УДК 539.3

О. П. Гаврись

# СИСТЕМА УЗАГАЛЬНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУ ПРИ ДВОСТОРОННЬОМУ ЛОКАЛЬНОМУ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОМУ НАНЕСЕННІ ПОКРИТЬ

*Отримано систему узагальнених нелінійних граничних умов опису радіаційно-конвективного теплообміну шару з робочими середовищами через локальні області покрить. Сформульовано відповідну двовимірну задачу теплопровідності.*

**1. Вступ.** Одним з головних факторів, що впливають на теплофізичні та інші процеси в системі основа – покриття при високотемпературному нанесенні, є температурно-швидкісні режими нагрівання, плавлення в плазмовому струмені і кристалізації на поверхні підкладки частинок напилюваного матеріалу. Якість напиленого шару і міцність його зчеплення з основою в переважній більшості випадків визначаються розподілом температури в зоні контакту і в системі тіло – покриття. Слід зазначити, що публікацій, у яких наводяться результати експериментальних досліджень стосовно конкретних практичних аспектів високотемпературного напилення, значно більше, ніж тих, у яких пропонуються теоретичні розробки (див., наприклад, [7, 8]), пов'язані з процесами, що мають місце при плазмовому напиленні. Тому широке застосування такої технології викликає необхідність побудови нових математичних моделей, розробки і вдосконалення на підставі цих моделей ефективних методів аналітично-числового розрахунку і дослідження раціональних режимів високотемпературного нанесення, які (в поєднанні з експериментальними даними) дозволяють отримати необхідні експлуатаційні параметри покрить, теоретично прогнозувати якість напиленого шару, збільшення робочого ресурсу елементів конструкцій з покриттями. У [2] проведено дослідження розподілу температури в безмежному шарі при нанесенні на його поверхні високотемпературних покрить різної товщини на трьох характерних технологічних етапах (одновимірна нелінійна крайова задача теплопровідності) без урахування наявності проміжного інтервалу часу між закінченням нагрівання поверхонь основи потоками плазмотвірного газу та початком нанесення покриття. Останній факт враховано в [4], де отримано систему узагальнених нелінійних граничних умов для двовимірної крайової задачі теплопровідності для дослідження температурного поля системи шар – одностороннє високотемпературне нанесення покриття, а розподіл частинок напилюваного матеріалу в локальній зоні описано функцією Ґаусса. У цій статті на основі математичної моделі процесів при високотемпературному нанесенні захисних покрить [2] записано систему узагальнених нелінійних граничних умов теплообміну шару з двосторонніми неоднаковими локальними покриттями з робочими середовищами та сформульовано відповідну крайову задачу теплопровідності, що в подальшому дозволить визначати температурне поле в таких системах для всього технологічного ланцюга виготовлення виробів з покриттями.

**2. Постановка задачі.** Розглядається пружний шар постійної товщини $2h$, на поверхнях якого $z = h$ та $z = -h$ методом високотемпературного напилення на локальні області, обмежені колами з радіусами $r_1 = R_1$ та $r_3 = R_3$, наносяться покриття змінних товщин $2\delta_1(r_1)$ та $2\delta_3(r_3)$ відповідно.

Приймаємо, що в загальному випадку покриття виготовлені з різних матеріалів з теплофізичними характеристиками, відмінними від відповідних характеристик матеріалу основи. Параметри матеріалів покриття в межах певних часових і температурних інтервалів вважаємо сталими або такими, що змінюються за відомими законами.

Процес локального напилення покрить на поверхні шару розділимо на три неоднакові за тривалістю інтервали, які відповідають характерним етапам виготовлення виробів з покриттями [2]: $[0, \tau_1^{(1)}]$ та $[0, \tau_3^{(1)}]$ відповідно для поверхонь шару $z = h$ і $z = -h$ – радіаційно-конвективне нагрівання локальних областей основи потоками плазмотвірних газів, причому $\tau_1^{(1)} \neq \tau_3^{(1)}$; $[\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$ та $[\tau_1^{(3)}, \tau_2^{(3)}]$ – тривалості нанесення локальних покрить, $\tau_2^{(1)} \neq \tau_2^{(3)}$; $\tau > \tau_2^{(1)}$ і $\tau > \tau_2^{(3)}$ – теплообмін між поверхнями шару з локальними покриттями та робочими середовищами відповідно $(\mathrm{we})_1$ (для $z > h$) та $(\mathrm{we})_3$ (для $z < -h$).

За час нанесення покрить між поверхнями шару поза локальними зонами та відповідними робочими середовищами відбувається радіаційно-конвективний теплообмін. Взаємодією між робочими середовищами і потоками плазмотвірних газів, що містять в собі частинки напилюваних матеріалів покрить, нехтуємо.

Розподіл абсолютної температури в шарі $T_2(r, z, \tau)$ описується розв'язком рівняння теплопровідності

$$\lambda_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T_2(r, z, \tau) = \omega_2 \frac{\partial T_2(r, z, \tau)}{\partial \tau},$$

$$-h \le z \le h, \qquad 0 \le r < \infty, \tag{1}$$

де $\lambda_2$ і $\omega_2$ – коефіцієнти теплопровідності та теплоємності матеріалу основи. Цей розв'язок задовольняє початкову умову

$$T_2 \Big|_{\tau=0} = T_{20}. \tag{2}$$

У загальному випадку розподіл частинок напилюваних матеріалів в локальних областях $0 \le r_1 \le R_1$ та $0 \le r_3 \le R_3$ визначається функціями $f_1(r_1)$ та $f_3(r_3)$. Залежно від вибраних чи заданих режимів напилення такі функції описують розподіли матеріалів покрить в локальних областях і визначаються експериментально [5].

**3. Побудова системи граничних умов.** В інтервалах часу $[0, \tau_1^{(1)}]$ та $[0, \tau_3^{(1)}]$ розподіл температури в основі $T_{21}(r, z, \tau)$ повинен задовольняти такі граничні умови

– *у плямі нагрівання*:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} = \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_{(\mathrm{ir})}^{(1)} \sigma_0 T_{1(\mathrm{ir})}^4 P_{(\mathrm{ir})}^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)} \sigma_0 (T_{21}^4 - \varepsilon_{(\mathrm{pg})}^{(1)} T_{1(\mathrm{pg})}^4) +$$

$$+ \chi_{21}^{(1)} (T_{(\mathrm{bl})}^{(1)} - T_{21}) + q_1^{(1)}, \qquad 0 \le r_1 \le R_1, \tag{3}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} = \varepsilon_2^{(3)} \varepsilon_{(\mathrm{ir})}^{(3)} \sigma_0 T_{3(\mathrm{ir})}^4 P_{(\mathrm{ir})}^{(3)} - \varepsilon_2^{(3)} \sigma_0 (T_{21}^4 - \varepsilon_{(\mathrm{pg})}^{(3)} T_{3(\mathrm{pg})}^4) +$$

$$+ \chi_{23}^{(1)} (T_{(\mathrm{bl})}^{(3)} - T_{21}) + q_1^{(3)}, \qquad 0 \le r_3 \le R_3; \tag{4}$$

– *поза плямою нагрівання*:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} = \chi_{(\mathrm{we})_1} (T_{(\mathrm{we})_1}^{(1)} - T_{21}) - \varepsilon_2^{(1)} \sigma_0 T_{21}^4, \qquad r_1 > R_1, \tag{5}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} = \chi_{(\mathrm{we})_3} (T_{(\mathrm{we})_3}^{(1)} - T_{21}) - \varepsilon_2^{(3)} \sigma_0 T_{21}^4, \qquad r_3 > R_3. \tag{6}$$

У співвідношеннях (3)–(6) введено такі позначення: $\varepsilon_2^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(3)}$ – ступені чорноти поверхонь основи $z = \pm h$ відповідно; $\varepsilon_{(\text{ir})}^{(1)}$, $\varepsilon_{(\text{ir})}^{(3)}$ – ступені чорноти випромінюючих поверхонь (зрізів сопла плазмотронів, у загальному випадку їх діаметри, а також плазмотвірні гази можуть бути різними); $\sigma_0$ – постійна Стефана – Больцмана; $T_{(\text{ir})}^{(1)}$, $T_{(\text{ir})}^{(3)}$ – абсолютні температури випромінюючих поверхонь; $P_{(\text{ir})}^{(1)}$, $P_{(\text{ir})}^{(3)}$ – кутові коефіцієнти:

$$P_{(\text{ir})}^{(1)} = \frac{1}{F_{1(\text{ir})}} \int\limits_{F_1} dF_1 \int\limits_{F_{1(\text{ir})}} \frac{\exp(-d_{s_1} \bar{K}_1)}{\pi d_{s_1}^2} dF_{1(\text{ir})} ,$$

$$P_{(\text{ir})}^{(3)} = \frac{1}{F_{3(\text{ir})}} \int\limits_{F_3} dF_3 \int\limits_{F_{3(\text{ir})}} \frac{\exp(-d_{s_3} \bar{K}_3)}{\pi d_{s_3}^2} dF_{3(\text{ir})} ,$$

$F_{1(\text{ir})}$, $F_1$, $F_{3(\text{ir})}$, $F_3$ – площі зрізів сопла і плям нагрівання; $\bar{K}_1$, $\bar{K}_3$ – середні коефіцієнти поглинання променистої енергії середовищами з товщинами $d_{s_1}$, $d_{s_3}$, які одночасно є дистанціями напилення; $\chi_{21}^{(1)}$, $\chi_{23}^{(1)}$ – коефіцієнти теплообміну між поверхнями основи $z = \pm h$ у плямах нагрівання і турбулентними потоками плазмотвірних газів з температурами $T_{(\text{bl})}^{(1)}$ та $T_{(\text{bl})}^{(3)}$ (по осях струменів); $q_1^{(1)}$, $q_3^{(1)}$ – теплові потоки, що враховують скриту теплоту кристалізації (плавлення), теплоту екзотермічних (ендотермічних) процесів, хімічних реакцій; $\varepsilon_{(\text{pg})}^{(1)}$, $T_{1(\text{pg})}^{(1)}$, $\varepsilon_{(\text{pg})}^{(3)}$, $T_{3(\text{pg})}^{(3)}$ – ступені чорноти і абсолютні температури плазмотвірних газів робочих середовищ $z = \pm h$; $\chi_{(\text{we})_1}$, $\chi_{(\text{we})_3}$ – коефіцієнти теплообміну між поверхнями шару та робочими середовищами $(\text{we})_1$ і $(\text{we})_3$ з абсолютними температурами $T_{(\text{we})_1}^{(1)}$ та $T_{(\text{we})_3}^{(3)}$ для перших інтервалів часу.

Граничні умови (3)–(6) для зручності подамо за допомогою одиничних функцій Гевісайда $\theta(r_1)$ і $\theta(r_3)$:

$$\begin{aligned} &G_{11}^{(1)} \theta(R_1 - r_1) + G_{21}^{(1)} \theta(r_1 - R_1) = 0, \qquad z = h , \\ &G_{11}^{(3)} \theta(R_3 - r_3) + G_{21}^{(3)} \theta(r_3 - R_3) = 0, \qquad z = -h , \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned} G_{11}^{(1)} = &-\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} + \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_{(\text{ir})}^{(1)} \sigma_0 T_{1(\text{ir})}^4 P_{(\text{ir})}^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)} \sigma_0 (T_{21}^4 - \varepsilon_{(\text{pg})}^{(1)} T_{1(\text{pg})}^4) + \\ &+ \chi_{21}^{(1)} (T_{(\text{bl})}^{(1)} - T_{21}) + q_1^{(1)} , \end{aligned}$$

$$G_{21}^{(1)} = -\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} + \chi_{(\text{we})_1} (T_{(\text{we})_1}^{(1)} - T_{21}) - \varepsilon_2^{(1)} \sigma_0 T_{21}^4 ,$$

$$\begin{aligned} G_{11}^{(3)} = &\lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} + \varepsilon_2^{(3)} \varepsilon_{(\text{ir})}^{(3)} \sigma_0 T_{3(\text{ir})}^4 P_{(\text{ir})}^{(3)} - \varepsilon_2^{(3)} \sigma_0 \left(T_{21}^4 - \varepsilon_{(\text{pg})}^{(3)} T_{3(\text{pg})}^4\right) + \\ &+ \chi_{23}^{(1)} \left(T_{(\text{bl})}^{(3)} - T_{21}\right) + q_1^{(1)} , \end{aligned}$$

$$G_{21}^{(3)} = \lambda_2 \frac{\partial T_{21}}{\partial z} + \chi_{(\text{we})_3} (T_{(\text{we})_3}^{(1)} - T_{21}) - \varepsilon_2^{(3)} \sigma_0 T_{21}^4 .$$

Щоб врахувати зміни температури основи $T'_{21}$ за час підготовки плазмотронів до нанесення покрить доцільно ввести додаткові (проміжні) інтервали часу $[\tau_1^{(1)}, \tau_1'^{(1)}]$, $\tau_1'^{(1)} \le \tau_2^{(1)}$ (для $z = h$) та $[\tau_1^{(3)}, \tau_1'^{(3)}]$, $\tau_1'^{(3)} \le \tau_2^{(3)}$ (для $z = -h$) [1]. У цих інтервалах часу можливе радіаційно-конвективне нагрівання (охолодження) основи. Граничні умови подамо таким чином:

$$G_1'^{(1)} = -\lambda_2^z \frac{\partial T'_{21}}{\partial z} + \chi'_{(\mathrm{we})_1}(T'^{(1)}_{(\mathrm{we})_1} - T'_{21}) - \varepsilon_2'^{(1)}\sigma_0 T'^4_{21}, \qquad z = h,$$

$$G_1'^{(3)} = \lambda_2^z \frac{\partial T'_{21}}{\partial z} + \chi'_{(\mathrm{we})_3}(T^{(1)}_{(\mathrm{we})_3} - T'_{21}) - \varepsilon_2'^{(3)}\sigma_0 T'^4_{21}, \qquad z = -h, \tag{8}$$

де $\chi'_{(\mathrm{we})_1}$, $\chi'_{(\mathrm{we})_3}$, $\varepsilon_2'^{(1)}$, $\varepsilon_2'^{(3)}$ – коефіцієнти теплообміну та ступені чорноти поверхонь шару у виділених проміжних інтервалах часу. Якщо $\tau_1^{(1)} = \tau_1'^{(1)}$ і $\tau_1^{(3)} = \tau_1'^{(3)}$, тоді $G_1'^{(1)} = G_1'^{(3)} = 0$.

Отже, для визначення розподілу температури в першому та проміжному інтервалах часу маємо граничні умови (7) і (8).

В інтервалах часу $[\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$ і $[\tau_1^{(3)}, \tau_2^{(3)}]$ або $[\tau_1^{(1)} + \tau_1'^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$ і $[\tau_1^{(3)} + \tau_1'^{(3)}, \tau_2^{(3)}]$ на поверхні шару відбувається нанесення покрить на локальні області. Згідно з розробленою математичною моделлю вважаємо, що за час нанесення і формування суцільних і змінних за товщиною покрить в кожній їх точці діють джерела тепла потужності $w_1$ і $w_3$ [2]. Вважаємо також, що за час нанесення покриття максимальні значення їх товщин досягаються у критичних точках $\delta_{1\max} = 2\delta_1(0)$ для $z = h$ та $\delta_{3\max} = 2\delta_3(0)$ для $z = -h$. Звідси для визначення товщини покрить у довільній точці локальних областей отримаємо співвідношення

$$\delta_i(r_i) = 1/2\delta_{i\max} f_i(r_i), \qquad i = 1, 3. \tag{9}$$

Усереднені характеристики джерел тепла, що входять в узагальнені нелінійні граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну основи з середовищем через покриття, будуть мати вигляд

$$W_i = \int_{-\delta_i(r_i)}^{\delta_i(r_i)} w_i f_i(r_i)\,dz, \qquad W_i^* = \frac{3}{2\delta_i(r_i)} \int_{-\delta_i(r_i)}^{\delta_i(r_i)} w_i z f_i(r_i) z\,dz, \quad i = 1,3. \tag{10}$$

Отже, для визначення зміни з часом розподілу температури $T_{22}(r, z, \tau)$ в другому часовому інтервалі маємо таку систему узагальнених нелінійних граничних умов:

$$\lambda_2\Delta_1 T_{22} - \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1^{(1)}}{h_1}\right)\frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \varepsilon_1^{(2)}\varepsilon_{(\mathrm{ir})}^{(1)}\sigma_0 T^4_{1(\mathrm{ir})} P'^{(1)}_{(\mathrm{ir})} - \varepsilon_1^{(2)}\sigma_0\left(T^4_{22} - \varepsilon^{(1)}_{(\mathrm{sm})} T^4_{1(\mathrm{sm})}\right) +$$

$$+ q_2^{(1)} + \chi_1^{(1)}(T^{(1)}_{(\mathrm{bl})} - T_{22}) f_1(r_1) = 4\varepsilon_1^{(2)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_1} T^3_{22} \frac{\partial T_{22}}{\partial z} -$$

$$-\left(1 + \frac{\chi_1^{(1)}}{2h_1}\right) W_1 + \frac{1}{6}\frac{\chi_1^{(1)}}{2h_1} W_1^*, \qquad z = h, \qquad 0 \le r_1 \le R_1, \tag{11}$$

$$\lambda_2\Delta_3 T_{22} + \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1^{(3)}}{h_3}\right)\frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \varepsilon_3^{(2)}\varepsilon_{(\mathrm{ir})}^{(3)}\sigma_0 T^4_{3(\mathrm{ir})} P'^{(3)}_{(\mathrm{ir})} - \varepsilon_3^{(2)}\sigma_0\left(T^4_{22} - \varepsilon^{(3)}_{(\mathrm{sm})} T^4_{3(\mathrm{sm})}\right) +$$

$$+ q_2^{(3)} + \chi_1^{(3)}(T^{(3)}_{(\mathrm{bl})} - T_{22}) f_3(r_3) = -4\varepsilon_3^{(2)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_3} T^3_{22} \frac{\partial T_{22}}{\partial z} -$$

$$-\left(1 + \frac{\chi_3^{(1)}}{2h_3}\right) W_3 + \frac{1}{6}\frac{\chi_1^{(3)}}{2h_3} W_3^*, \qquad z = -h, \quad 0 \le r_3 \le R_3. \tag{12}$$

На поверхнях шару поза зонами нанесення покрить граничні умови запишемо так:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_{22}}{\partial z} = \chi'_{(\text{we})_1}\left(T^{(2)}_{(\text{we})_1} - T_{22}\right) - \varepsilon_2'^{(1)}\sigma_0 T_{22}^4, \qquad z = h, \quad r_1 > R_1, \tag{13}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_{22}}{\partial z} = \chi'_{(\text{we})_3}\left(T^{(2)}_{(\text{we})_3} - T_{22}\right) - \varepsilon_2'^{(3)}\sigma_0 T_{22}^4, \qquad z = -h, \quad r_3 > R_3. \tag{14}$$

У формулах (11)–(14) введено такі позначення: $T_{22}$ – розподіл температури в другому інтервалі часу; $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r_i} - \omega_i \frac{\partial}{\partial \tau}$, $i = 1, 3$; $\omega_1 = \omega'_1 \delta_1(r_1)$, $\omega_3 = \omega'_3 \delta_3(r_3)$ і $\omega'_1$, $\omega'_3$ – зведені та питомі теплоємності матеріалів покрить; $\chi_1^{(1)}$, $\chi_1^{(3)}$ – коефіцієнти теплообміну між поверхнями покрить і турбулентними потоками плазмотвірних газів; $\chi'_{(\text{we})_1}$ (при $z = h$, $r_1 > R_1$) і $\chi'_{(\text{we})_3}$ (при $z = -h$, $r_3 > R_3$) – коефіцієнти тепловіддачі; $\varepsilon_2'^{(1)}$ (при $z = h$, $r_1 > R_1$) і $\varepsilon_2'^{(3)}$ (при $z = -h$, $r_3 > R_3$) – ступені чорноти відповідних поверхонь основи; $\varepsilon_1^{(2)}$, $\varepsilon_3^{(2)}$ – ступені чорноти поверхонь покрить; $P'^{(1)}_{(\text{ir})}$, $P'^{(3)}_{(\text{ir})}$ – кутові коефіцієнти, які враховують поглинання випроміненої енергії зрізів сопла плазмотронів двофазними потоками (газ і напилювані частинки); $\varepsilon^{(1)}_{(\text{sm})}$, $T_{1(\text{sm})}$ і $\varepsilon^{(3)}_{(\text{sm})}$, $T_{3(\text{sm})}$ – ступені чорноти та абсолютні температури об'ємів двофазних потоків між зрізами сопла плазмотронів і поверхнями покрить; $h_1 = \frac{\lambda_1}{2\delta_1(r_1)}$, $h_3 = \frac{\lambda_3}{2\delta_3(r_3)}$ – теплопроникності матеріалів покрить; $\lambda_1$, $\lambda_3$ – теплопровідності матеріалів покрить; $q_2^{(1)}$, $q_2^{(2)}$ – теплові потоки, що враховують теплоту кристалізації (плавлення).

За час нагрівання поверхонь основи потоками плазмотвірних газів і можливим нагріванням чи охолодженням основи в проміжному інтервалі часу відбулась зміна температурного поля підкладки. Тому в співвідношеннях (13) і (14) величини теплових і радіаційних характеристик приймаємо відмінними від аналогічних параметрів попереднього (першого) періоду.

Остаточно (за допомогою одиничних функцій) у других часових інтервалах отримаємо таку систему граничних умов:

$$G_{12}^{(1)}\theta(R_1 - r_1) + G_{22}^{(1)}\theta(r_1 - R_1) = 0,$$

$$G_{12}^{(3)}\theta(R_3 - r_3) + G_{22}^{(3)}\theta(r_3 - R_3) = 0, \tag{15}$$

$$G_{12}^{(1)} = \lambda_2^z \Delta_1 T_{22} - \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1^{(1)}}{h_1}\right)\frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \varepsilon_1^{(2)}\varepsilon^{(1)}_{(\text{ir})}\sigma_0 T^4_{1(\text{ir})} P'^{(1)}_{(\text{ir})} -$$
$$- \varepsilon_1^{(2)}\sigma_0\left(T_{22}^4 - \varepsilon^{(1)}_{(\text{sm})} T^4_{1(\text{sm})}\right) + q_2^{(1)} + \chi_1^{(1)}\left(T^{(1)}_{(\text{bl})} - T_{22}\right) f_1(r_1) -$$
$$- 4\varepsilon_1^{(2)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_1} T_{22}^3 \frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \left(1 + \frac{\chi_1^{(1)}}{2h_1}\right) W_1 - \frac{1}{6}\frac{\chi_1^{(1)}}{2h_1} W_1^*,$$

$$G_{12}^{(3)} = \lambda_2^z \Delta_3 T_{22} + \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1^{(3)}}{h_3}\right)\frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \varepsilon_3^{(2)}\varepsilon^{(3)}_{(\text{ir})}\sigma_0 T^4_{3(\text{ir})} P'^{(3)}_{(\text{ir})} -$$
$$- \varepsilon_3^{(2)}\sigma_0\left(T_{22}^4 - \varepsilon^{(3)}_{(\text{sm})} T^4_{3(\text{sm})}\right) + q_2^{(3)} + \chi_1^{(3)}\left(T^{(3)}_{(\text{bl})} - T_{22}\right) f_3(r_3) +$$
$$+ 4\varepsilon_3^{(2)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_3} T_{22}^3 \frac{\partial T_{22}}{\partial z} + \left(1 + \frac{\chi_3^{(1)}}{2h_3}\right) W_3 - \frac{1}{6}\frac{\chi_1^{(3)}}{2h_3} W_3^*,$$

$$G_{22}^{(1)} = \lambda_2^z \frac{\partial T_{22}}{\partial z} - \chi'_{(\text{we})_1}\left(T_{(\text{we})_1}^{(2)} - T_{22}\right) + \varepsilon_2'^{(1)}\sigma_0 T_{22}^4,$$

$$G_{22}^{(3)} = -\lambda_2^z \frac{\partial T_{22}}{\partial z} - \chi'_{(\text{we})_3}\left(T_{(\text{we})_3}^{(2)} - T_{22}\right) + \varepsilon_2'^{(3)}\sigma_0 T_{22}^4.$$

Для визначення температури основи в інтервалах часу $\tau > \tau_2^{(1)}$ і $\tau > \tau_2^{(3)}$ систему узагальнених нелінійних граничних умов отримаємо зі співвідношень (15), враховуючи відсутність теплових потоків плазмотронів і покладаючи відповідні значення параметрів:

$$G_{13}^{(1)}\theta(R_1 - r_1) + G_{23}^{(1)}\theta(r_1 - R_1) = 0, \qquad z = h, \qquad \tau > \tau_2^{(1)},$$

$$G_{13}^{(3)}\theta(R_3 - r_3) + G_{23}^{(3)}\theta(r_3 - R_3) = 0, \qquad z = -h, \qquad \tau > \tau_2^{(3)}, \tag{16}$$

де

$$G_{13}^{(1)} = \lambda_2\Delta_1 T_{23} - \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1'^{(1)}}{h_1}\right)\frac{\partial T_{23}}{\partial z} - \varepsilon_1^{(3)}\sigma_0\left(T_{23}^4 - \varepsilon_{(\text{we})_1}^{(3)} T_{(\text{we})_1}^4\right) + q_3^{(1)} +$$

$$+ \chi_1'^{(1)}\left(T_{(\text{we})_1}^{(1)} - T_{23}\right) f_1(r_1) - 4\varepsilon_1^{(3)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_1} T_{23}^3 \frac{\partial T_{23}}{\partial z} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\chi_1'^{(1)}}{2h_1}\right) W_1' - \frac{1}{6}\frac{\chi_1'^{(1)}}{2h_1} W_1'^{*}, \qquad 0 \le r_1 \le R_1,$$

$$G_{13}^{(3)} = \lambda_2\Delta_3 T_{23} + \lambda_2^z\left(1 + \frac{\chi_1'^{(3)}}{h_3}\right)\frac{\partial T_{23}}{\partial z} - \varepsilon_3^{(3)}\sigma_0\left(T_{23}^4 - \varepsilon_{(\text{we})_3}^{(3)} T_{(\text{we})_3}^4\right) + q_3^{(3)} +$$

$$+ \chi_3'^{(3)}\left(T_{(\text{we})_3}^{(3)} - T_{23}\right) f_3(r_3) + 4\varepsilon_3^{(3)}\sigma_0 \frac{\lambda_2^z}{h_3} T_{23}^3 \frac{\partial T_{23}}{\partial z} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\chi_3'^{(3)}}{2h_3}\right) W_3' - \frac{1}{6}\frac{\chi_3'^{(3)}}{2h_3} W_3'^{*}, \qquad 0 \le r_3 \le R_3,$$

$$G_{23}^{(1)} = \lambda_2 \frac{\partial T_{23}}{\partial z} - \chi_{(\text{we})_1}^{(3)}\left(T_{(\text{we})_1}^{(3)} - T_{23}\right) + \varepsilon_2'^{(1)}\sigma_0 T_{23}^4, \qquad r_1 > R_1,$$

$$G_{23}^{(3)} = -\lambda_2 \frac{\partial T_{23}}{\partial z} - \chi_{(\text{we})_3}^{(3)}\left(T_{(\text{we})_3}^{(3)} - T_{23}\right) + \varepsilon_2'^{(3)}\sigma_0 T_{23}^4, \qquad r_3 > R_3.$$

Тут $T_{23}$ – розподіл температури в основі в третьому інтервалі часу; $\chi_1'^{(1)}$, $\chi_3'^{(3)}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покрить; $\chi_{(\text{we})_1}^{(3)}$, $\chi_{(\text{we})_3}^{(3)}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь основи поза покриттями; $W_1'$, $W_1'^{*}$, $W_3'$, $W_3'^{*}$ – усереднені характеристики джерел тепла, природа яких, взагалі кажучи, може відрізнятись від джерел тепла в другому інтервалі часу.

За допомогою одиничних функцій від радіуса і часу об'єднаємо граничні умови в єдину систему:

$$\left[G_{11}^{(1)}\theta(R_1 - r_1) + G_{21}^{(1)}\theta(r_1 - R_1)\right]\left[\theta(\tau) - \theta(\tau - \tau_1^{(1)})\right] +$$

$$+ G_1'^{(1)}\left[\theta(\tau - \tau_1') - \theta(\tau - \tau_1'^{(1)})\right] + \left[G_{12}^{(1)}\theta(R_1 - r_1) +\right.$$

$$\left.+ G_{22}^{(1)}\theta(r_1 - R_1)\right]\left[\theta(\tau - \tau_1'^{(1)}) - \theta(\tau - \tau_2^{(1)})\right] +$$

$$+ \left[G_{13}^{(1)}\theta(R_1 - r_1) + G_{23}^{(1)}\theta(r_1 - R_1)\right]\theta(\tau - \tau_2^{(1)}) = 0, \qquad z = h,$$

$$
\begin{aligned}
&\left[G_{11}^{(3)}\theta(R_3 - r_3) + G_{21}^{(3)}\theta(r_3 - R_3)\right]\left[\theta(\tau) - \theta(\tau - \tau_1^{(3)})\right] + \\
&\qquad + G_1^{\prime(3)}\left[\theta(\tau - \tau_1^{(3)}) - \theta(\tau - \tau_1^{\prime(3)})\right] + \left[G_{12}^{(3)}\theta(R_3 - r_3) + \right. \\
&\qquad \left. + G_{22}^{(3)}\theta(r_3 - R_3)\right]\left[\theta(\tau - \tau_1^{\prime(3)}) - \theta(\tau - \tau_2^{(3)})\right] + \left[G_{13}^{(3)}\theta(R_3 - r_3) + \right. \\
&\qquad \left. + G_{23}^{(3)}\theta(r_3 - R_3)\right]\theta(\tau - \tau_2^{(3)}) = 0, \qquad z = -h. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Якщо в (17) покласти $\tau_1^{(1)} = \tau_1^{\prime(1)}$ і $\tau_1^{(3)} = \tau_1^{\prime(3)}$, що відповідає випадку нехтування проміжними інтервалами часу або безпосередньому початку нанесення покрить після нагрівання поверхонь основи потоками плазмотвірних газів, отримаємо систему граничних умов для трьох інтервалів.

Зі співвідношень (17) також можна отримати системи граничних умов для низки практично важливих задач: двостороннє нанесення високотемпературних покрить з різних матеріалів на однакові за розміром локальні зони $(R_1 = R_3)$; двостороннє нанесення покрить з однакових матеріалів при однакових часових інтервалах тощо.

Коли за функції $f_1$ і $f_3$ вибрати розподіл Ґаусса матеріалу покриття в локальній області [4], отримаємо систему граничних умов, наведених в [3].

Якщо радіуси локальних областей спрямувати до безмежності, отримаємо систему узагальнених нелінійних умов одновимірної задачі теплопровідності для шару при одно- чи двосторонньому високотемпературному нанесенні покрить [6].

**4. Висновки.** Отримана система узагальнених нелінійних граничних умов (17) буде використана для чисельно-аналітичного дослідження і розрахунку температурного поля в системі шар – двосторонні локальні неоднакові покриття на всіх чотирьох характерних технологічних етапах виготовлення виробів з покриттями. Результати мають самостійне теоретичне і прикладне значення для оптимізації режимів нанесення і як наступний етап – раціоналізації фізико-механічних параметрів (адгезія, міцність покрить, мінімізація залишкових деформацій в таких системах). Ці результати в подальшому будуть використані для побудови математичної моделі дослідження і розрахунку процесів у тілах із високотемпературними покриттями з урахуванням руху плями нанесення на поверхні підкладки.


1. *Барвинок В. А.* Управление напряженным состоянием и свойства плазменных покрытий. – Москва: Машиностроение, 1990. – 384 с.
2. *Гаврись А. П., Шевчук П. Р.* Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 13–18.
3. *Гаврись О. П.* Узагальнені нелінійні граничні умови при локальному високотемпературному нанесенні захисних покрить // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 98–102.
4. *Кудинов В. В., Иванов В. М.* Нанесение плазмой тугоплавких покрытий. – Москва: Машиностроение, 1981. – 192 с.
5. *Кудинов В. В., Пекшев П. Ю., Белащенко В. Е., Солоненко О. П., Сафиуллин В. А.* Нанесение покрытий плазмой. – Москва: Наука, 1990. – 408 с.
6. *Шевчук П. Р., Гаврись О. П.* Розрахунок залишкових деформацій у покриттях, нанесених способом високотемпературного напилення на плоскі поверхні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 1. – С. 105–113.
7. *Ronda J., Murakawa H., Nogi K., Ushio M.* Enhanced models of heat sources in welding and plasma spraying (2-nd Report): Examples of thermal plasma models // Trans. JWRI. – 2002. – **31**, No. 2. – P. 107-128.
8. *Vardelle A., Chaselas C., Marchand C., Mariaux G.* Modeling time-depended phenomena in plasma spraying of liquid precursors // Pure Appl. Chem. – 2008. – **80**, No. 9. – P. 1981–1991.

## СИСТЕМА ОБОБЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СЛОЯ ПРИ ДВУСТОРОННЕМ ЛОКАЛЬНОМ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ НАНЕСЕНИИ ПОКРЫТИЙ

*Получена система обобщенных нелинейных граничных условий описания радиационно-конвективного теплообмена слоя с рабочими средами через локальные области покрытий. Сформулирована соответствующая двухмерная задача теплопроводности.*

## SYSTEM OF GENERALIZED NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS FOR BOUNDARY-VALUE HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR A LAYER AT TWO-SIDED LOCAL HIGH-TEMPERATURE COATING

*A system of generalized nonlinear boundary conditions to describe radiative and convective heat exchange of a layer with working environment through the local areas of coatings has been obtained. The corresponding two-dimensional heat conduction problem has been formulated.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.03.09