УДК 517.95

П. І. Каленюк[1,2], І. В. Когут[1], З. М. Нитребич[1]

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

Досліджено задачу з неоднорідною інтегральною умовою для однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та в загальному нескінченного порядку за просторовою змінною зі сталими коефіцієнтами. Доведено існування та єдиність розв'язку задачі у класі квазіполіномів спеціального вигляду. Розв'язок цієї задачі побудовано за допомогою диференціально-символьного методу. У випадку існування неєдиного розв'язку задачі запропоновано формули для побудови часткового розв'язку задачі.

Вступ. Дослідження задач з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки набуло особливої актуальності, насамперед, у зв'язку з їх важливою прикладною інтерпретацією. Одним із перших досліджень, де були запроваджені інтегральні умови для одновимірного рівняння теплопровідності, була праця J. R. Cannon [24]. Згодом інтегральні умови почали застосовувати у різноманітних моделях, які описують процеси поширення тепла [3, 6, 9, 22], вологопереносу [12], демографічні процеси [1], процеси дифузії частинок у турбулентній плазмі [18]. Інтегральні умови знайшли належне використання також в обернених задачах теорії теплопровідності [25].

У працях останніх років задачі з інтегральними умовами в обмежених областях для параболічних, гіперболічних і безтипних рівнянь досліджувалися в роботах [4, 5, 10, 11, 13, 16, 17, 23], а також для еволюційного рівняння в банаховому просторі – в [19].

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними в необмежених областях (смугах і шарах) досліджувались у працях [2, 8, 14, 15, 20, 21]. Зокрема, у працях [2, 14, 15, 20, 21] вивчалися питання коректної розв'язності розглядуваних задач.

Ця стаття є продовженням дослідження [8] і присвячена питанню однозначної розв'язності задачі з інтегральною часовою умовою для диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою змінною у смузі, а також питанню побудови часткових розв'язків задачі у класі існування неєдиного розв'язку задачі. Розв'язки задач за допомогою диференціально-символьного методу [7] у класі квазіполіномів будуються в явному вигляді як дії деяких диференціальних виразів на цілі або мероморфні функції параметра з подальшим покладанням цього параметра таким, що дорівнює нулеві.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0, \qquad t \in (0,T), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$; $a\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз з цілим аналітичним символом $a(\nu) \ne \mathrm{const}$.

Запровадимо деякі позначення.

Під класом K_M розумітимемо клас дійснозначних квазіполіномів вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j x] Q_j(x), \tag{3}$$

де $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, m$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, − деякі поліноми з дійсними коефіцієнтами. Крім того, $K_{L,M}$ − це клас дійснозначних квазіполіномів вигляду

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\beta_j t + \alpha_j x] Q_j(t, x),$$

де $\beta_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ або $\beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, m$; $Q_j(t, x)$, $j = 1, \ldots, m$, − поліноми від змінних t і x з дійсними коефіцієнтами.

Для квазіполінома $f \in K_{\mathbb{C}}$ вигляду (3) дію диференціального виразу $f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ на цілу функцію $\exp[a(\nu)t + \nu x]$ з подальшим покладанням параметра ν рівним нулеві означимо так:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp[a(\nu)t + \nu x]\}\Big|_{\nu=0} \equiv \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp[a(\nu)t + \nu x]\}\Big|_{\nu=\alpha_j}. \tag{4}$$

2. Основні результати.

2.1. Клас однозначної розв'язності задачі та побудова розв'язку. Нехай $\eta(\nu)$ − функція вигляду

$$\eta(\nu) = \frac{\exp[a(\nu)T] - 1}{a(\nu)}, \tag{5}$$

а P − множина її нулів: $P = \{\nu \in \mathbb{C} : \eta(\nu) = 0\}$. Якщо $\alpha \in P$, то через p_α позначимо кратність нуля α функції $\eta(\nu)$, тобто

$$\eta(\alpha) = 0, \quad \eta'(\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad \eta^{(p_\alpha - 1)}(\alpha) = 0, \quad \eta^{(p_\alpha)}(\alpha) \neq 0.$$

Для побудови розв'язку задачі (1), (2) використаємо диференціально-символьний метод [7]. Шукаємо розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$U(t, x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{C(\nu)\exp[a(\nu)t + \nu x]\}\Big|_{\nu=0}, \tag{6}$$

де $g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ − деякий диференціальний вираз з аналітичним символом, а $C(\nu)$ − аналітична функція.

Задовольняючи умову (2), одержуємо рівність

$$\varphi(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{C(\nu)\int_0^T \exp[a(\nu)t + \nu x]\, dt\right\}\Big|_{\nu=0},$$

з якої знаходимо

$$C(\nu) = \frac{a(\nu)}{\exp[a(\nu)T] - 1}, \qquad g(x) = \varphi(x).$$

Отже, розв'язок задачі (1), (2) можна подати у вигляді

$$U(t, x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t + \nu x]}{\eta(\nu)}\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{7}$$

де функція $\eta(\nu)$ означена рівністю (5).

У формулу (7) для знаходження розв'язку задачі (1), (2) входить знаменник, який може перетворюватися в нуль. Тому для випадку, коли $\varphi \in \in K_{\mathbb{C}}$, ця формула є незастосовною. Наприклад, якщо в задачі (1), (2) $a(\nu) = \nu^2$, $T = 1$, то для квазіполінома вигляду $\varphi(x) = \exp[x\sqrt{2\pi}]\sin[x\sqrt{2\pi}]$ формула (7) є непридатною.

Зауважимо, що $P \neq \varnothing$ і $P \neq \mathbb{C}$ з огляду на припущення $a(\nu) \neq \mathrm{const}$.

Сформулюємо теорему, яка з'ясовує застосовність формули (7) для випадку, коли $\varphi \in K_M$, де M − деяка підмножина $\mathbb{C}$.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in K_{\mathbb{C}\setminus P}$, *де* P − *множина нулів функції* (5). *Тоді у класі функцій* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою* (7).

Д о в е д е н н я. Встановимо спочатку існування розв'язку задачі в $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. Нехай $\varphi(x)$ − квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C}\setminus P}$ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j x] Q_j(x),$$

де $\alpha_j \in \mathbb{C}\setminus P$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ для $i \neq j$, $i, j = 1,\ldots,m$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = 1,\ldots,m$, − поліноми. Тоді, враховуючи (4), з формули (7) одержимо

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t + \nu x]}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j}. \tag{8}$$

Оскільки $\alpha_j \in \mathbb{C}\setminus P$, то функція (8) визначена коректно. Вона справджує рівняння (1) та умову (2). Крім того, знайдена функція $U(t,x)$, очевидно, є квазіполіномом із класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. Існування розв'язку доведено.

Доведемо єдиність знайденого розв'язку у виділеному класі. Доведення проведемо від супротивного. Нехай існують два різних розв'язки $U_1, U_2 \in \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. Тоді їх різниця $V = U_1 - U_2 \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ є розв'язком рівняння (1) і справджує однорідну умову

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = 0.$$

Однак, як показано у [8], $V \in K_{\mathbb{C},P}$. Оскільки $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P} \cap K_{\mathbb{C},P} = \{0\}$, то $V(t,x) = 0$. Тому $U_1(t,x) = U_2(t,x)$. Одержали суперечність.

Теорему доведено. ◊

Приклад 1. Знайти в області $\{(t,x) : t \in (0, 2\pi),\ x \in \mathbb{R}\}$ розв'язок інтегральної задачі для рівняння теплопровідності

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} U(t,x)\,dt = x\exp x. \tag{9}$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T = 2\pi$, $a(\nu) = \nu^2$, $\varphi(x) = x\exp x$, $\eta(\nu) = = \dfrac{\exp[2\pi\nu^2] - 1}{\nu^2}$. Точка $\nu = 1$ не є нулем функції $\eta(\nu)$. Тоді за теоремою 1 існує єдиний розв'язок задачі (9) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. Знайдемо його за формулою (8):

$$U(t,x)=\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{\nu^2\exp[\nu^2 t+\nu x]}{\exp[2\pi\nu^2]-1}\right\}\Bigg|_{\nu=1}=$$

$$=\frac{(2+2t+x)\exp[t+x](\exp[2\pi]-1)-\exp[t+x]4\pi\exp[2\pi]}{(\exp[2\pi]-1)^2}=$$

$$=\frac{\exp[t+x]\big((2+2t+x)(\exp[2\pi]-1)-4\pi\exp[2\pi]\big)}{(\exp[2\pi]-1)^2}=$$

$$=\frac{\exp[t+x]}{(\exp[2\pi]-1)^2}\big[(\exp[2\pi]-1)(2t+x)+(2-4\pi)\exp[2\pi]-2\big].\ \blacktriangle$$

2.2. Побудова часткового розв'язку задачі у класі існування неєдиного розв'язку задачі. Якщо $\varphi\in K_P$, то розв'язок задачі (1), (2) існує у класі $K_{\mathbb{C},P}$, однак, він не є єдиним і знаходиться з точністю до елементів ядра задачі (1), (2), що містяться в $K_{\mathbb{C},P}$. Тому ставиться питання про знаходження часткового розв'язку задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C},P}$.

Теорема 2. *Нехай* $\varphi\in K_P$ *і має вигляд*

$$\varphi(x)=\exp[\alpha x]Q(x)\,, \tag{10}$$

де $Q(x)$ *– довільний поліном, і нехай* p_α *– кратність нуля* α *функції* (5). *Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x)=Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{F(t,x,\nu)\}\Big|_{\nu=\alpha}\,, \tag{11}$$

у якій

$$F(t,x,\nu)=\frac{\tilde F(t,x,\nu,\alpha)}{\eta(\nu)}\,,$$

$$\tilde F(t,x,\nu,\alpha)=\exp[a(\nu)t+\nu x]-\exp[a(\alpha)t+\alpha x]\sum_{k=0}^{p_\alpha-1}\frac{(\nu-\alpha)^k}{k!}x^k\,. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Неважко перевірити, що функція $F(t,x,\nu)$ справджує рівняння (1) і таку умову:

$$\int_0^T F(t,x,\nu)\,dt=\exp[\nu x]\,.$$

Оскільки функція (12) є цілою стосовно ν і нулі функції (5) є нулями функції (12), до того тієї ж кратності, то функція $F(t,x,\nu)$ є цілою стосовно ν.

Враховуючи аналітичність функції $F(t,x,\nu)$ за параметром ν, покажемо, що формула (11) визначає розв'язок задачі (1), (2):

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\int_0^T F(t,x,\nu)\,dt\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}=Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu x]\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=Q(x)\{\exp[\nu x]\}\big|_{\nu=\alpha}=Q(x)\exp[\alpha x]\,,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x)=Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]F(t,x,\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}=0\,.$$

Теорему доведено. ◊

Зауваження 1. *Для довільного квазіполінома* $\varphi(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j x]Q_j(x)$ *з класу* K_P *за принципом суперпозиції частковий розв'язок задачі* (1), (2) *знаходиться у вигляді*

$$U(t,x)=\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\tilde F(t,x,\nu,\alpha_j)}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j}.$$

Для знаходження часткового розв'язку задачі (1), (2) за формулою (11) часто потраплятимемо на невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Застосування правила Лопіталя − Бернуллі або застосування розвинень відповідних функцій у ряди Тейлора для розкриття цієї невизначеності призводить до громіздких обчислень. У наступній теоремі вкажемо іншу формулу для знаходження часткового розв'язку задачі (1), (2).

Нехай $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x)=\exp[\alpha x]Q_n(x), \tag{13}$$

де $Q_n(x)$ − поліном степеня n, $\alpha\in P$ і має кратність $p_\alpha\in\mathbb{N}$. Позначимо

$$\rho(t,x,\nu)=\eta(\nu)^{n+1}Q_n\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t+\nu x]}{\eta(\nu)}\right\}. \tag{14}$$

Теорема 3. *Нехай* $\varphi\in K_P$ *і має вигляд* (13). *Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x)=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}\rho(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}[\eta(\nu)^{n+1}]\Big|_{\nu=\alpha}}, \tag{15}$$

де $\rho(t,x,\nu)$ − *функція* (14).

Д о в е д е н н я. Функція (15) справджує рівняння (1), оскільки вона отримана шляхом диференціювання розв'язку $\exp[a(\nu)t+\nu x]$ рівняння (1) за параметром ν і домножена на функцію, що залежить лише від параметра ν. Покажемо, що для функції (15) виконується умова (2):

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=\int_0^T\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}\rho(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}[\eta(\nu)^{n+1}]\Big|_{\nu=\alpha}}dt=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}\left\{\int_0^T\rho(t,x,\nu)\,dt\right\}\Big|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}[\eta(\nu)^{n+1}]\Big|_{\nu=\alpha}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}\left\{\eta(\nu)^{n+1}Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\int_0^T\exp[a(\nu)t+\nu x]dt}{\eta(\nu)}\right\}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha}[\eta(\nu)^{n+1}]\Big|_{\nu=\alpha}}=$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} \left\{\eta(\nu)^{n+1} Q\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp[\nu x]\}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} [\eta(\nu)^{n+1}]\Bigg|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} \left\{\eta(\nu)^{n+1} Q(x)\exp[\nu x]\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}}{\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} [\eta(\nu)^{n+1}]\Bigg|_{\nu=\alpha}} = \exp[\alpha x] Q(x).$$

Теорему доведено. ◊

Зауваження 2. *Оскільки*

$$\left(\frac{d}{d\nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} [\eta(\nu)^{n+1}]\Bigg|_{\nu=\alpha} = \frac{((n+1)p_\alpha)!}{(p_\alpha!)^{n+1}} [\eta^{(p_\alpha)}(\alpha)]^{n+1},$$

то формулу (15) *можна записати у вигляді*

$$U(t,x) = \frac{(p_\alpha!)^{n+1}}{[\eta^{(p_\alpha)}(\alpha)]^{n+1}((n+1)p_\alpha)!} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{(n+1)p_\alpha} \rho(t,x,\nu)\Bigg|_{\nu=\alpha}.$$

Приклад 2. Знайти в області $\{(t,x) : t \in (0,2\pi),\ x \in \mathbb{R}\}$ розв'язок такої задачі:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} U(t,x)\,dt = x \exp x \sin x. \qquad (16)$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T = 2\pi$, $a(\nu) = \nu^2$, $\eta(\nu) = \dfrac{\exp[2\pi\nu^2] - 1}{\nu^2}$, $\varphi(x) = x \exp x \sin x = \dfrac{x}{2i}\left(\exp[(1+i)x] - \exp[(1-i)x]\right)$.

Точки $\alpha_{1,2} = 1 \pm i$ є нулями функції $\eta(\nu)$ кратності 1. Знайдемо частковий розв'язок задачі (16) за формулою (15), враховуючи зауваження 1:

$$U(t,x) = \frac{1}{2i}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\nu^2(\exp[\nu^2 t + \nu x] - \exp[(1+i)^2 t + (1+i)x])}{\exp[2\pi\nu^2] - 1}\right\}\Bigg|_{\nu=1+i} - \right.$$

$$\left. - \left\{\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\nu^2(\exp[\nu^2 t + \nu x] - \exp[(1-i)^2 t + (1-i)x])}{\exp[2\pi\nu^2] - 1}\right\}\Bigg|_{\nu=1-i}\right] =$$

$$= \frac{\exp x}{8\pi}\left[\left(x^2 - 8\pi x + 8t^2 + (8 - 16\pi)t + 8xt\right)\cos(2t + x) + \right.$$

$$\left. + \left(x^2 + 3x - 8t^2 + (16\pi + 8)t\right)\sin(2t + x)\right]. \qquad ▲$$

Знайдемо тепер частковий розв'язок задачі (16) за теоремою 3. Маємо

$$\rho(t,x,\nu) = \frac{\exp[\nu^2 t + \nu x]}{\nu^3}\left[\left(2\nu^2(t - 2\pi) + \nu x + 2\right)\exp[2\pi\nu^2] - \right.$$

$$\left. - 2\nu^2 t - \nu x - 2\right],$$

$$\bar U(t,x)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{2[\eta(1+i)]^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^2\rho(t,x,\nu)\Big|_{\nu=1+i}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2[\eta(1-i)]^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^2\rho(t,x,\nu)\Big|_{\nu=1-i}\right]=$$

$$=\frac{\exp x}{8\pi}\left[\left(x^2-8\pi x+8t^2+(8-16\pi)t+\right.\right.$$

$$\left.+8xt+12\pi-32\pi^2+6\right)\cos(2t+x)+$$

$$\left.+\left(x^2+3x-8t^2+(16\pi+8)t+12\pi+32\pi^2-6\right)\sin(2t+x)\right].$$

Неважко переконатися, що ці два розв'язки відрізняються між собою на елемент ядра задачі (16):

$$\bar U(t,x)-U(t,x)=\frac{\exp x}{8\pi}\left[(12\pi-32\pi^2+6)\cos(2t+x)+\right.$$

$$\left.+(12\pi+32\pi^2-6)\sin(2t+x)\right].\qquad\blacktriangle$$

2.3. Випадок задачі з інтегральною умовою для рівняння зі зміщенням за просторовою змінною. Розглянемо задачу (1), (2), якщо $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\exp\left[c\frac{\partial}{\partial x}\right]$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тоді отримуємо таку задачу:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=U(t,x+c),\qquad t\in(0,T),\qquad x\in\mathbb{R}, \tag{17}$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Множина P для задачі (17), (18) має вигляд

$$P=\{\nu\in\mathbb{C}:\exp[T\exp[c\nu]]-1=0\}.$$

Відповідно до теореми 1 для $\varphi\in K_{\mathbb{C}\setminus P}$ розв'язок задачі (17), (18) існує, є єдиним у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$ і його можна знайти за формулою

$$U(t,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[t\exp[c\nu]+\nu(x+c)]}{\exp[T\exp[c\nu]]-1}\right\}\Big|_{\nu=0}. \tag{19}$$

Приклад 3. Знайти в області $\{(t,x):\ t\in(0,1),\ x\in\mathbb{R}\}$ розв'язок задачі для диференціально-функціонального рівняння:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-U(t,x+\pi)=0,\\&\int_0^1 U(t,x)\,dt=\sin x.\end{aligned} \tag{20}$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T=1$, $c=\pi$, $a(\nu)=\exp[\pi\nu]$, $\varphi(x)=\sin x$, $\eta(\nu)=\frac{\exp[\exp[\pi\nu]]-1}{\exp[\pi\nu]}$. Запишемо функцію $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x)=\sin x=\frac{1}{2i}\left(\exp[ix]-\exp[-ix]\right).$$

Точки $\alpha=\pm i$ не є нулями функції $\eta(\nu)$. Тоді за теоремою 1 існує єдиний розв'язок задачі (20) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus P}$. За формулою (19) маємо

$$U(t,x)=\frac{1}{2i}\left\{\frac{\exp[\exp[\pi\nu]t+\nu(x+\pi)]}{\exp[\exp[\pi\nu]]-1}\right\}\Bigg|_{\nu=i}-$$

$$-\frac{1}{2i}\left\{\frac{\exp[\exp[\pi\nu]t+\nu x+\pi)]}{\exp[\exp[\pi\nu]]-1}\right\}\Bigg|_{\nu=-i}=$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{\exp\left[\exp[\pi i]t+i(x+\pi)\right]}{\exp\left[\exp[\pi i]\right]-1}-$$

$$-\frac{1}{2i}\frac{\exp\left[\exp[-\pi i]t-i(x+\pi)\right]}{\exp\left[\exp[-\pi i]\right]-1}=\frac{\exp[1-t]\sin x}{e-1}. \qquad \blacktriangle$$

Зауважимо, що $0\notin P$. Тому в цьому випадку можна встановити інший клас однозначної розв'язності задачі (17), (18) у класі аналітичних функцій. Насамперед зауважимо, що дію виразу $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ з аналітичним символом $\varphi(\nu)$ на аналітичну функцію $\Phi(\nu)$ розуміємо так: якщо $\varphi(\nu)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}a_r\nu^r$, то

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Phi(t,x,\nu)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,\frac{\partial^r\Phi(t,x,\nu)}{\partial\nu^r}.$$

Позначимо через $A_{1,\sigma}$ клас цілих аналітичних функцій експоненційного типу, тип яких менший ніж σ.

Теорема 4. *Нехай* $\varphi\in A_{1,\sigma}$, *де*

$$0<\sigma\le\frac{1}{|c|}\sqrt{\ln^2\frac{2\pi}{T}+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Тоді у класі цілих аналітичних функцій $U(t,x)$ *таких, що для довільного* $t\in(0,T)$ *функція* $U(t,\cdot)\in A_{1,\sigma}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (17), (18), *який можна знайти за формулою* (19).

Д о в е д е н н я. Функція

$$\frac{\exp[t\exp[c\nu]+\nu(x+c)]}{\exp[T\exp[c\nu]]-1},$$

на яку діє диференціальний вираз $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ у формулі (19), є аналітичною в крузі

$$|\nu|\le\frac{1}{|c|}\sqrt{\ln^2\frac{2\pi}{T}+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Якщо $\varphi\in A_{1,\sigma}$, то результат дії $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на $\frac{\exp[t\exp[c\nu]+\nu(x+c)]}{\exp[T\exp[c\nu]]-1}$ буде знову аналітичною за ν в цьому ж крузі функцією. Після покладання параметра ν таким, що дорівнює нулеві, одержимо $U(t,x)$ − цілу аналітичну функцію, причому $U(t,\bullet)\in A_{1,\sigma}$ для довільного $t\in(0,T)$.

Єдиність розв'язку задачі у відповідному класі функцій випливає з того, що $A_{1,\sigma}\cap K_P=\{0\}$. Теорему доведено. $\Diamond$

3. Висновки. У смузі $t \in (0,T)$, $x \in \mathbb{R}$ для лінійного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовою координатою з інтегральною часовою умовою:

- встановлено клас квазіполіномів, у якому розв'язок задачі існує та є єдиним;
- у класі однозначної розв'язності задачі запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку задачі, причому для його побудови потрібні лише операції диференціювання;
- у класі існування неєдиного розв'язку задачі подано формули для побудови часткового розв'язку задачі;
- досліджено окремий випадок задачі для диференціального рівняння зі зміщенням за просторовою координатою;
- подано приклади застосування методу.

1. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885–902.
2. *Борок В. М., Кенне Э.* Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 3–12.
3. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
4. *Голубева Н. Д., Пулькина Л. С.* Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 3. – С. 456–458.
5. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12–19.
6. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.
7. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
8. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Когут І. В.* Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 5–11.
9. *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – **4**, № 6. – С. 1006–1024.
10. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2005. – **404**, № 5. – С. 589–592.
11. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–140.
12. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.
13. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 1. – С. 171–174.
14. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. РАН. – 2003. – **389**, № 4. – С. 465–467.
15. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.
16. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
17. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
18. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнения // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.

19. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. − 2003. − **67**, № 2. − С. 133−166.
20. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. − 1993. − **53**, вып. 6. − С. 122−129.
21. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. − 1990. − **42**, № 11. − С. 1546−1551.
22. *Bouziani A.* Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. − 2004. − **291**. − P. 371−386.
23. *Bouziani A., Benouar N.-E.* Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation // Kobe J. Math. − 1998. − **15**, № 1. − P. 47−58.
24. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. − 1963. − **21**. − P. 155−160.
25. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. − Lviv: VNTL Publ., 2003. − 238 p. − (Math. Studies: Monograph Ser. − Vol. 10.)

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Исследована задача с неоднородным интегральным условием для однородного уравнения в частных производных первого порядка по времени и вообще бесконечного порядка по пространственной переменной с постоянными коэффициентами. Доказаны существование и единственность решения задачи в классе квазиполиномов специального вида. Решение этой задачи построено с помощью дифференциально-символьного метода. В случае существования неединственного решения задачи предложены формулы для построения частного решения задачи.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER IN TIME

We investigate the problem with inhomogeneous integral condition for homogeneous partial differential equation of the first order in time and in general infinite order in spatial variable with constant coefficients. We prove the existence and uniqueness of solution of the problem in the class of quasi-polynomials of a special form. We construct the solution of this problem by means of the differential-symbol method. For the case of existence of non-unique solution of the problem, we propose formulas for constructing a partial solution of the problem.

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,

[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща

Одержано
03.09.10