

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ОКРУЖНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Рассматривается осесимметричная задача о собственных крутильных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров. Пьезокерамика поляризована в окружном направлении. Боковые поверхности цилиндра покрыты тонкими электродами, которые закорочены. Метод решения задачи основан на комбинации методов сплайн-коллокаций по продольной координате и метода пошагового поиска по радиальной координате. Приведены результаты численного анализа цилиндра из пьезокерамики PZT 4 в широком диапазоне изменения геометрических характеристик цилиндра.

Необходимость дальнейшего углубленного изучения трехмерных эффектов, имеющих место в толстостенных элементах, приводит к необходимости проводить расчет конструкционных элементов в пространственной постановке.

Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории упругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, а также необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности существенно возрастают в условиях связанности полей и анизотропии пьезоэлектрических материалов [1, 2, 8, 9].

Этим объясняется тот факт, что в научной литературе известны только отдельные работы, посвященные исследованию проблемы колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [10–12, 14, 15].

Метод решения, основанный на комбинации метода сплайн-коллокаций и метода пошагового поиска для исследования напряженно-деформированного состояния и анализа спектра собственных частот колебаний упругих тел, применялся в работах [3–5, 7, 13].

В работе [12] исследовались собственные осесимметричные колебания полых пьезокерамических цилиндров с поляризацией пьезокерамики в осевом направлении. Для кругового цилиндра возможен еще один вид осесимметричных колебаний – крутильные колебания.

Целью настоящей работы является исследование собственных крутильных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины из пьезокерамики, поляризованной в окружном направлении. При этом боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими электродами, которые закорочены. На торцах цилиндра рассматривается жесткая заделка.

Задача описывается взаимосвязанной системой уравнений, включающей

– осесимметричные крутильные уравнения движения (в цилиндрической системе координат (r, z)):

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta = 0; \quad (1)$$

– уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2)$$

– геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; ω – круговая частота; u_i – компоненты вектора перемещений; D_i – компоненты вектора электрической индукции; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ – электростатический потенциал; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в окружном направлении, имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= 2c_{55}\varepsilon_{r\theta} - e_{15}E_r, & \sigma_{z\theta} &= 2c_{55}\varepsilon_{z\theta} - e_{15}E_z, \\ D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_r, & D_z &= 2e_{15}\varepsilon_{z\theta} + \varepsilon_{11}E_z,\end{aligned}\quad (4)$$

где c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на поверхностях цилиндра задаются следующие:

– боковые поверхности $r = R_+$ и $r = R_-$ свободны от внешних усилий: $\sigma_{r\theta} = 0$, и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$;

– торцы цилиндра $z = 0$, $z = L$ жестко заземлены: $u_\theta = 0$, и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$.

Здесь R_+ – внешний радиус цилиндра; R_- – внутренний радиус цилиндра; h – половина толщины цилиндра; L – длина цилиндра.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\Delta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2\right) \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} u_\theta - \frac{\tilde{e}_{15}\tilde{c}_{55}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\tilde{\varepsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2\right) \frac{\tilde{\varepsilon}_{11}}{\Delta} u_\theta - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\tilde{c}_{55}\tilde{\varepsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь обозначено

$$\Delta = c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \quad (6)$$

ω – круговая частота; $\lambda = 10^{10}$ Па; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; ρ – плотность материала.

Для решения задачи используем метод разделения переменных, функции $\varphi(r, z)$, $\tilde{u}_\theta(r, z)$ представим в виде

$$\varphi(r, z) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_i(z), \quad u_\theta(r, z) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_i(z), \quad (7)$$

где $x = \frac{r - R_0}{h}$; $R_0 = \frac{R_+ + R_-}{2}$; $u_i(x)$, $v_i(x)$ – искомые функции по переменной x ; $\varphi_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, N$, – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ : $-\frac{L}{2} = z_0 < z_1 < \dots < z_n = \frac{L}{2}$. Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при $z = -\frac{L}{2}$ и $z = \frac{L}{2}$, можно заметить, что

в систему входят производные от компонент вектора решения, не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\Phi &= [\varphi_i(\xi_k)], & k, i &= 0, \dots, N, \\ \bar{u} &= [u_0, u_1, \dots, u_N]^\top, & \bar{v} &= [v_0, v_1, \dots, v_N]^\top, \\ \bar{a}_{k\ell}^\top &= \{a_{k\ell}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{k\ell}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{k\ell}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \\ & & (k, \ell) &\in \{(k, \ell) \mid k, \ell = 1, \dots, 4\},\end{aligned}\quad (8)$$

система (5) превратится в систему $4(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dx} &= \bar{u}, & \frac{d\bar{v}}{dx} &= \bar{v}, \\ \frac{d\tilde{u}}{dx} &= \Phi^{-1}[\bar{a}_{11}\Phi''\bar{u} + \bar{a}_{12}\Phi\tilde{u} + \bar{a}_{13}\Phi\bar{v} + \bar{a}_{14}\Phi\tilde{v}], \\ \frac{d\tilde{v}}{dx} &= \Phi^{-1}[\bar{a}_{21}\Phi\tilde{u} + (\bar{a}_{22}\Phi + \bar{a}_{23}\Phi'')\bar{v} + \bar{a}_{24}\Phi\tilde{v}].\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= -1, & \bar{a}_{12} &= -\left(1 - \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\Lambda}\right)\frac{1}{x}, & \bar{a}_{13} &= \frac{\tilde{e}_{15}}{\Lambda}\left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2\right), \\ \bar{a}_{14} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\tilde{c}_{55}}{\Lambda}\frac{1}{x}, & \bar{a}_{22} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\tilde{e}_{11}}{\Lambda}\frac{1}{x}, \\ \bar{a}_{23} &= \frac{\tilde{e}_{11}}{\Lambda}\left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2\right), & \bar{a}_{24} &= -1, & \bar{a}_{25} &= -\frac{\tilde{c}_{55}\tilde{e}_{11}}{\Lambda}\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Эту систему можно привести к виду

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dx} = A(x, \Omega)\bar{\mathcal{R}}. \quad (10)$$

Ненулевые элементы матрицы A представим так:

$$\begin{aligned}A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{11}\Phi'', & A_{22} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{12}\Phi, & A_{23} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{13}\Phi, \\ A_{24} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{14}\Phi, & A_{34} &= 1, & A_{42} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{21}\Phi, \\ A_{43} &= \Phi^{-1}(\bar{a}_{22}\Phi + \bar{a}_{23}\Phi''), & A_{44} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{24}\Phi.\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$B_1\bar{\mathcal{R}}(-1) = 0, \quad B_2\bar{\mathcal{R}}(1) = 0.$$

Ненулевые элементы матрицы B представим так:

$$B_{12} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}\Phi, \quad B_{13} = -\frac{1}{x}\Phi, \quad B_{14} = \Phi, \quad B_{21} = \Phi.$$

Когда $r \rightarrow \infty$, задача о крутильных колебаниях цилиндра сводится к задаче о сдвиговых колебаниях плоского слоя. В случае, когда материал упругий, задача еще более упрощается:

$$\tilde{c}_{55}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + \rho\omega^2 u_y = 0.$$

Учитывая, что $u_y|_{z=0}^{z=L} = 0$, решение выбираем в виде стоячих волн по координате z : $u(x, z) = u(x) \sin \frac{\pi k}{L} z$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда получаем задачу о гармонических колебаниях:

$$u'' + \lambda^2 u = 0,$$

$$\text{здесь } \lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{\tilde{c}_{55}} - \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2.$$

Удовлетворяя граничным условиям, $\sigma_{xy}|_{x=-1}^{x=1} = 0$, получим, что $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \dots$. Корень $\lambda = 0$ дает группу собственных частот $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{c}_{55}}{\rho}} \frac{\pi k}{L}$, $k = 1, 2, \dots$, которая соответствует семейству гипербол. На рис. 1 эти гиперболы изображены тонкой пунктирной линией. Они образуют как бы регулярную «сетку» для собственных частот крутильных колебаний упругого цилиндра. Сплошной линией изображены частоты собственных крутильных колебаний полого упругого цилиндра из пьезокерамики PZT 4 при пьезомодулях, равных нулю. Внутренний радиус цилиндра $R_- = 3$, внешний — $R_+ = 5$. Можно заметить, что первая собственная частота полностью совпадает с гиперболой при $k = 1$. Для более высоких частот можно отметить следующее поведение: частота идет по соответствующей ветке гиперболы (совпадение при этом составляет три и более знаков) с последующим переходом на более низкую ветку. Переход с более высокой ветки гиперболы на более низкую ветку идет по линиям «плато» (участкам со сравнительно небольшой зависимостью частоты от геометрических параметров цилиндра, в данном случае — длины цилиндра). Линия плато образует «точки сближения» (но не пересечения) собственных частот с линиями гипербол.

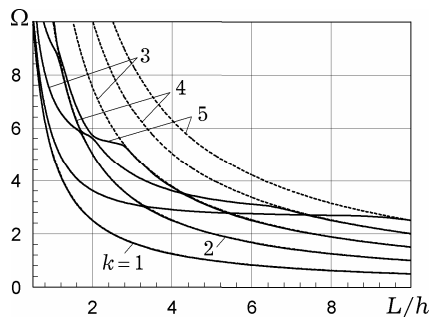


Рис. 1

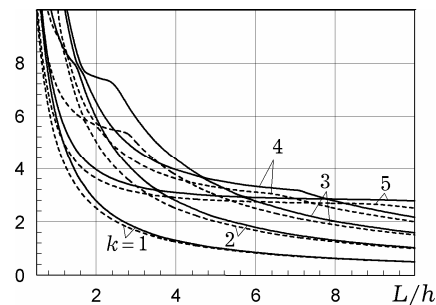


Рис. 2

К сожалению, обнаружить подобную регулярную сетку из гипербол для пьезокерамического цилиндра автору не удалось, в виду существенного усложнения задачи в этом случае.

На рис. 2 представлена зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра $\frac{L}{h}$, внутренний радиус цилиндра $R_- = 3$, внешний — $R_+ = 5$, материал цилиндра — пьезокерамика PZT 4. Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта, пунктирными — без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Из приведенного рисунка видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, то есть повышению значения собственных частот. При

этом при определении первой собственной частоты влиянием пьезоэффекта можно пренебречь вплоть до относительной длины $\frac{L}{h} = 5$. Для второй частоты заметное влияние пьезоэффекта наблюдается для достаточно длинных цилиндров, $\frac{L}{h} < 8$. Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров.

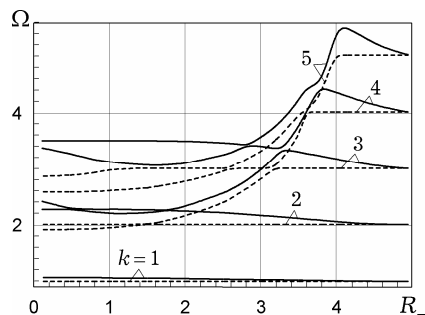


Рис. 3

На рис. 3 представлена зависимость первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_-), при этом длина цилиндра и внешний диаметр остаются фиксированными: $L = 5$, $R_+ = 5$. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне: от 0.05 до 4.95 безразмерных единиц. Материалом цилиндра выбрана также пьезокерамика PZT 4. Анализ приведенного рисунка показывает, что для упругого материала характерны участки с практически полным отсутствием зависимости частоты от радиуса цилиндра. Пьезоэффект усложняет структуру спектра собственных частот и увеличивает значение собственной частоты.

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — **49**, № 1. — С. 75–84.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Особливості числового розв'язування зв'язаних задач про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів у деформованих термочутливих електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — **50**, № 3. — С. 166–177.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. — 2008. — **46**, № 10. — С. 74–85.
4. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 8. — С. 91–102.
5. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 9. — С. 53–62.
6. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — **51**, № 3. — С. 112–120.
7. Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых тонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 6. — С. 46–58.
8. Карнаушов В. Г., Ткаченко Я. В., Зражевська В. Ф. Дослідження гармонічних коливань сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзоелектричного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — **50**, № 1. — С. 125–129.
9. Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Изгиб пьезокерамического неоднородного слоя при скользящей заделке его торцов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — **49**, № 3. — С. 86–95.

10. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – **22**, № 3. – С. 393–399.
11. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 11. – С. 15–19.
То же: *Shul'ga N. A., Borisenko L. V. Vibrations of an axially polarized piezoceramic cylinder during electrical loading // Int. Appl. Mech. – 1989. – 25, No. 11. – P. 1070–1074.*
12. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 2. – С. 126–130.
13. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полой пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 26–32.
14. *Hussein M., Heyliger P. R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders // J. Sound and Vibr. – 1996. – 192, No. 5. – P. 995–1013.*
15. *Kharouf N., Heyliger P. R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // J. Sound and Vibr. – 1994. – 174, No. 4. – P. 539–561.*

КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З КОЛОВОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Розглядається осесиметрична задача про вільні крутильні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів. П'єзокераміка поляризована у колловому напрямку. Бічні поверхні циліндра покриті тонкими електродами, які закорочені. Метод розв'язування задачі базується на комбінації методу сплайн-колокацій за поперечною координатою та методу покрокового пошуку за радіальною координатою. Наведено результати чисельного аналізу циліндра з п'єзокераміки PZT 4 в широкому діапазоні зміни геометричних характеристик циліндра.

TORSION VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC HOLLOW CYLINDERS WITH CIRCULAR POLARIZATION

The axisymmetric problem on eigen torsion oscillations of hollow piezoceramic cylinders is considered. Piezoceramics is polarized in circumferential direction. The lateral surfaces are covered by thin electrodes which are short-circuited. The method of solution of the problem is based on combination of spline-collocation method along the longitudinal coordinate and stepwise search method along the radial coordinate. The results of numerical analysis of PZT-4 piezoceramic cylinder in a wide range of variation of geometric parameters of the cylinder are presented.

Нац. транспортный ун-т, Киев

Получено
12.05.09