

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЯХ

Рассматриваются условия существования и устойчивость пространственных структур из феррочастиц типа одиночных и периодических страт, возникающих в неподвижных слоях намагничивающейся жидкости в постоянном однородном магнитном поле.

1. Введение. Намагничивающиеся жидкости (магнитные жидкости или феррожидкости) представляют собой искусственно создаваемые коллоидные растворы феррочастиц с характерным размером ~ 10 нм, покрытых слоем поверхностно-активного вещества, в жидком носителе [14]. Они используются в качестве смазки в подшипниках скольжения, обеспечивая минимальное трение в узлах приводов магнитных и оптических дисков; в герметизаторах, предохраняющих корпус жесткого диска ПК от пыли; в акустических динамиках для демпфирования мембраны; в сепараторах, акселерометрах; они находят широкое применение в современных наукоемких технологиях [13, 20, 23].

В публикациях последних лет [16, 19, 22,] обсуждается новая область возможного использования намагничивающихся жидкостей – магнитооптика. Эксперименты с пленками таких жидкостей показывают, что под действием магнитного поля феррочастицы, входящие в состав жидкости, образуют структуры, конфигурация которых зависит от направления поля и его величины, жидкость становится анизотропной, и, соответственно, изменяются условия взаимодействия ее с оптическим излучением. Это свойство намагничивающихся жидкостей можно использовать для создания оптических затворов, модуляторов света, управляемых фильтров, дифракционных решеток и дисплеев [13, 22].

Новые возможности практического применения намагничивающихся жидкостей стимулируют теоретические и экспериментальные исследования процессов, происходящих с феррочастицами в магнитных полях (см. [2] и указанную там литературу).

Изменение микроструктуры намагничивающихся жидкостей обусловлено возможностью образования в них агрегатов, состоящих из конечного числа феррочастиц [1, 15]. В работе [6] предложена соответствующая модель среды с изменяющейся микроструктурой, которая описывает процессы образования и распада агрегатов из феррочастиц. Переменными состояниями такой среды служат среднее число частиц в агрегатах $\gamma = v^{-1}$ и параметр эффективного магнитного поля λ , учитывающий поле, создаваемое феррочастицами. Изменение магнитного состояния среды задается при этом системой двух квазилинейных уравнений параболического типа относительно λ и v . В работе [12] проведено качественное исследование сосредоточенной динамической системы, существующей в предельном случае, когда диффузионные процессы в жидкости пренебрежимо малы. Однородные равновесные состояния среды рассмотрены в работах [8, 21]; там же построены равновесные кривые намагничивания жидкости и получены условия существования в ней волновых режимов типа волн переключения. В [9–11, 21] изучены пространственные и пространственно-временные структуры типа статических и бегущих автосолитонов, которые образуются в объеме намагничивающейся жидкости в постоянном однородном магнитном поле. Они реализуются в виде ориентированных вдоль поля параллельных слоев, полос или цилиндрических столбиков, в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц. В результате сопоставления расчетных и экспе-

риментально измеренных характеристик структур получены оценки для параметров модели среды.

В настоящей работе рассматривается важный для практических приложений вопрос об устойчивости пространственных структур типа одиночных и периодических страт. При исследовании устойчивости используется общая теория автосолитонов, результаты и методы которой изложены в монографии [4].

2. Стационарные структуры в намагничивающейся жидкости. Рассмотрим слой жидкости толщины ℓ , расположенный между двумя параллельными бесконечными немагнитными пластинами, в постоянном однородном магнитном поле, параллельном слою. Начало O прямоугольной декартовой системы координат выберем в середине слоя, ось Ox направим перпендикулярно слою, а ось Oy – параллельно напряженности магнитного поля. Для описания поведения жидкости используем модель среды с изменяющейся микроструктурой [6]. Равновесная намагниченность такой среды определяется плотностью среды ρ , температурой T , напряженностью магнитного поля H , средним числом частиц в агрегатах $\gamma = v^{-1}$ и параметром эффективного магнитного поля λ . Посредством параметра λ учитывается магнитодипольное взаимодействие между феррочастицами в приближении самосогласованного поля: напряженность поля, действующего на жидкий объем, представляется в виде $H_e = H + \lambda M$, где λM – напряженность поля, создаваемого частицами. Изменение магнитного состояния среды описывается системой уравнений, которая в одномерном случае имеет вид

$$\tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} = D_\lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H), \quad \tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q^{(v)}(\lambda, v; H). \quad (1)$$

Функции $Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H)$ и $Q^{(v)}(\lambda, v; H)$ задаются выражениями

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) = \frac{1}{2} [L^2 - L_*^2 - 2\beta(\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*})],$$

$$Q^{(v)}(\lambda, v; H) = f(\xi) - f(\xi_*) + \alpha(v - v_{1*})(v - v_{2*})(v - v_{3*}).$$

Здесь $\xi = m_1 H_e / (kT v)$; $n_1 = c_1 \rho / \mathcal{M}$ – объемная плотность феррочастиц; c_1 – массовая концентрация частиц, которая считается постоянной; \mathcal{M} – масса одиночной феррочастицы; k – постоянная Больцмана. Намагниченность жидкости определяется уравнением $M = M_s L(\xi)$, где $L(\xi) = \text{cth } \xi - 1/\xi$ – функция Ланжевена; M_* – намагниченность структурирования жидкости: $M_* = M_s L(\xi_*) = M_s L_*$; $M_s = m_1 n_1$ – намагниченность насыщения жидкости; $\lambda_{i*}, v_{i*}, i = 1, 2, 3$, – равновесные значения λ и v при $M = M_*$, причем $\lambda_{1*} > \lambda_{3*} > \lambda_{2*}$, $\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$; $v_{1*} > v_{3*} > v_{2*}$; $v_{i*} - v_{j*} = m_1 M_s L_* \cdot (\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (kT \xi_*)$; $\alpha = (kT / (m_1 M_s))^3 \cdot (\xi_* / L_*)^4 \beta$; $f(\xi) = \ln(\text{sh } \xi / \xi) - \xi L(\xi)$. Параметры $\tau_\lambda, \tau_v, D_\lambda, D_v$ и β считаются постоянными.

Однородные равновесные состояния жидкости $\lambda = \text{const}, v = \text{const}$ удовлетворяют уравнениям

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda, v; H) = 0. \quad (2)$$

При $\lambda_{1*} \neq \lambda_{2*}$ рассматриваемая среда обладает гладкой самопересекающейся кривой намагничивания и в разных интервалах изменения напряженности магнитного поля имеет от одного до девяти равновесных состояний [21]. Этим система (1) отличается от моностабильных и бистабильных систем, для которых в работе [4] построена теория автосолитонов.

Исследуем случай К-системы [4], для которой $D_v \ll D_\lambda$. В К-системе характерный масштаб изменения параметра эффективного магнитного поля в пространстве существенно превышает характерный масштаб изменения среднего числа частиц в агрегатах: параметр v является быстрой переменной, а параметр λ – медленной переменной. Кроме того, будем предполагать, что имеет место условие

$$D_v \ll \ell^2 \ll D_\lambda. \quad (3)$$

Изменение магнитного состояния среды при условии (3) описывается системой уравнений (если пренебречь членами порядка ℓ^2/D_λ):

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q^{(v)}(\lambda, v; H), \quad (4)$$

$$\tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) dx. \quad (5)$$

Второе уравнение получено осреднением первого уравнения системы (1) по толщине слоя жидкости.

Найдем стационарные решения системы уравнений (4), (5), удовлетворяющие краевым условиям, которые соответствуют отсутствию потоков параметров λ , v через границу:

$$\frac{d\lambda}{dx} \left(-\frac{\ell}{2} \right) = \frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{\ell}{2} \right) = 0, \quad \frac{dv}{dx} \left(-\frac{\ell}{2} \right) = \frac{dv}{dx} \left(\frac{\ell}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

Они являются решениями краевой задачи:

$$D_v v'' + Q^{(v)}(\lambda_s, v(x); H) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dx} \left(-\frac{\ell}{2} \right) = \frac{dv}{dx} \left(\frac{\ell}{2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v(x); H) dx = 0, \quad (9)$$

где $\lambda = \lambda_s = \text{const}$. В рассматриваемом случае уравнения электродинамики и краевые условия для магнитного поля удовлетворяются автоматически.

В работе [10] показано, что существует диапазон значений напряженности магнитного поля, в котором кривая локальной связи, определяемая уравнением $Q^{(v)}(\lambda, v; H) = 0$ при $H = \text{const}$, имеет И-образную форму, т. е. рассматриваемая система является И-системой [4]. График зависимости $Q^{(v)}(\lambda, v; H)$ от v при фиксированном значении λ качественно воспроизводит кривую локальной связи и также имеет И-образный вид.

Фазовый портрет динамической системы, к которой сводится уравнение (7), зависит от величины λ_s . Если $\lambda_- < \lambda_s < \lambda_+$, где λ_- , λ_+ – минимальное и максимальное значения функции $\lambda(v)$, задающей кривую локальной связи, система имеет три неподвижные точки (обозначим их v_1 , v_2 , v_3 , при этом $v_1 < v_2 < v_3$): седла v_1 , v_3 и центр v_2 . При значении λ_s , удовлетворяющем условию

$$\int_{v_1}^{v_3} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv = 0,$$

фазовый портрет содержит ячейку, ограниченную двумя гетероклиничес-

кими траекториями – сепаратрисами, одна из которых выходит из седла v_1 и входит в седло v_3 , а другая, наоборот, выходит из седла v_3 и входит в седло v_1 . Близкая к границе ячейки замкнутая траектория соответствует широкой страте в центре слоя жидкости. Форма страты содержит участки плавного и резкого изменения параметра v : на плоскости (λ, v) плавные изменения v происходят в малых окрестностях точек (λ_s, v_1) , (λ_s, v_3) , а резкие изменения – вдоль отрезка $v_1 < v_2 < v_3$ прямой $\lambda = \lambda_s$.

Для построения формы страты функция $Q^{(v)}(\lambda_s, v; H)$ аппроксимировалась кубическим полиномом, имеющем такие же корни v_1 , v_2 и v_3 и приблизительно такие же производные в точках v_1 , v_2 и v_3 :

$$Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) \approx Q(v) = -B(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3), \quad B > 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q^{(v)}(\lambda_s, v_i; H)}{\partial v} = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{dQ}{dv} \right|_{v=v_i}.$$

Из последнего условия определяется постоянная B :

$$B = - \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q^{(v)}(\lambda_s, v_i; H)}{\partial v}}{(v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_1)(v_3 - v_2)}.$$

Уравнение $D_v v'' + Q(v) = 0$ имеет решения

$$v(x) = \frac{v_1 + v_3 \exp\left[\pm \sqrt{B/(2D_v)}(v_3 - v_1)x\right]}{1 + \exp\left[\pm \sqrt{B/(2D_v)}(v_3 - v_1)x\right]},$$

которые отвечают сепаратрисам седловых точек. «Сшивая» эти решения в середине отрезка $-\ell/2 < x < \ell/2$, получаем приближенное выражение для широкой страты в центре слоя жидкости. Для горячей (холодной) страты среднее число частиц в агрегатах в середине отрезка больше (меньше), чем вблизи границы. Если заменить страту ступенчатой функцией, из интегрального условия (9) можно найти ее размер:

– для горячей страты

$$\ell_s = \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H)}{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H) - Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H)} \ell,$$

– для холодной страты

$$\ell_s = \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H)}{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H) - Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H)} \ell.$$

Решение типа широкой страты существует только в том случае, когда выражение, задающее ее размер, положительно.

На рис. 1 показаны страты, которые образуются в слое намагничивающейся жидкости при различных значениях напряженности магнитного поля (рис. 1а – горячая страта, рис. 1б – холодная страта). Расчеты проводились при следующих значениях параметров модели: $m_1 = 10^{-16}$ эрг/Гс, $M_s = 40$ Гс, $\xi_* = 1$, $\beta = -0.1$, $\lambda_{1*} = 5$, $\lambda_{3*} = 4$, $v_{3*} = 0.2$.

В указанном диапазоне изменения напряженности магнитного поля ширина горячей страты с ростом H увеличивается, а холодной, наоборот, уменьшается, при этом высота страты $\Delta\gamma = 1/v_3 - 1/v_1$ существенно не изменяется и согласуется с оценкой для числа частиц в цепочечных агрегатах, приведенной в работе [18]. На рис. 2 представлены соответствующие распределения намагниченности среды.

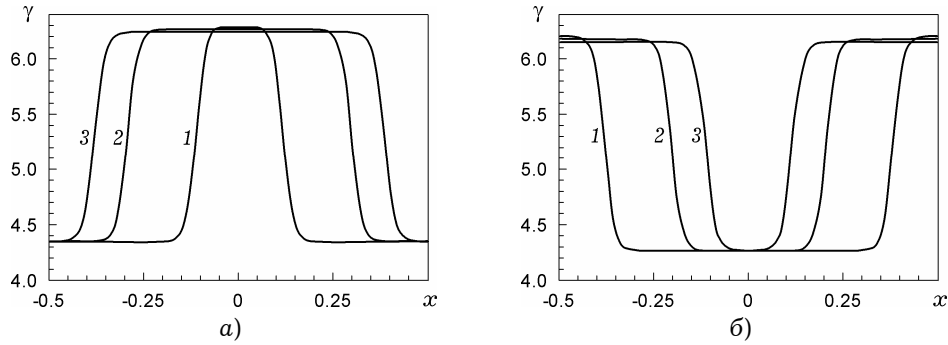


Рис. 1. Широкие страты в намагничивающейся жидкости: кривые 1–3 соответствуют значениям $H = 15, 18, 21$ э; γ – число частиц в агрегатах.

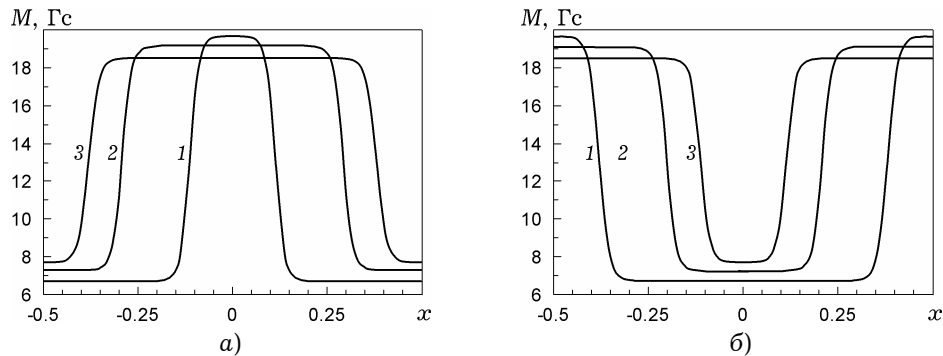


Рис. 2. Распределение намагниченности в слое жидкости: кривые 1–3 соответствуют значениям $H = 15, 18, 21$ э.

Кроме одиночной горячей или холодной страты, задача (7)–(9) имеет множество периодических решений в виде последовательности одинаковых страт периода $L_p = \ell/N$ (N – натуральное число). Эти решения описывают периодические структуры в виде равноотстоящих друг от друга подслоев более или менее агрегированной среды в слое жидкости.

Решения системы (7)–(9) моделируют образование стационарных структур в жидкости и в том случае, когда ось Ox параллельна слою. Они реализуются в виде ориентированных вдоль магнитного поля одной или нескольких полос, в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц.

Полосовые структуры из феррочастиц наблюдаются экспериментально в пленках намагничивающихся жидкостей [17, 19, 22]. Авторы работы [17] использовали в экспериментах феррожидкость на основе керосина с частицами магнетита, стабилизированную олеиновой кислотой. Слой жидкости толщиной несколько мкм наносили на дно закрытой стеклянной прямоугольной ячейки и помещали в магнитное поле. Наблюдения с помощью оптического микроскопа показали, что через 10 с после включения поля, параллельного слою жидкости, первоначально беспорядочно распределенные феррочастицы собираются в иглообразные цепочки, ориентированные вдоль поля; с течением времени агрегаты становятся длиннее и толще, а через 2 часа формируется квазипериодическая полосовая структура из феррочастиц с шириной полос ~ 1 мкм и расстоянием ~ 20 мкм между ними. Похожие эксперименты описаны в [13, 19, 22].

В работах [7, 11] проводилось сравнение расчетных характеристик стационарных структур в слое намагничивающейся жидкости с экспериментальными данными, в результате которого получены оценки для параметров модели среды с изменяющейся микроструктурой: $\tau_v \sim 10$ с, $\tau_\lambda \sim 7200$ с, $D_\lambda \sim 2$ мкм², $D_v \ll 1$ мкм².

3. Устойчивость стационарных структур. Рассмотрим устойчивость стационарного решения $v = v(x)$, $\lambda = \lambda_s = \text{const}$ системы (4), (5) относительно малых возмущений.

В безразмерных переменных уравнения (4), (5) имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q^{(v)}(\lambda, v; H), \quad \alpha^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) \rangle. \quad (10)$$

Здесь в качестве характерного линейного размера использовано значение $\sqrt{D_v}$, в качестве характерного времени — τ_v , для безразмерных переменных сохранены такие же обозначения x, t , как раньше для размерных; $\alpha := \tau_v/\tau_\lambda$, а угловые скобки означают осреднение по безразмерной толщине слоя жидкости.

Представим возмущения в виде

$$\delta v(x, t) = \delta v(x) \exp(-\eta t), \quad \delta \lambda(t) = \delta \lambda \exp(-\eta t), \quad (11)$$

где $\delta v(x)$ удовлетворяет циклическим краевым условиям.

Исследование устойчивости неоднородного распределения $v = v(x)$, $\lambda = \lambda_s = \text{const}$ сводится к задаче на собственные значения:

$$(A - \eta)\delta v = Q_\lambda^{(v)}(\lambda_s, v(x); H)\delta \lambda, \quad (12)$$

$$\delta \lambda = (\mu - \eta\alpha^{-1})^{-1} \langle Q_v^{(\lambda)}\delta v \rangle, \quad (13)$$

$$\delta v\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \delta v\left(\frac{\ell}{2}\right), \quad \frac{d\delta v}{dx}\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \frac{d\delta v}{dx}\left(\frac{\ell}{2}\right), \quad (14)$$

где

$$A := -\frac{d^2}{dx^2} - Q_v^{(v)}(\lambda_s, v(x); H), \quad \mu := -\langle Q_\lambda^{(\lambda)}(\lambda_s, v(x); H) \rangle.$$

Решение $v = v(x)$, $\lambda = \lambda_s$ устойчиво, если $\text{Re } \eta > 0$, и неустойчиво в противном случае.

В отличие от систем, рассмотренных в [4], для намагничивающейся жидкости параметр μ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В среде, магнитное состояние которой определяется только одной переменной v , а $\lambda = \text{const}$ и, соответственно, $\delta \lambda = 0$, неоднородные распределения $v = v(x)$ неустойчивы. В этом случае исследование устойчивости сводится к определению собственных значений $\eta = p_n$ дифференциального уравнения

$$A\delta v = p\delta v \quad (15)$$

с краевыми условиями (14). Из осцилляционной теоремы [3, 5] следует, что для этой задачи существует бесконечное множество собственных значений, все собственные значения вещественны, они могут быть расположены в виде неограниченно возрастающей последовательности: $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$, а собственная функция δv_n , отвечающая собственному значению p_n , имеет на интервале $-\ell/2 < x < \ell/2$ ровно n нулей. Дифференцирование первого уравнения системы (10) по x в стационарном случае показывает, что dv/dx является собственной функцией оператора A , которая отвечает нулевому собственному значению [4]. Функция $v(x)$, определяющая форму страты, достигает экстремума в точке $x = 0$, следовательно, производная dv/dx имеет нуль в этой точке, т. е. не является собственной функцией δv_0 и $\eta = p_0 < 0$.

Рассмотрим общий случай, когда $\delta\lambda \neq 0$. Подставляя выражение для $\delta\lambda$ из (13) в (12), получим

$$(A - \eta)\delta v = Q_\lambda^{(v)} \langle Q_\nu^{(\lambda)} \delta v \rangle (\mu - \eta\alpha^{-1})^{-1}. \quad (16)$$

Разложение $\delta v(x)$ в ряд по собственным функциям δv_n задачи (15), (14):

$$\delta v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta v_n(x) \quad (17)$$

и подстановка этого разложения в (16) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно коэффициентов c_i :

$$c_i(p_i - \eta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\eta\alpha^{-1} - \mu)^{-1} \langle Q_\lambda^{(v)} \delta v_i \rangle \langle Q_\nu^{(\lambda)} \delta v_n \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Здесь учтено, что система функций δv_n является ортонормированной.

Введем обозначение

$$a_i := -\frac{1}{\mu} \langle Q_\lambda^{(v)} \delta v_i \rangle \langle Q_\nu^{(\lambda)} \delta v_i \rangle. \quad (19)$$

В рассматриваемом случае

$$Q_\nu^{(\lambda)} = \frac{kT}{m_1 M_s} Q_\lambda^{(v)},$$

следовательно,

$$a_i = -\frac{1}{\mu} \frac{kT}{m_1 M_s} \left(\langle Q_\lambda^{(v)} \delta v_i \rangle \right)^2,$$

т. е. все значения a_i имеют одинаковые знаки, противоположные знаку μ . Их можно выразить через положительные величины b_i :

$$a_i = -\frac{1}{\mu} b_i, \quad (20)$$

которые определяются следующим образом:

$$b_i = \frac{kT}{m_1 M_s} \left(\langle Q_\lambda^{(v)} \delta v_i \rangle \right)^2,$$

причем $b_i = 0$ для нечетных i , так как δv_i – нечетные функции, а $Q_\lambda^{(v)}(\lambda_s, v(x); H)$ – четная функция; $b_i > 0$ для четных i .

С учетом (20) система (18) принимает вид

$$\begin{aligned} [p_i - \eta + (\eta\alpha^{-1} - \mu)^{-1} b_i] c_i + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} {}'^i (\eta\alpha^{-1} - \mu)^{-1} \langle Q_\lambda^{(v)} \delta v_i \rangle \langle Q_\nu^{(\lambda)} \delta v_n \rangle c_n = 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Равенство нулю детерминанта этой системы дает уравнение для определения η [4]:

$$\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (p_n - \eta)^{-1} (\mu - \eta\alpha^{-1})^{-1} \right] \prod_{n=0}^{\infty} (p_n - \eta) = 0. \quad (21)$$

Если функция $v(x)$ описывает периодическую структуру в объеме жидкости, содержащую две или более страт, то ее производная dv/dx имеет более одного корня на отрезке $(-\ell/2, \ell/2)$. В этом случае уравнение (21) удовлетворяется при $\eta = p_1 < 0$, и структура неустойчива.

Рассмотрим распределение $v(x)$ в виде одной страты. В этом случае производная dv/dx имеет один корень, ей соответствует собственная функция δv_1 , отвечающая нулевому собственному значению $p_1 = 0$, следовательно, $p_0 < 0$, а при $n \geq 2$ все собственные значения p_n положительны.

Уравнение (21) удовлетворяется при $\eta = p_n$, $n \geq 1$, или в том случае, когда обращается в нуль выражение в квадратных скобках. Значения $\eta = p_n \geq 0$ при $n \geq 1$ неопасны с точки зрения потери устойчивости. Следовательно, устойчивость страты определяется теми значениями η , которые обращают в нуль квадратные скобки в (21).

Если ввести обозначение $\eta = i\omega$, условие устойчивости принимает вид: $\text{Im } \omega < 0$. Страта неустойчива, если функция, стоящая в квадратных скобках уравнения (21):

$$D(\omega) := 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (p_n - i\omega)^{-1} (\mu - i\omega\alpha^{-1})^{-1}, \quad (22)$$

имеет нуль в верхней полуплоскости ω ($\text{Re } \omega, \text{Im } \omega$).

Действительная часть $D(\omega)$ задается выражением

$$\text{Re } D(\omega) = 1 + \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2 \mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 - \mu\alpha p_n}{p_n^2 + \omega^2} b_n, \quad (23)$$

она является четной функцией ω , причем $\text{Re } D(\pm\infty) = 1$.

Мнимая часть $D(\omega)$ задается выражением

$$\text{Im } D(\omega) = -\frac{\alpha\omega}{\omega^2 + \alpha^2 \mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu\alpha + p_n}{p_n^2 + \omega^2} b_n, \quad (24)$$

она является нечетной функцией ω , причем $\text{Im } D(0) = 0$, $\text{Im } D(\pm\infty) = 0$. Значение производной этой функции в точке $\omega = 0$

$$\frac{d}{d\omega} \text{Im } D(\omega)|_{\omega=0} \approx -\frac{b_0}{\mu p_0^2} \quad (25)$$

отрицательно при $\mu > 0$ и положительно при $\mu < 0$.

Функция $\text{Im } D(\omega)$ может обращаться в нуль при конечных значениях ω , отличных от нуля. Обозначим такой корень, если он существует, через ω_1 . Из (24) следует, что

$$b_0 = -\frac{p_0^2 + \omega_1^2}{\alpha\mu + p_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha\mu + p_n}{p_n^2 + \omega_1^2} b_n. \quad (26)$$

Это равенство возможно только в том случае, когда $\alpha\mu + p_0 < 0$, т. е. при $\alpha\mu < -p_0$. Подставив значение для b_0 из (26) в (23), получим

$$\text{Re } D(\omega_1) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha\mu + p_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n - p_0}{p_n^2 + \omega_1^2} b_n > 1. \quad (27)$$

В [4] показано, что p_0 – малая отрицательная величина, следовательно,

$$D(0) = 1 - \frac{b_0}{\mu p_0} - \frac{1}{\mu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{p_n} \approx -\frac{b_0}{\mu p_0}. \quad (28)$$

Применим принцип аргумента для анализа функции $D(\omega)$:

$$N = P + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg D(\omega), \quad (29)$$

где N и P – число нулей и полюсов функции $D(\omega)$ в верхней полуплоскости.

Из выражения (22) видно, что $D(\omega)$ имеет полюсы в точках $\omega = -ip_n$, $n = 0, 2, 4, \dots$, и $\omega = -i\mu\alpha$, причем полюсы $\omega = -ip_n$ при $n \neq 0$ расположены в нижней полуплоскости.

Пусть $\mu > 0$. Из (25), (28) следует, что $D(0) > 1$, $d(\text{Im } D(\omega))/d\omega|_{\omega=0} < 0$, а функция $D(\omega)$ имеет только один полюс в верхней полуплоскости: $\omega = -ip_0$, т. е. $P = 1$. На рис. 3 показано поведение функции $D(\omega)$ при обходе верхней полуплоскости: рис. 3а – функция $\text{Im } D(\omega)$ не имеет конечных корней, отличных от нуля; рис. 3б – функция $\text{Im } D(\omega)$ имеет один такой корень. В обоих случаях $\Delta \arg D(\omega) = 0$, $N = 1$, и страта неустойчива. Если функция $\text{Im } D(\omega)$ имеет несколько корней, то поскольку для каждого из них $\text{Re } D(\omega) > 1$, они не влияют на значение $\Delta \arg D(\omega)$.

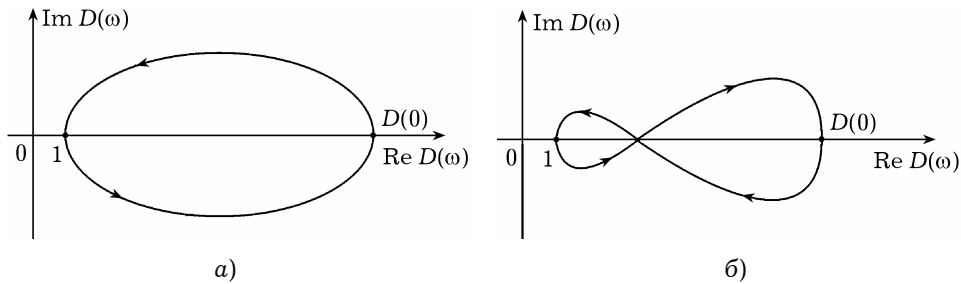


Рис. 3. Поведение функции $D(\omega)$ при обходе верхней полуплоскости при $\mu > 0$.

Пусть $\mu < 0$. В этом случае $D(0) < 0$, а функция $D(\omega)$ имеет два полюса в верхней полуплоскости: $\omega = -ip_0$ и $\omega = -i\mu\alpha$, т. е. $P = 2$. Поведение $D(\omega)$ при обходе верхней полуплоскости показано на рис. 4: рис. 4а – функция $\text{Im } D(\omega)$ не имеет конечных корней, отличных от нуля; рис. 4б – функция $\text{Im } D(\omega)$ имеет один такой корень. Если $\mu < 0$, то $\Delta \arg D(\omega) = -2\pi$, т. е., как следует из (29), $N = 1$, и страта неустойчива. Если функция $\text{Im } D(\omega)$ имеет несколько корней, то поскольку для каждого из них $\text{Re } D(\omega) > 1$, они не влияют на значение $\Delta \arg D(\omega)$.

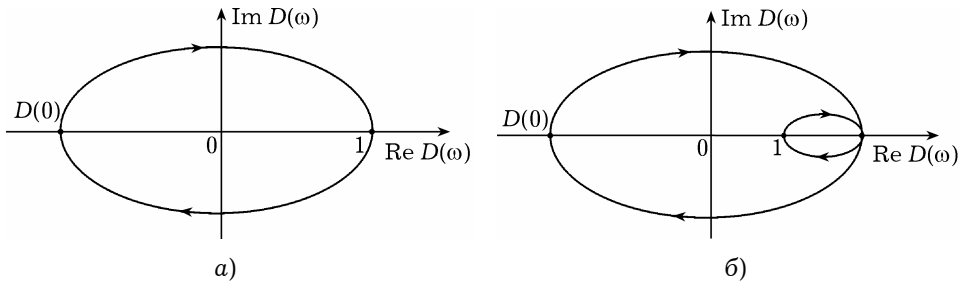


Рис. 4. Поведение функции $D(\omega)$ при обходе верхней полуплоскости при $\mu < 0$.

При $\alpha \ll 1$ можно получить приближенное значение для наименьшего собственного числа η краевой задачи (12)–(14): $\eta \approx p_0 + b_0\alpha/p_0$. В этом случае величина $\tau = -1/\eta$, характеризующая «время жизни» страты, существенно превосходит времена релаксации τ_λ и τ_ν , а стационарные неоднородные распределения феррочастиц в намагничивающейся жидкости могут существовать достаточно долго.

4. Заключение. Исследованы неоднородные распределения агрегатов из феррочастиц, которые образуются в неподвижных слоях намагничивающейся жидкости под действием постоянного однородного внешнего магнитного поля. Уравнения, которые описывают изменение магнитного состояния жидкости, определяют КИ-систему, в которой среднее число частиц в агрегатах является быстрой переменной, а параметр эффективного магнитного поля – медленной переменной. Методами теории автосолиитонов проанализированы стационарные решения этих уравнений типа широких одиночных и периодических страт, исследована их устойчивость относительно малых возмущений. Показано, что в малых объемах жидкости, т. е. при условии $D_v \ll \ell^2 \ll D_\lambda$, страты неустойчивы, но могут существовать достаточно долго. Под действием возмущений возможен распад широких страт на страты меньших размеров, в частности, на узкие страты, которые существуют при тех же значениях напряженности магнитного поля, но, как показано в [9], являются устойчивыми. В этом случае возникают полосовые структуры из феррочастиц, подобные тем, что наблюдаются в экспериментах с пленками намагничивающихся жидкостей.

1. Диканский Ю. И. Экспериментальное исследование эффективных магнитных полей в магнитной жидкости // *Магнитная гидродинамика*. – 1982. – № 2. – С. 33–36.
2. Зубарев А. Ю., Исакова Л. Ю. К теории фазовых переходов в магнитных жидкостях // *Журн. exper. и теорет. физики*. – 2007. – **132**, вып. 5(11). – С. 1160–1172.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
4. Кернер Б. С., Осипов В. В. Автосолиитоны: Локализованные сильно-неравновесные области в однородных диссипативных системах. – Москва: Наука, 1991. – 200 с.
Kerner B. S., Osipov V. V. Autosolitons. A new approach to problem of self-organization and turbulence. – Dordrecht–Boston: Kluwer Acad. Publ., 1994. – 671 p.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва: Наука, 1974. – 752 с.
6. Пацегон Н. Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах // *Магнитная гидродинамика*. – 1993. – № 1. – С. 13–23.
7. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н. Автоволновые процессы в магнитной жидкости // *Прикл. гидромеханика*. – 2006. – **9**, № 1. – С. 54–65.
8. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н. О равновесной намагниченности магнитной жидкости // *Магнитная гидродинамика*. – 1996. – **32**, № 3. – С. 323–330.
9. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н. Образование и устойчивость пространственных структур в магнитной жидкости // *Прикл. гидромеханика*. – 2003. – **5(77)**, № 1. – С. 62–70.
10. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н. Статические автосолиитоны в магнитной жидкости // *Вісн. Харків. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка*. – 2004. – Вип. 4, № 645. – С. 93–101.
11. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н. Стационарные структуры в магнитной жидкости // *Вісн. Харків. нац. ун-ту. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автомат. системи управління*. – 2008. – Вип. 10, № 833. – С. 206–221.
12. Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н., Свириденко С. А. Качественное исследование процессов структурирования магнитной жидкости // *Вісн. Харків. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка*. – 2003. – Вип. 52, № 582. – С. 81–89.
13. Пул Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. – Москва: Техносфера, 2006. – 334 с.
14. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – Москва: Мир, 1989. – 356 с.
15. Чеканов В. В., Дроздова В. И., Нуцубидзе П. В., Скроботова Т. В., Черемушкина А. В. Изменение намагниченности магнитной жидкости при изменении агрегатов // *Магнитная гидродинамика*. – 1984. – № 1. – С. 3–9.
16. Chen J., Chen X., Pu S. Realization of optical limiting with a magnetic fluid film // *Optics Communic.* – 2007. – **276**, No. 2. – P. 268–271.

17. Hong C. Y., Jang I. J., Horng H. E., Hsu C. J., Yao Y. D., Yang H. C. Ordered structures in Fe_3O_4 kerosine-based ferrofluids // J. Appl. Phys. – 1997. – **81**, No. 8. – P. 4275–4277.
18. Ivanov A. O. Aggregates in magnetic fluids: droplets, chains and fractal clusters // Eight Int. Conf. on Magnetic Fluids (June 29 – July 3, 1998, Timisoara, Romania): Abstracts. – Timisoara, 1998. – P. 262–263.
19. Li J., Lin X.-D., Lin Y.-Q., Huang Y., Bai L. Relaxation behavior measuring of transmitted light through ferrofluids films // Appl. Phys. B. – 2006. – **82**, No. 1. – P. 81–84.
20. Magnetic Fluids and Application. Handbook // Ed. B. Berkovski. – New York: Begell House, Inc., 1996. – 831 p.
21. Patsegon N. F., Popova L. N. Wave structures in magnetic fluids // Int. J. Fluid Mech. Research. – 2003. – **30**, No. 3. – P. 323–336.
22. Yang S.-Y., Horng H.-E., Hong C.-Y. Structures, optical properties and potentially electro-optical applications of magnetic fluid films // Tamkang J. Sci. and Eng. – 2002. – **5**, No. 2. – P. 85–93.
23. Zahn M. Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology // J. Nanoparticle Research. – 2001. – **3**, No. 1. – P. 73–78.

ПРОСТОРОВІ СТРУКТУРИ В НАМАГНІЧУВАНИХ РІДИНАХ

Розглядаються умови існування і стійкості просторових структур із ферочастинок типу поодиноких і періодичних страт, які виникають в нерухомих шарах намагніченої рідини в постійному однорідному магнітному полі.

SPATIAL STRUCTURES IN MAGNETIZING FLUIDS

The conditions of existence and stability of the spatial ferroparticle structures of single and periodical strata, generating in the immovable layers of magnetizing fluid, being in a constant homogeneous magnetic field, are considered.

Харьков. нац. ун-т
им. В. Н. Каразіна, Харьков

Получено
27.11.09