІЛЬНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ

Метод прямого вирізування полягає у моделюванні обмеженого тіла, зокрема з тонкими неоднорідностями, за допомогою набагато простішої задачі для необмеженого чи частково обмеженого тіла з так само розміщеними тонкими неоднорідностями та наявністю додаткових тріщин чи абсолютно жорстких включень достатньо великої довжини, які моделюватимуть крайові умови обмеженого тіла. Апробацію цього методу здійснено на задачах антиплоскої деформації симетрично навантаженої тріщини у клині з вільними берегами та абсолютно жорсткого включення, поміщеного з певним натягом у клин із защемленими берегами. Для пружного включення побудовано узагальнені умови взаємодії, що дають змогу уніфікувати процедуру задання різних крайових умов у разі застосування методу прямого вирізування.

Вступ. Задачі лінійної теорії пружності для областей з кутовими точками, зокрема клинів, з математичного погляду є досить складними. Одним із найбільш поширених методів розв'язування задач для клиновидних систем, зокрема з тонкими неоднорідностями, є метод інтегральних перетворень Мелліна. Використовуючи цей метод, у монографії [4, розд. 3] досліджено ряд задач контактної взаємодії клиновидних тіл, а в праці [11] проаналізовано напружено-деформований стан клина у випадку анізотропії матеріалу. Перетворення Мелліна також успішно застосовували до задач теорії тріщин у клинах, зокрема у роботах [9, 10]. Проте його використання у задачах теорії пружності для клинів з тріщинами чи стрічковими включеннями, окрім переваг, має певні недоліки: у випадку несиметрії чи нерадіального розміщення дефекту у клині постає досить складна проблема обернення. Інший поширений метод – комплексних потенціалів – з успіхом застосовано у задачах для клина, послабленого системою тріщин та отворів довільної конфігурації, у роботах [5, 6]. Проте його використання у випадку аналізу багатоклинової, зокрема двоклинової, системи пов'язане зі значними складнощами.

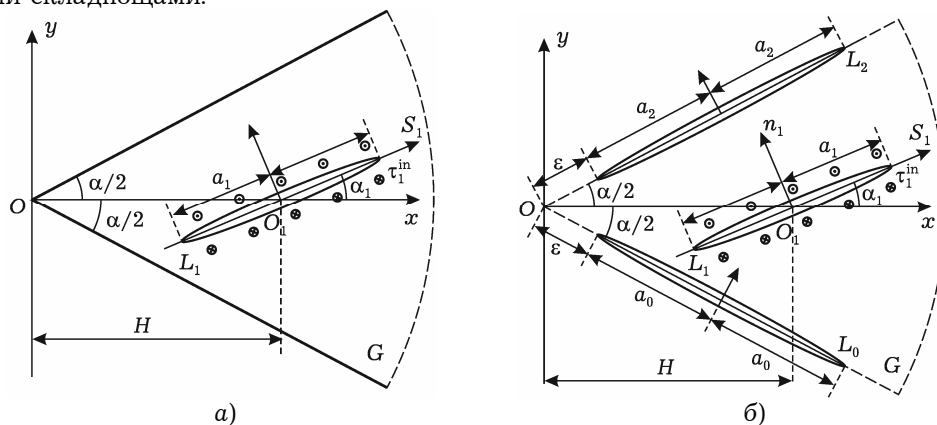


Рис. 1

У цій роботі здійснена спроба застосування методу прямого вирізування (МПВ) [3] до задачі для однорідного клина з довільно орієнтованою тонкою неоднорідністю (тріщиною чи абсолютно жорсткою плівкою). За допомогою МПВ задачу для клина з неоднорідністю L_1 (рис. 1а) замінюють набагато простішою задачею для простору з трьома тонкими включеннями,

два з яких, L_0 і L_2 , моделюватимуть краї клина (див. рис. 1б), а включення L_1 – досліджувану неоднорідність. Крайові умови задаватимемо на L_0 , L_2 напруженнями на берегах моделюючих елементів – тріщин, – або переміщеннями (натягом) на берегах моделюючих елементів – жорстких включень. Зрозуміло, що такий підхід буде наближеним, оскільки не враховує можливої особливості і власних розв’язків у вістрі клина. Проте для аналізу напруженого стану на певній відстані від вістря, передусім в околі досліджуваної неоднорідності L_1 , такий підхід видається цілком обґрунтованим.

Формулювання задачі для простору з включеннями. Розв’язок задачі для простору з модулем пружності G та N стрічковими неоднорідностями за антиплоскої деформації є добре відомим [3, 8, розд. 5]. Запишемо його у вигляді

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \frac{i}{2\pi} \sum_{p=0}^N \int_{L'_p} \frac{f_{5p}(t) + iGf_{6p}(t)}{t \exp(i\alpha_p) - (z - z_{0p})} dt, \quad (1)$$

$$z_{0p} = x_{0p} + iy_{0p},$$

де f_{5p} , f_{6p} , $p = 0, \dots, N$, – невідомі функції стрибків напружень і похідних від переміщень на осьових лініях неоднорідностей; σ_{yz}^0 , σ_{xz}^0 – напруження у просторі без неоднорідностей, проте із заданим зовнішнім навантаженням. Тут і надалі позначатимемо: L'_p – осьові лінії перерізу включень площиною xOy ; $O_p(x_{0p}, y_{0p})$ – координати центру кожної з неоднорідностей; α_p – кут орієнтації півосі $O_p s_p$; $2h_p$ – ширина включення; $2a_p$ – його довжина; G_p^{in} – модуль зсуву неоднорідності, $p = 0, \dots, N$, (див. рис. 1б). Надалі для скорочення записів буде досліджуватися випадок однієї неоднорідності в клині ($N = 2$), однак це не зменшує загальності підходу.

Для визначення невідомих функцій стрибків f_{5p} , f_{6p} слід скористатися умовами взаємодії (УВ) матриці з кожним із включень. Випадок симетричного навантаження берегів тріщини або абсолютно жорсткої плівки із заданим натягом дає прості УВ. Деяко складнішими, проте й універсальнішими, є умови взаємодії для ненавантаженого включення з довільним модулем зсуву [7, 8, розд. 3], що у своїх граничних випадках дає УВ для тріщини або абсолютно жорсткого включення чи плівки.

Узагальнені умови взаємодії. Для можливості задання довільних крайових умов й уніфікації у такий спосіб розв’язування задач за допомогою МПВ виведемо узагальнені умови взаємодії для пружного стрічкового включення із заданими на берегах додатковими напруженнями і переміщеннями.

Вважаємо, що тонке стрічкове включення L розміщене на прямолінійній межі розділу двох матеріалів з модулями зсувів G_1 і G_2 , яким у системі координат xOy з напрямленою уздовж лінії розділу матеріалів віссю Ox відповідають півплощини S_1 і S_2 . Довжина включення $2a$, ширина $2h$, модуль зсуву G^{in} . Припускаємо також, що до верхнього (+) і нижнього (–) берегів включення прикладено додаткові напруження $\tau^+(x, h)$ і $\tau^-(x, -h)$, а також задано додаткові переміщення (натяг) верх-

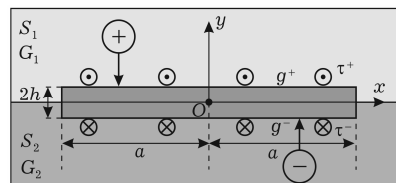


Рис. 2

нього і нижнього берегів $g^+(x, h)$ та $g^-(x, -h)$ відповідно (див. рис. 2). Або ж на відповідні береги матриці додатково діють такі ж за величиною дотичні напруження протилежного знаку $-\tau^\pm(x, \pm h)$ та певним чином зреалізовано натяг $-g^\pm(x, \pm h)$ берегів матриці стосовно поверхонь включення.

За таких обставин можна стверджувати, що між включенням і матрицею існує неідеальний механічний контакт і умови такого контакту матимуть вигляд

$$w^{\text{in}\pm} = w^\pm + g^\pm, \quad \sigma_{yz}^{\text{in}\pm} = \sigma_{yz}^\pm + \tau^\pm. \quad (2)$$

Вважатимемо, що тут верхні індекси «+» і «-» стосуються відповідно верхнього і нижнього контактуючих берегів матриці та включення; індекс «in» стосується величин включення; $w, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ – переміщення і ненульові складові тензора напружень матриці; $w^{\text{in}}, \sigma_{yz}^{\text{in}}, \sigma_{xz}^{\text{in}}$ – переміщення і складові тензора напружень включення.

Оскільки включення є тонким, існує певний зв'язок між напруженнями та переміщеннями на протилежних його поверхнях [8]:

$$G^{\text{in}} \left(\frac{\partial w^{\text{in}+}}{\partial x} + \frac{\partial w^{\text{in}-}}{\partial x} \right) + \frac{1}{h(x)} \int_{-a}^x (\sigma_{yz}^{\text{in}+} - \sigma_{yz}^{\text{in}-}) dt = 2\sigma_{xz}^{\text{av}}(-a), \quad (3)$$

$$\sigma_{yz}^{\text{in}+} + \sigma_{yz}^{\text{in}-} = \frac{1}{h} \int_{-a}^x G^{\text{in}} \left(\frac{\partial w^{\text{in}+}}{\partial x} - \frac{\partial w^{\text{in}-}}{\partial x} \right) dt + \frac{w^* G^{\text{in}}}{h}. \quad (4)$$

Враховуючи (2), з (3) одержимо

$$G^{\text{in}} \left(\frac{\partial w^+}{\partial x} + \frac{\partial w^-}{\partial x} + \frac{\partial g^+}{\partial x} + \frac{\partial g^-}{\partial x} \right) + \frac{1}{h(x)} \int_{-a}^x (\sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^- + \tau^+ - \tau^-) dt = 2\sigma_{xz}^{\text{av}}(-a). \quad (5)$$

Аналогічно для співвідношення (4) отримаємо

$$\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- + \tau^+ + \tau^- = \frac{G^{\text{in}}}{h} \int_{-a}^x \left(\frac{\partial w^+}{\partial t} - \frac{\partial w^-}{\partial t} + \frac{\partial g^+}{\partial t} - \frac{\partial g^-}{\partial t} \right) dt + \frac{w^* G^{\text{in}}}{h},$$

звідки

$$\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- + \tau^+ + \tau^- = \frac{G^{\text{in}}}{h} \int_{-a}^x \left(\frac{\partial w^+}{\partial t} - \frac{\partial w^-}{\partial t} \right) dt + \frac{G^{\text{in}}}{h} [g^+(x) - g^+(-a) - \{g^-(x) - g^-(-a)\}] + \frac{w^* G^{\text{in}}}{h}. \quad (6)$$

Таким чином, отримані узагальнені умови взаємодії матриці з тонкостінним включенням у вигляді (5), (6) описують неідеальний контакт включення з матрицею.

Для обчислення сталих $\sigma_{xz}^{\text{av}}(-a)$ і w^* можна використати апріорні залежності [7, 8, розд. 3]. Зокрема, для однакових матеріалів півплощин ($G_1 = G_2 = G$) маємо

$$\sigma_{xz}^{\text{av}}(-a) = \sigma_{xz}^0(-a) \frac{G^{\text{in}}}{\max(G^{\text{in}}, G)},$$

$$w^* = 2h(a)\sigma_{yz}^0(-a) \frac{\min(G^{\text{in}}, G)}{G^2}.$$

Дослідимо граничні випадки. Спрямувавши G^{in} до нуля, з (5), (6) отримаємо відповідно

$$\sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^- + \tau^+ - \tau^- = 0, \quad \sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = -(\tau^+ + \tau^-),$$

звідки $\sigma_{yz}^+ = -\tau^+$, $\sigma_{yz}^- = -\tau^-$, що відповідає крайовим умовам для тіла із розрізом, до берегів якого прикладено дотичні напруження $-\tau^+$, $-\tau^-$.

У випадку, якщо $G^{\text{in}} \rightarrow \infty$, залежності (5), (6) дають

$$\frac{\partial w^+}{\partial x} + \frac{\partial w^-}{\partial x} = -\left(\frac{\partial g^+}{\partial x} + \frac{\partial g^-}{\partial x}\right),$$

$$\int_{-a}^x \left[\left(\frac{\partial w^+}{\partial x} - \frac{\partial w^-}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (g^+ - g^-) \right] dt = 0,$$

звідки $w^+ = -g^+$, $w^- = -g^-$. Це відповідає крайовим умовам для математичного розрізу, на верхній поверхні якого задано переміщення $-g^+$, а на нижній задано $-g^-$.

Побудова системи сингулярних інтегральних рівнянь. В умови взаємодії (5), (6) входять напруження і похідні від переміщень на верхньому і нижньому берегах неоднорідностей. Щоб їх визначити, перейдемо в розв'язку (1) для p -го включення ($p = 0, \dots, N$) до локальної системи координат $s_p O_p n_p$ за формулами

$$\sigma_{nz}^p + i\sigma_{sz}^p = [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_p),$$

$$z = x + iy = \tilde{z}_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} = (s_p + in_p) \exp(i\alpha_p) + z_{0p}$$

і за формулою Сохоцького – Племелі [1] визначимо напруження на верхньому і нижньому берегах включень:

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^{p\pm}(s_p) + i\sigma_{sz}^{p\pm}(s_p) &= \sigma_{nz}^{0p} + i\sigma_{sz}^{0p} \mp \frac{1}{2} [f_{5k}(s_p) + iGf_{6k}(s_p)] + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)}{t - s_p} dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, L'_k \\ k \neq p}}^N \int \frac{[f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)] \exp(i\alpha_p)}{t \exp(i\alpha_k) - (s_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} - z_{0k})} dt, \\ \sigma_{nz}^{0p} + i\sigma_{sz}^{0p} &= (\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0) \exp(i\alpha_p), \\ z_{0p} &= x_{0p} + iy_{0p}, \quad p = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи (7) у (5), (6) з використанням залежності $\frac{\partial w^\pm}{\partial x} = \frac{1}{G} \sigma_{xz}^\pm$, отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{5p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G}{G^{\text{in}} h(x)} \int_{-a}^{s_p} f_{5p}(t) dt + 2\tilde{\sigma}_{sz}^p(s_p) &= 2 \frac{G\sigma_{sz}^{\text{av}}(-a)}{G^{\text{in}}} - \\ - G \left(\frac{\partial g^+}{\partial x} + \frac{\partial g^-}{\partial x} \right) - \frac{G}{G^{\text{in}} h(x)} \int_{-a}^{s_p} (\tau^+ - \tau^-) dt - 2\sigma_{sz}^{0p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{6p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G^{\text{in}}}{Gh} \int_{-a}^{s_p} f_{6p}(t) dt - \frac{2}{G} \tilde{\sigma}_{nz}^p = \\
& = -\frac{G^{\text{in}}}{Gh} [g^+ - g^- - (g^+(-a) - g^-(-a))] + \frac{1}{G} [\tau^+ + \tau^-] - \\
& - \frac{w^* G^{\text{in}}}{Gh} + \frac{2}{G} \sigma_{nz}^{0p}, \quad p = 0, \dots, N, \quad (8)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{nz}^p &= \text{Re} \left[\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq p}}^N \int_{L'_k} \frac{[f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)] \exp(i\alpha_p)}{t \exp(i\alpha_k) - (s_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} - z_{0k})} dt \right], \\
\tilde{\sigma}_{sz}^p &= \text{Im} \left[\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq p}}^N \int_{L'_k} \frac{[f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)] \exp(i\alpha_p)}{t \exp(i\alpha_k) - (s_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} - z_{0k})} dt \right].
\end{aligned}$$

Для розв'язування системи (8) необхідно записати додаткові умови глобальної рівноваги кожної неоднорідності й однозначності переміщень при обході навколо неї:

$$\begin{aligned}
\int_{L'_p} f_{5p}(t) dt &= \int_{L'_p} [\tau_p^{\text{in}+}(t) - \tau_p^{\text{in}-}(t)] dt, \\
\int_{L'_p} f_{6p}(t) dt &= \int_{L'_p} [g_p^{\prime+}(t) - g_p^{\prime-}(t)] dt. \quad (9)
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (8) з додатковими умовами (9) можна отримати, зокрема, за допомогою методу колокацій [8, розд. 2], а отже, згідно з (1) визначити напружений стан тіла.

Використання МПВ у задачі для клина зі стрічковою неоднорідністю. Для верифікації методу прямого вирізування дослідимо зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершин тріщини або абсолютно жорсткого включення L_1 , що розміщене на бісектрисі однорідного клина. Вважатимемо, що береги клина вільні від навантаження, а до берегів тріщини прикладено сталі симетричні зусилля τ_1^{in} .

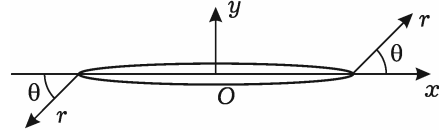


Рис. 3

Відповідно до [2] напружений стан в околі вершини включення у полярній системі координат (рис. 3) описується асимптотичними формулами

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_{31} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} + K_{32} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{Bmatrix} \right] + O(\sqrt{r}),$$

де знак «+» беремо для правої вершини включення, а «-» - для лівої. Величини K_{31} , K_{32} є узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (УКІН). Якщо функції стрибків $f_{51}(t)$, $f_{61}(t)$ мають кореневу особливість вигляду $f_{j1}(t) = \varphi_j(t)/\sqrt{a_1^2 - t^2}$ (тут $\varphi_j(t)$ - певна гладка обмежена функція), то за їх допомогою можна легко визначити УКІН [2]:

$$\begin{aligned}
K_{32} - iK_{31} &= \mp (p_5^\pm + iGp_6^\pm) \sqrt{\pi/2}, \\
p_j^\pm &= \lim_{t \rightarrow \pm a_1} [\sqrt{a_1 \mp t} f_{j1}(\pm a_1)], \quad j = 5, 6.
\end{aligned}$$

Для випадку тріщини маємо $K_{32} = 0$ і $K_{31} \sim K_3$, де K_3 - класичний КІН теорії тріщин. Для абсолютно жорсткої півки $K_{31} = 0$.

Спочатку обчислимо безрозмірні (нормовані) УКІН

$$K_3^{\text{cr}, A, B} = K_{31}^{A, B} / \tau_1^{\text{in}} \sqrt{\pi a_1}$$

для лівого, A , і правого, B , кінців тріщини. Індекс «сг» тут і далі стосуватиметься тріщини, а «г» – до абсолютно жорсткого включення. За допомогою МПВ вільні грані клина моделюватимемо достатньо довгими включеннями з малим відносним модулем зсуву $\lg[G_k^{\text{in}}/G] = -7$, $k = 0, 2$. Уведемо позначення: $a_0/a_1 = a_2/a_1 = a$ – відносна довжина моделюючих елементів; ε – відстань від кінців моделюючих елементів до віртуальної вершини клина (див. рис. 1б). Зафіксуємо відносну відстань до вершини клина $\varepsilon = 10^{-4} a_1$. Навантажену тріщину розмістимо на осі віртуального клина ($\alpha_1 = 0$) так, щоб $H_1 = H/a_1 = x_{01}/a_1 = 2$. Результати розрахунків $K_3^{\text{cr}, A, B}$ тріщини L_1 для значень $a = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$ подано в табл. 1.

Таблиця 1

$\alpha \backslash a$	$\alpha = \pi/6$		$\alpha = \pi/3$		$\alpha = \pi/2$		$\alpha = 2\pi/3$	
	A	B	A	B	A	B	A	B
3	1.5069	1.3394	1.2209	1.1362	1.1232	1.0718	1.0786	1.0438
6	1.5064	1.3394	1.2216	1.1375	1.1255	1.0752	1.0824	1.0482
9	1.5065	1.3394	1.2216	1.1376	1.1256	1.0753	1.0828	1.0487
12	1.5065	1.3394	1.2216	1.1376	1.1256	1.0754	1.0829	1.0489
15	1.5064	1.3394	1.2216	1.1376	1.1256	1.0754	1.0829	1.0489
18	1.5064	1.3391	1.2216	1.1375	1.1256	1.0754	1.0829	1.0489
21	1.5064	1.3391	1.2216	1.1375	1.1256	1.0754	1.0829	1.0489
$\alpha \backslash a$	$\alpha = \pi$		$\alpha = 4\pi/3$		$\alpha = 3\pi/2$		$\alpha = 5\pi/3$	
	A	B	A	B	A	B	A	B
3	1.0413	1.0219	1.0270	1.0141	1.0231	1.0120	1.0201	1.0104
6	1.0460	1.0261	1.0314	1.0174	1.0272	1.0149	1.0239	1.0131
9	1.0471	1.0271	1.0328	1.0186	1.0287	1.0159	1.0254	1.0141
12	1.0474	1.0274	1.0336	1.0189	1.0293	1.0165	1.0263	1.0146
15	1.0476	1.0276	1.0337	1.0193	1.0298	1.0168	1.0267	1.0150
18	1.0478	1.0278	1.0340	1.0194	1.0300	1.0172	1.0270	1.0153
21	1.0478	1.0278	1.0341	1.0195	1.0301	1.0173	1.0273	1.0155

Аналіз даних табл. 1 свідчить про доволі швидку збіжність нормованих УКІН $K_3^{\text{cr}, A, B}$ для лівого, A , і правого, B , кінців тріщини зі збільшенням відносної довжини a моделюючих елементів до певних граничних значень для різних значень кута α розхилу клина. Похибка близько 0.1% досягається вже при $a = 9$, причому зі збільшенням кута α розхилу клина довжину моделюючих елементів для забезпечення необхідної точності обчислень також треба збільшувати.

Через більшу близькість вістря тріщини до вільної поверхні значення УКІН для лівого кінця тріщини природно виявилось більшим від УКІН для правого кінця. Також можна зазначити, що зі збільшенням кута α розхилу клина УКІН тріщини спадає. Результати обчислення УКІН для тріщини у клині з розхилом $\alpha = \pi$ (півплощина), отримані методом прямого вирізування, з похибкою близько 0.1% (для $a = 18$) збігаються з результатами обчислення УКІН для тріщини у півпросторі, отриманими безпосереднім розв'язуванням задачі [3]. Це підтверджує вірогідність отриманих результатів.

Коли $\alpha = 2\pi$, отримуємо задачу для навантаженої тріщини в одній площині з півнескінченною тріщиною у нескінченному просторі. Такий розв'язок формальним покладанням $\alpha = 2\pi$ за допомогою методу прямого вирізування отримати не можна, бо тоді моделюючі дефекти повинні налягати один на другий. Однак можна отримати наближений розв'язок такої задачі,

вважаючи, що α є дещо меншим від $\alpha = 2\pi$. У табл. 2 наведено результати обчислення залежності безрозмірного УКІН $K_3^{cr,A,B}$ від довжини a моделюючих елементів для змодельованого клина з кутом розхилу $\alpha = 358^\circ$ для значень $a = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$. Результати безпосереднього обчислення безрозмірного УКІН відповідної задачі для навантаженої тріщини на одній прямій з півнескінченною тріщиною при $\alpha = 2\pi$ без застосування методу вирізування містяться в останньому стовпчику табл. 2. Зі збільшенням довжини a моделюючих елементів спостерігається поступове наближення результатів обчислення безрозмірних УКІН до певних граничних значень, які, у свою чергу, є досить близькими (похибка приблизно 0.1%) до результатів обчислення цих УКІН для відповідної задачі у її точному формулюванні.

Таблиця 2

a	3	6	9	12	15	18	21	$\alpha = 2\pi$
$K_3^{cr,r,A}$	1.0156	1.0193	1.0209	1.0217	1.0223	1.0226	1.0229	1.0221
$K_3^{cr,r,B}$	1.0079	1.0104	1.0115	1.0121	1.0125	1.0127	1.0129	1.0123

Розглянемо приклад навантаженої сталими симетричними зусиллями τ_1^{in} тріщини, що розміщена на осьовій лінії клина. Вплив відносної відстані $d = H_1 - 1$ від вершини A тріщини до віртуального вістря клина O на нормовані УКІН $K_3^{cr,A,B}$ для кутів $\alpha = \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$ розкриття клина при $\varepsilon = 10^{-4}a_1$, $a = 15$ відображено на рис. 4.

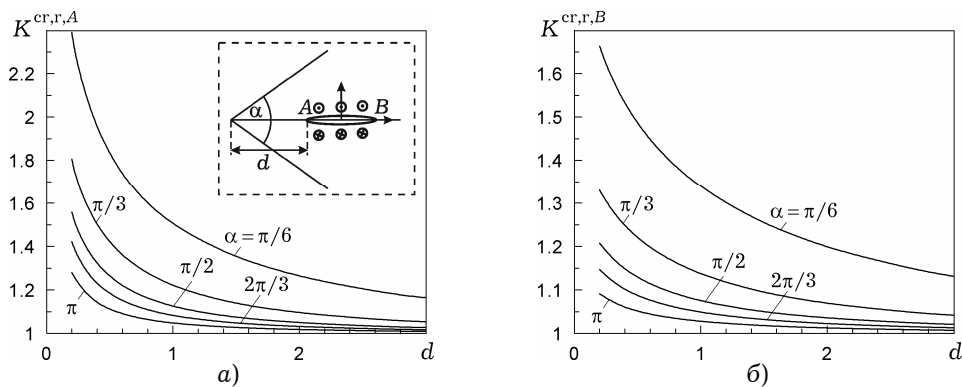


Рис. 4

Як і очікувалося, зі збільшенням відстані від вершини тріщини L_1 до вістря клина, УКІН $K_3^{cr,A,B}$ рівномірно спадають і для великих відносних відстаней d прямують до значення УКІН для навантаженої тріщини в однорідному просторі ($K_3 = 1$). Зменшення кута розхилу клина спричиняє зростання УКІН, причому величина коефіцієнтів інтенсивності напружень для вершини тріщини A завжди є більшою від значення УКІН у правій, вершині тріщини, B .

Проаналізуємо вплив відстані ε від кінців моделюючих елементів до віртуальної вершини клина на точність обчислення УКІН $K_3^{cr,A,B}$ (табл. 3). Досліджуватимемо УКІН для тріщини, лівий кінець якої розміщений досить близько від вершини клина: вважатимемо, що $H_1 = 1.1$, $a = 15$. Як видно з таблиці, похибка обчислення УКІН, менше 1%, досягається вже для значень $\varepsilon < 0.01a_1$.

Таблиця 3

$\alpha \backslash \varepsilon/a_1$	$\alpha = \pi/6$		$\alpha = \pi/3$		$\alpha = \pi/2$		$\alpha = 2\pi/3$	
	A	B	A	B	A	B	A	B
0.1	2.6201	1.7685	1.9658	1.3966	1.6862	1.2547	1.5256	1.1816
0.01	2.9479	1.7732	2.2011	1.4034	1.8811	1.2631	1.6958	1.1909
0.001	2.9364	1.7729	2.2012	1.4035	1.8811	1.2633	1.6962	1.1911
0.0001	2.9457	1.7731	2.2012	1.4035	1.8813	1.2633	1.6962	1.1911
$\alpha \backslash \varepsilon/a_1$	$\alpha = \pi$		$\alpha = 4\pi/3$		$\alpha = 3\pi/2$		$\alpha = 5\pi/3$	
	A	B	A	B	A	B	A	B
0.1	1.3495	1.1105	1.2582	1.0777	1.2272	1.0673	1.2014	1.0591
0.01	1.4886	1.1215	1.3777	1.0897	1.3397	1.0796	1.3088	1.0717
0.001	1.4916	1.1221	1.3847	1.0905	1.3490	1.0807	1.3203	1.0729
0.0001	1.4916	1.1221	1.3848	1.0909	1.3498	1.0809	1.3214	1.0731

У наступному прикладі з використанням МПВ дослідимо вплив на УКІН $K_3^{cr,A,B}$ кута орієнтації навантаженої сталими внутрішніми напруженнями тріщини L_1 з центром на осі клина для значень кутів розхилу клина $\alpha = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ (рис. 5). Суцільні криві відповідають значенням УКІН у лівій вершині тріщини, A , штрихові – правій вершині, B . Приймаємо, що $H_1 = 3$, $a = 15$, $\varepsilon = 10^{-4} a_1$. Внаслідок симетрії задачі враховуємо лише проміжок зміни $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$.

Бачимо, що зменшення кута розхилу клина призводить до зростання УКІН $K_3^{cr,A,B}$, причому ближча до вістря клина вершина тріщини має більший УКІН. Зі зростанням кута повороту тріщини α_1

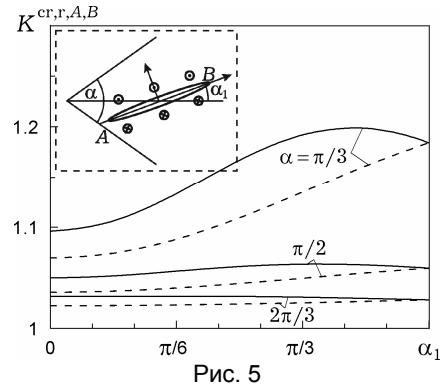


Рис. 5

спостерігається монотонне зростання УКІН правого вістря тріщини $K_3^{cr,B}$. Для лівого вістря, A , спостерігаємо дещо іншу ситуацію: зростання УКІН $K_3^{cr,A}$ зі збільшенням кута α_1 до певного максимального значення і його подальше зменшення. Зазначимо, що максимальні значення $K_3^{cr,A}$ для гострого (суцільна крива при $\alpha = \pi/3$) і прямого (суцільна крива при $\alpha = \pi/2$) кутів розхилу клина досягаються не за максимального наближення лівого вістря тріщини до вільної поверхні (кути $\alpha_1 = \pi/3$ і $\alpha_1 = \pi/4$ відповідно), коли вісь тріщини перпендикулярна до найближчої до вістря тріщини межі клина, а за кутів, що є дещо більшими від цих значень (кути близькі до $\alpha_1 = 5\pi/12$ і $\alpha_1 = \pi/3$ відповідно). Для тупого кута розхилу клина (суцільна крива при $\alpha = 2\pi/3$) максимальний УКІН $K_3^{cr,A}$ досягається для кута, близького до $\alpha_1 = \pi/6$, при якому ліве вістря, A , тріщини є найближчим до вільної поверхні.

Пояснити ці результати можна перш за все впливом взаємодії правого вістря тріщини, B , з межею клина. Коли кут розхилу клина $\alpha = 2\pi/3$, праве вістря неоднорідності практично не взаємодіє з вільною поверхнею, тому максимальне значення УКІН для тріщини $K_3^{cr,A}$ отримано за найближчої відстані лівого вістря до вільної поверхні клина ($\alpha_1 = \pi/6$). Для прямого і

гострого кутів розхилу клина вже відчутна взаємодія правого вістря з вільною поверхнею, а отже, якісні результати є іншими. При куті $\alpha_1 = \pi/2$ досягається симетрія задачі стосовно осі Ox , у зв'язку з чим $K_3^{cr,B} = K_3^{cr,A}$ для всіх кутів розхилу клина.

Подібно до задач теорії тріщин було досліджено вплив на точність результатів застосування МПВ у випадку обчислення нормованих УКІН $K_3^{r,A,B} = K_{32}^{A,B} / (w' G \sqrt{\pi a_1})$ для різної відносної довжини a моделюючих елементів для задачі стосовно практично абсолютно жорсткого включення ($G_1^{in} = 10^7 G$), розташованого на бісектрисі ($\alpha_1 = 0$) клина з жорстко защемленими краями. Вважали, що таке включення L_1 поміщене у клин з натягом $w^\pm = x$, тобто $w' = 1$.

Згідно з МПВ крайові умови моделювали за допомогою дуже жорстких ($G_0^{in} = G_2^{in} = 10^7 G$) включень, вважаючи також, що $\varepsilon = 10^{-4} a_1$, $H_1 = H/a_1 = x_{01}/a_1 = 2$. Результати обчислення УКІН $K_3^{r,A,B}$ менше як на 0.1% різняться від нормованих УКІН $K_3^{r,A,B}$ для навантаженої симетричними зусиллями тріщини у змодельованому за допомогою МПВ клині з вільними берегами (див табл. 1).

Практичну ідентичність результатів (різниця менша 0.1%) з вищенаведеними прикладами для тріщини виявили також дані, отримані для тих же геометричних параметрів у задачі для АЖВ, поміщеного з натягом $w^\pm = x$ у клин із защемленими берегами. Зокрема, графіки впливу відносної відстані $d = H_1 - 1$ від вершини A АЖВ до віртуального вістря клина O на нормовані УКІН $K_3^{r,A,B}$ для різних кутів α розкриття клина збігаються з кривими рис. 4 для задачі теорії тріщин. Те саме стосується і результатів вивчення впливу відстані ε кінців моделюючих елементів до віртуальної вершини клина на УКІН $K_3^{r,A,B}$, що збігаються із даними табл. 3; графіки впливу кута орієнтації АЖВ на УКІН $K_3^{r,A,B}$ збігаються з кривими рис. 5.

Отже, на розглянуті задачі стосовно жорсткого тонкого включення, поміщеного з натягом $w^\pm = x$ у клин із защемленими берегами, можна перенести всі висновки, сформульовані для задач навантаженої тріщини у клині з вільними від напружень берегами. Спричинене це спорідненістю отриманих інтегральних рівнянь розглядуваних задач, хоча механічний сенс УКІН для тріщини і АЖВ є різним.

Висновки. Результати роботи підтвердили ефективність застосування методу прямого вирізування до задач про визначення напружено-деформованого стану і концентрації напружень у клинових системах з тонкими довільно орієнтованими стрічковими неоднорідностями у вигляді тріщин та абсолютно жорстких включень. Вірогідність результатів забезпечується, зокрема, збігом із розрахованими значеннями УКІН у задачі для півпростору з навантаженою тріщиною. Виявлено відповідність задач про визначення УКІН для навантаженої тріщини у клині з вільними краями і для поміщеного з певним натягом АЖВ у такий самий клин із защемленими краями.

Побудовані узагальнені умови взаємодії дають змогу у разі застосування МПВ уніфікувати процедуру задання різних крайових умов.

Використовуючи прості залежності для кусково-однорідного простору [2], за допомогою МПВ можна досліджувати двоклинові системи зі стрічковими неоднорідностями.

Дослідження виконувалися за часткової підтримки МОН України (GR/F27/0135).

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 830 с.
3. Васільєв К. В., Сулим Г. Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство*. – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
4. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактних задачах теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 2006. – 328 с.
5. Саврук М. П. Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2002. – № 5. – С. 57–65.
6. Саврук М. П., Осечко А. М. Взаємодія довільно розміщених тріщин з кутовим вирізом за антиплоскої деформації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2005. – **48**, № 4. – С. 165–171.
7. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // *Прикл. математика и механика*. – 1981. – **45**, № 2. – С. 308–318.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Сулим Г. Т., Махоркін М. І. Асимптотики полів напружень і переміщень у клинових системах при плоскому напруженому стані // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 1. – С. 140–148.
10. Mikhitaryan S. M., Melkounian N., Lin B. B. Stress-strain state of a cracked elastic wedge under antiplane deformation with mixed boundary conditions on its faces // *Int. J. Fract.* – 2001. – **108**, No. 4. – P. 291–315.
11. Shahani A. R. Analysis of an anisotropic finite wedge under antiplane deformation // *J. Elasticity*. – 1999. – **56**, No. 1. – P. 17–32.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОГО ВЫРЕЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА КЛИНА С ТОНКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Метод прямого вырезания состоит в моделировании ограниченного тела, в частности с тонкими неоднородностями, с помощью более простой задачи для неограниченного, или частично ограниченного тела с так же размещенными тонкими неоднородностями и наличием добавочных трещин, или абсолютно жестких включений достаточной длины, которые будут моделировать краевые условия ограниченного тела. Апробация этого метода проведена на задачах антиплоской деформации симметрично нагруженной трещины в клине со свободными краями и абсолютно жесткого включения, внедренного с некоторым натяжением в клин с защемленными краями. Для упругого включения построены обобщенные условия взаимодействия, позволяющие унифицировать процедуру задания разных краевых условий в случае использования метода прямого вырезания.

APPLICATION OF DIRECT METHOD OF CUTTING TO SOLVE PROBLEM OF LONGITUDINAL SHEAR OF WEDGE WITH THIN INCLUSIONS OF ARBITRARY ORIENTATION

A method of direct cutting consists in modeling a limited body, in particular with thin inhomogeneities, using a simpler problem for an unlimited or partly limited body with similarly placed thin inhomogeneities and additional cracks or absolutely rigid inclusions of sufficient length, which will simulate the boundary conditions of constrained body. This method was tested on the problems of antiplane deformation of symmetrically loaded crack in the wedge with free edges and on absolutely rigid inclusion embedded with some tension in the wedge with clamped edges. For an elastic inclusion we constructed generalized conditions of interaction between matrix and inclusion which make it possible to unify the procedure of prescribing different boundary conditions in the case of using the method of direct cutting.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів