УДК 519.46

В. М. Федорчук[1,2], В. І. Федорчук[2]

ІНВАРІАНТНІ ОПЕРАТОРИ ЧОТИРИВИМІРНИХ НЕСПРЯЖЕНИХ ПІДАЛГЕБР АЛГЕБРИ ЛІ ГРУПИ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Проведено класифікацію чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ у класи ізоморфних підалгебр. З використанням цієї класифікації побудовано інваріантні оператори (узагальнені оператори Казіміра) [30] для всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ і наведено їх у явному вигляді.

На сьогодні опубліковано багато наукових праць, в яких вивчаються методи побудови інваріантних операторів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі, їхні властивості, а також різні застосування цих операторів у теорії зображень груп Лі (їх алгебр Лі), у теорії спеціальних функцій, в теоретичній і математичній фізиці, теорії диференціальних рівнянь. З деталями стосовно цих питань можна ознайомитись у [13, 15–22, 25–27, 29–38] (див. також цитовану там літературу).

Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Вона використовується при розгляді різних задач теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [1, 11, 14]). У роботах [11, 13, 24, 25], зокрема, побудовано інваріантні оператори для алгебри Лі групи $P(1,4)$. У цих роботах побудовані інваріантні оператори застосовано для класифікації зображень алгебри Лі групи $P(1,4)$, а також для побудови $P(1,4)$-інваріантних диференціальних рівнянь. Вивченню підгрупової структури групи $P(1,4)$ присвячено роботи [4, 5, 8, 10, 23]. У працях [6, 7] побудовано інваріантні оператори для деяких неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Опис інваріантних операторів восьмивимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ можна знайти в [28]. Інваріантні оператори для всіх неспряжених підалгебр розмірності ≤ 3 алгебри Лі групи $P(1,4)$ побудовано в [9].

Метою роботи є побудова інваріантних операторів для всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Для цього

– беручи до уваги повну класифікацію дійсних структур алгебр Лі розмірності ≤ 5, отриману Г. М. Мубаракзяновим [2, 3], проведемо класифікацію всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ у класи ізоморфних підалгебр;

– використаємо побудовані в [30] інваріантні оператори для всіх дійсних алгебр Лі розмірності ≤ 5 для знаходження інваріантних операторів для всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

При написанні цієї роботи використано повний список неспряжених (з точністю до $P(1,4)$-спряженості) підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, який можна знайти в [12].

На даний час побудовано інваріантні оператори (узагальнені оператори Казіміра) для всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Для представлення отриманих результатів потрібно розглянути алгебру Лі групи $P(1,4)$.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$**.** Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, $\mu,\nu = 0,1,\ldots,4$, і P'_μ, $\mu = 0,1,\ldots,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0,$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu,$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,\ldots,4$, − метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$. Перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}, \qquad L_1 = M'_{32}, \qquad L_2 = -M'_{31}, \qquad L_3 = M'_{21},$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \qquad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \qquad a = 1,2,3,$$

$$X_0 = \frac{P'_0 - P'_4}{2}, \qquad X_k = P'_k, \qquad k = 1,2,3, \qquad X_4 = \frac{P'_0 + P'_4}{2}.$$

2. Інваріантні оператори чотиривимірних розкладних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$**.** У цій роботі символ $A^a_{r,j}$ позначатиме j-ту алгебру Лі розмірності r; a − неперервний параметр, від якого залежить алгебра.

Надалі при заданні конкретної алгебри Лі виписуватимемо тільки відмінні від нуля комутаційні співвідношення [3, 30].

Наведемо отримані результати для чотиривимірних розкладних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $4A_1$.

Нижче виписуємо неспряжені підалгебри типу $4A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle P_1, P_2, P_3, X_4\rangle, \quad \langle P_1, P_2, X_3, X_4\rangle, \quad \langle P_3, X_1, X_2, X_4\rangle, \quad \langle G, X_1, X_2, X_3\rangle,$$

$$\langle L_3, X_0, X_3, X_4\rangle, \quad \langle X_0 + X_4, X_1, X_2, X_0 - X_4\rangle, \quad \langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle,$$

$$\langle X_1, X_2, X_3, X_0 - X_4\rangle, \quad \langle P_3 + X_0, X_1, X_2, X_4\rangle, \quad \langle P_1, P_2 + X_2, X_3, X_4\rangle,$$

$$\langle P_1, P_2 + X_2, P_3 + \gamma X_3, X_4, \gamma > 0\rangle.$$

Оскільки алгебри Лі типу $4A_1$ є абелевими, то інваріантними операторами для них будуть їхні базисні елементи.

Алгебри Лі типу $A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$:

$$[e_1, e_2] = e_2.$$

Нижче виписуємо неспряжені підалгебри типу $A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3\rangle \oplus \langle X_3\rangle, \quad \langle -G, P_3\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_1\rangle,$$

$$\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_1\rangle, \quad \langle -G - a_3X_3, X_4, a_3 < 0\rangle \oplus \langle X_2\rangle \oplus \langle X_1\rangle.$$

Відомо, що інваріантними операторами для алгебр Лі типу $A_2 \oplus A_1$ є інваріантні оператори підалгебр A_2 і A_1 (див., наприклад, [30]). Алгебри Лі типу A_2 не мають інваріантних операторів [30, 31]. Кожна алгебра Лі типу A_1 має один інваріантний оператор, яким є її базисний елемент. Тому інваріантними операторами для алгебр Лі типу $A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$ будуть базисні елементи підалгебр A_1 і A_1.

Алгебри Лі типу $A_{3,1} \oplus A_1$:

$[e_2, e_3] = e_1$.

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,1} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle -2X_4, X_1, P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle$	X_4, P_2
$\langle 2X_4, P_1, X_1 + bX_3, b > 0 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle$	X_4, P_2
$\langle 2X_4, P_3, X_3 \rangle \oplus \langle L_3 \rangle$	X_4, L_3
$\langle 2X_4, P_3, X_3 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle$	X_4, X_1
$\langle 2bX_4, P_3, X_1 + bX_3, b > 0 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle$	X_4, X_2
$\langle 2X_4, P_3 + X_0, X_3 \rangle \oplus \langle L_3 \rangle$	X_4, L_3
$\langle 2X_4, P_3 + X_0, X_3 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle$	X_4, X_1
$\langle -2X_4, X_3, P_3 + X_2 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle$	X_4, X_1
$\langle 2bX_4, P_3 + X_0, X_1 + bX_3, b > 0 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle$	X_4, X_2
$\langle 2X_4, P_2 - X_1 + \beta X_2, P_1 + X_2, b > 0 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle$	X_4, X_3
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle$	X_4, X_3
$\langle -2X_4, X_1, P_1 + \delta X_3, \delta > 0 \rangle \oplus \langle P_2 + X_3 \rangle$	$X_4, P_2 + X_3$
$\langle -2X_4, X_1, P_1 \rangle \oplus \langle P_2 + X_3 \rangle$	$X_4, P_2 + X_3$
$\langle -2X_4, X_1, P_1 + X_3 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle$	X_4, P_2
$\langle 2X_4, P_1 + X_3, X_1 + \mu X_3, \mu > 0 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle$	X_4, P_2
$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \beta X_3, P_2 - X_1, \beta > 0 \rangle \oplus$ $\oplus \langle P_3 + \beta X_1 + \delta X_3, \beta > 0 \rangle$	$X_4, P_3 + \beta X_1 +$ $+ \delta X_3, \beta > 0$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 \rangle \oplus \langle P_3 + \delta X_3 \rangle$	$X_4, P_3 + \delta X_3$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \beta X_3, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \gamma X_3, \mu > 0 \rangle \oplus$ $\oplus \langle P_3 + \beta X_1 + \gamma X_2 + \delta X_3, \beta > 0 \rangle$	$X_4, P_3 + \beta X_1 +$ $+ \gamma X_2 + \delta X_3, \beta > 0$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \gamma X_3, \gamma > 0 \rangle \oplus$ $\oplus \langle P_3 + \gamma X_2 + \delta X_3, \gamma > 0 \rangle$	$X_4, P_3 + \gamma X_2 +$ $+ \delta X_3, \gamma > 0$
$\langle 4X_4, P_2 - X_1 + \mu X_2, P_1 + X_2 \rangle \oplus \langle P_3 + \delta X_3 \rangle$	$X_4, P_3 + \delta X_3$
$\langle 2X_4, P_2, P_1 + X_2 \rangle \oplus \langle P_2 + X_1 \rangle$	$X_4, P_2 + X_1$
$\langle 2X_4, P_2, P_1 + X_2 + \beta X_3, \beta > 0 \rangle \oplus \langle P_2 + X_1 \rangle$	$X_4, P_2 + X_1$
$\langle 2X_4, P_2, P_1 + X_2 + \gamma X_3 \rangle \oplus \langle P_2 + X_1 + \mu X_3, \mu > 0 \rangle$	$X_4, P_2 + X_1 +$ $+ \mu X_3, \mu > 0$
$\langle 2\gamma X_4, P_2 + X_3, P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3, \gamma > 0 \rangle \oplus$ $\oplus \langle P_2 + X_3 + \gamma X_1, \gamma > 0 \rangle$	$X_4, P_2 + X_3 +$ $+ \gamma X_1, \gamma > 0$
$\langle 2\gamma X_4, P_2 + X_3, P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3, \gamma \neq 0 \rangle \oplus$ $\oplus \langle P_2 + X_3 + \gamma(X_1 + \mu X_3), \mu > 0 \rangle$	$X_4, P_2 + X_3 + \gamma(X_1 +$ $+ \mu X_3), \mu > 0$

Алгебри Лі типу $A_{3,2} \oplus A_1$:

$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_1 + e_2$.

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,2} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ і їхні інваріантні оператори наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_3X_3, a_3 < 0\rangle \oplus \langle L_3\rangle$	$X_4 \exp\left(\frac{-P_3}{2a_3X_4}\right), L_3, a_3 < 0$
$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_2X_2 + a_3X_3, a_2 < 0, a_3 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	$X_4 \exp\left(\frac{-P_3}{2a_3X_4}\right), X_1, a_3 < 0$
$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_3X_3, a_3 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	$X_4 \exp\left(\frac{-P_3}{2a_3X_4}\right), X_1, a_3 < 0$

Алгебри Лі типу $A_{3,3} \oplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,3} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_3, X_4, G\rangle \oplus \langle L_3\rangle$	$\frac{X_4}{P_3}, L_3$
$\langle P_1, P_2, G\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$\frac{P_2}{P_1}, X_3$
$\langle P_3, X_4, G\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	$\frac{X_4}{P_3}, X_1$
$\langle P_3, X_4, G + a_2X_2, a_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	$\frac{X_4}{P_3}, X_1$

Алгебри Лі типу $A_{3,4} \oplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,4} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 4.

Таблиця 4

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle X_0, X_4, -G\rangle \oplus \langle L_3\rangle$	X_0X_4, L_3
$\langle X_0, X_4, -G\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	X_0X_4, X_1
$\left\langle X_0, X_4, -\frac{1}{e}L_3 - G, e > 0\right\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	X_0X_4, X_3
$\langle X_0, X_4, -G - aX_3, a < 0\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3, d < 0\rangle$	$X_0X_4, L_3 + dX_3, d < 0$
$\langle X_0, X_4, -G - aX_3, a < 0\rangle \oplus \langle L_3\rangle$	X_0X_4, L_3
$\langle X_0, X_4, -G\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3, d < 0\rangle$	$X_0X_4, L_3 + dX_3, d < 0$
$\langle X_0, X_4, -G + \tilde{a}_2X_2, \tilde{a}_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	X_0X_4, X_1

Алгебри Лі типу $A_{3,6} \oplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = -e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,6} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 5.

Таблиця 5

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_1, P_2, L_3\rangle \oplus \langle P_3\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ P_3$
$\langle P_1, -P_2, -L_3\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ X_3$
$\langle P_1, P_2, L_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ X_4$
$\langle P_1, -P_2, -L_3 + P_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle P_3\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ P_3$
$\langle X_1, -X_2, -L_3\rangle \oplus \langle G\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ G$
$\langle X_1, X_2, L_3 - P_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3 + eG, e > 0\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_3$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle P_3 + C_3\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ P_3 + C_3$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 + X_4$
$\langle X_1, -X_2, -L_3\rangle \oplus \langle X_0 - X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 - X_4$
$\left\langle X_1, -X_2, -\frac{1}{2}(P_3 + C_3) - L_3\right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 + X_4$
$\left\langle X_1, X_2, \frac{1}{e}(P_3 + C_3) + L_3, e > 2\right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 + X_4$
$\langle P_1, -P_2, -L_3 + X_4\rangle \oplus \langle P_3 + \tilde{h}_3 X_3, \tilde{h}_3 > 0\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ P_3 + \tilde{h}_3 X_3,\ \tilde{h}_3 > 0$
$\langle P_1, P_2, L_3 - X_4\rangle \oplus \langle P_3\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ P_3$
$\langle P_1, -P_2, -L_3\rangle \oplus \langle P_3 + X_3\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ P_3 + X_3$
$\langle P_1, P_2, L_3 - X_4\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ X_3$
$\langle P_1, -P_2, -L_3 - d_3 X_3, d_3 < 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$P_1^2 + P_2^2,\ X_4$
$\langle P_1 + æX_1, -P_2 - æX_2, -L_3 + P_3, æ > 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$(P_1 + æX_1)^2 + (P_2 + æX_2)^2,$ $X_4,\ æ > 0$
$\langle X_1, -X_2, -L_3 + X_4\rangle \oplus \langle P_3 + hX_0, h > 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ P_3 + hX_0,\ h > 0$
$\langle X_1, -X_2, -L_3 + X_4\rangle \oplus \langle P_3\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ P_3$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle P_3 + X_0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ P_3 + X_0$
$\langle X_1, X_2, L_3 + dX_3, d < 0\rangle \oplus \langle G + aX_3, a < 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ G + aX_3,\ a < 0$
$\langle X_1, -X_2, -L_3\rangle \oplus \langle G + aX_3, a < 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ G + aX_3,\ a < 0$
$\langle X_1, -X_2, -L_3 - dX_3, d < 0\rangle \oplus \langle G\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ G$
$\langle X_1, -X_2, -L_3 + P_3 - \alpha_0 X_0, \alpha_0 < 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3 - X_4\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_3$
$\langle X_1, X_2, L_3 + d_3 X_3, d_3 < 0\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 + X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3 + d_3 X_3, d_3 < 0\rangle \oplus \langle X_0 - X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 - X_4$
$\langle X_1, -X_2, -L_3 - dX_4, d < 0\rangle \oplus \langle X_0 - X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_0 - X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_4$

$\langle X_1, -X_2, -L_3 - \alpha X_3, \alpha < 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$X_1^2 + X_2^2,\ X_4$
$\langle X_1, X_2, L_3\rangle \oplus \langle P_3 + C_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2, P_3 + C_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ \alpha < 0$
$\langle X_1, X_2, L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0\rangle \oplus \langle P_3 + C_3 + \beta(X_0 + X_4), \beta < 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2, P_3 + C_3 + \beta(X_0 + X_4),\ \beta < 0$
$\left\langle -X_3, X_0 - X_4, \frac{1}{2}(P_3 + C_3 + eL_3), e > 2\right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$X_3^2 + (X_0 - X_4)^2, X_0 + X_4$

Алгебри Лі типу $A_{3,7}^a \oplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1 + ae_2, \qquad a > 0.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,7}^a \oplus A_1$ ($a = c$) алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 6.

Таблиця 6

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_1, P_2, L_3 + cG, c > 0\rangle \oplus \langle X_3\rangle$	$(P_1^2 + P_2^2)\left(\frac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ic}, X_3, c > 0$

Алгебри Лі типу $A_{3,8} \oplus A_1$:

$$[e_1, e_3] = -2e_2, \qquad [e_1, e_2] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_3.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,8} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 7.

Таблиця 7

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle -P_3, G, C_3\rangle \oplus \langle L_3\rangle$	$2G^2 - P_3C_3 - C_3P_3,\ L_3$
$\langle -P_3, G, C_3\rangle \oplus \langle X_1\rangle$	$2G^2 - P_3C_3 - C_3P_3, X_1$

Алгебри Лі типу $A_{3,9} \oplus A_1$:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,9} \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 8.

Таблиця 8

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle -L_3, L_1, -L_2\rangle \oplus \langle G\rangle$	$L_3^2 + L_1^2 + L_2^2,\ G$
$\langle L_3, L_1, L_2\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$L_3^2 + L_1^2 + L_2^2,\ X_0 + X_4$
$\langle L_3, L_1, L_2\rangle \oplus \langle X_0 - X_4\rangle$	$L_3^2 + L_1^2 + L_2^2,\ X_0 - X_4$
$\langle L_3, L_1, L_2\rangle \oplus \langle X_4\rangle$	$L_3^2 + L_1^2 + L_2^2,\ X_4$
$\left\langle \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3), \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1), \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2)\right\rangle \oplus \left\langle L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right\rangle$	$\left[L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right]^2 + \left[L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\right]^2 + \left[L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\right]^2, L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3)$
$\left\langle \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3), \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1), \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2)\right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4\rangle$	$\left[L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right]^2 + \left[L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\right]^2 + \left[L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\right]^2, X_0 + X_4$

$\left\langle \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3), \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1), \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2) \right\rangle \oplus \left\langle L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + b(X_0 + X_4), b < 0 \right\rangle$	$\left[L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right]^2 + \left[L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\right]^2 + \left[L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\right]^2$, $L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + b(X_0 + X_4)$, $b < 0$

3. Інваріантні оператори чотиривимірних нерозкладних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$. Наведемо отримані результати для чотиривимірних нерозкладних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $A_{4,1}$:

$$[e_2, e_4] = e_1, \qquad [e_3, e_4] = e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,1}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 9.

Таблиця 9

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle 2X_4, -X_3, X_0, P_3 \rangle$	X_4, $X_3^2 - 4X_4X_0$
$\langle 2X_4, X_3, X_0, L_3 - P_3 \rangle$	X_4, $X_3^2 - 4X_4X_0$
$\langle -2X_4, X_3, L_3 - X_0, P_3 \rangle$	X_4, $X_3^2 + 4X_4(L_3 - X_0)$
$\langle 2X_4, -X_3, X_0, P_3 + X_1 \rangle$	X_4, $X_3^2 - 4X_4X_0$
$\langle 2\beta X_4, -\beta X_3, L_3 + \beta X_0, P_3 + X_0, \beta < 0 \rangle$	X_4, $\beta X_3^2 - 4X_4(L_3 + \beta X_0)$, $\beta < 0$
$\langle 2X_4, -X_1, P_2 + X_0, P_1 + \delta X_3, \delta < 0 \rangle$	X_4, $X_1^2 - 4X_4(P_2 + X_0)$
$\langle 2X_4, -X_1, P_2 + X_0, P_1 \rangle$	X_4, $X_1^2 - 4X_4(P_2 + X_0)$
$\langle 2X_4, -X_1 + 2\gamma X_4, P_2 + X_0, P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3, \gamma > 0 \rangle$	X_4, $(X_1 - 2\gamma X_4)^2 - 4X_4(P_2 + X_0)$, $\gamma > 0$

Алгебри Лі типу $A_{4,2}^a$:

$$[e_1, e_4] = ae_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \qquad a \neq 0.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,2}^a$, $a = 1$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 10.

Таблиця 10

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_2, 2a_1X_4, P_1, G + a_1X_1 + a_3X_3, a_1 < 0, a_3 < 0 \rangle$	$X_4 \exp\left(-\frac{P_1}{2a_1X_4}\right), \frac{X_4}{P_2}, a_1 < 0$
$\langle P_2, 2a_1X_4, P_1, G + a_1X_1, a_1 < 0 \rangle$	$X_4 \exp\left(-\frac{P_1}{2a_1X_4}\right), \frac{X_4}{P_2}, a_1 < 0$

Алгебри Лі типу $A_{4,5}^{ab}$:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = ae_2, \quad [e_3, e_4] = be_3, \qquad ab \neq 0, \ -1 \leq a \leq b \leq 1.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,5}^{ab}$, $a = 1$, $b = 1$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 11.

Таблиця 11

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_1, P_2, P_3, G\rangle$	$\frac{P_1}{P_2}, \frac{P_1}{P_3}$
$\langle P_1, P_2, X_4, G\rangle$	$\frac{P_1}{P_2}, \frac{P_1}{X_4}$
$\langle P_1, P_2, X_4, G + a_3X_3, a_3 < 0\rangle$	$\frac{P_1}{P_2}, \frac{P_1}{X_4}$

Алгебри Лі типу $A_{4,6}^{ab}$:

$$[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3, \quad a \neq 0,\ b \geq 0.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,6}^{ab}$, $a = b$, $b = b$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 12.

Таблиця 12

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_3, P_1, P_2, L_3 + bG, b > 0\rangle$	$\frac{P_3^2}{P_1^2 + P_2^2}, (P_1^2 + P_2^2)\left(\frac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ib}, b > 0$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,6}^{ab}$, $a = c$, $b = c$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 13.

Таблиця 13

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle X_4, P_1, P_2, L_3 + cG, c > 0\rangle$	$\frac{X_4^2}{P_1^2 + P_2^2}, (P_1^2 + P_2^2)\left(\frac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ic}, c > 0$
$\langle X_4, P_1, P_2, L_3 + cG + bX_3, c > 0, b < 0\rangle$	$\frac{X_4^2}{P_1^2 + P_2^2}, (P_1^2 + P_2^2)\left(\frac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ic}, c > 0$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,6}^{ab}$, $a = d$, $b = 0$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 14.

Таблиця 14

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle P_3, X_1, X_2, L_3 + dG, d > 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2, \ln P_3 + d \arcsin \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, d > 0$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,6}^{ab}$, $a = e$, $b = 0$, алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 15.

Таблиця 15

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle X_4, X_1, X_2, L_3 + eG, e > 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2, \ln X_4 + e \arcsin \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, e > 0$
$\langle X_4, X_1, X_2, L_3 + eG + æ_3X_3, e > 0, æ_3 < 0\rangle$	$X_1^2 + X_2^2, \ln X_4 + e \arcsin \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, e > 0$

Алгебри Лі типу $A_{4,9}^{b}$:

$$[e_2, e_3] = e_1, \ [e_1, e_4] = (1 + b)e_1, \ [e_2, e_4] = e_2, \ [e_3, e_4] = be_3, \ -1 < b \leq 1.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,9}^b$, $b = 0$, алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle 2eX_4, P_3, X_1 + bX_3, G, b > 0\rangle, \qquad \left\langle 2X_4, P_3, X_3, G + \frac{1}{d}L_3, d > 0\right\rangle,$$

$$\langle 2d_3X_4, P_3, L_3 + d_3X_3, G, d_3 < 0\rangle, \qquad \langle 2X_4, P_3, X_3, G + aX_1, a < 0\rangle,$$

$$\langle 2bX_4, P_3, X_1 + bX_3, G + a_1X_1, a_1 < 0, b > 0\rangle,$$

$$\langle 2X_4, P_3, X_3, G + X_4\rangle, \qquad \langle 2\mu X_4, P_3, X_1 + \mu X_3, G + \alpha X_2, \alpha < 0, \mu > 0\rangle,$$

$$\langle 2\mu X_4, P_3, X_1 + \mu X_3, G + \alpha X_1 + \beta X_2, \alpha < 0, \beta < 0, \mu > 0\rangle,$$

$$\left\langle 2d_3X_4, P_3, L_3 + d_3X_3, G - \frac{a_3}{d_3}L_3 + X_4, a_3 < 0, d_3 < 0\right\rangle.$$

Ці підалгебри не мають інваріантних операторів.

Алгебри Лі типу $A_{4,10}$:

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_4] = -e_3, \qquad [e_3, e_4] = e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,10}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їхні інваріантні оператори наведено в табл. 16.

Таблиця 16

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1, L_3 + d_3X_3, d_3 < 0\rangle$	$X_4, (P_1 + X_2)^2 + (P_2 - X_1)^2 - 8X_4(L_3 + d_3X_3), d_3 < 0$
$\langle 4X_4, -P_1 - X_2, P_2 - X_1, -L_3\rangle$	$X_4, (P_1 + X_2)^2 + (P_2 - X_1)^2 - 8X_4L_3$
$\langle -4mX_4, P_1 + kX_1 + mX_2, P_2 - mX_1 + kX_2, L_3 - P_3, m > 0, k > 0\rangle$	$X_4, (P_1 + kX_1 + mX_2)^2 + (P_2 - mX_1 + kX_2)^2 - 8mX_4(L_3 - P_3), m > 0, k > 0$
$\langle -4mX_4, P_1 + mX_2, P_2 - mX_1, L_3 - P_3, m > 0\rangle$	$X_4, (P_1 + mX_2)^2 + (P_2 - mX_1)^2 - 8mX_4(L_3 - P_3), m > 0$

Алгебри Лі типу $A_{4,12}$:

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2, \qquad [e_1, e_4] = -e_2, \qquad [e_2, e_4] = e_1.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{4,12}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle P_2, P_1, G, -L_3\rangle, \qquad \langle P_2, P_1, G + a_3X_3, -L_3 - d_3X_3, a_3 < 0, d_3 < 0\rangle,$$

$$\langle P_2, P_1, G + a_3X_3, -L_3, a_3 < 0\rangle, \qquad \langle -P_2, P_1, G, L_3 + d_3X_3, d_3 < 0\rangle.$$

Ці підалгебри не мають інваріантних операторів.

Отже, побудовано інваріантні оператори для всіх чотиривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

1. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
2. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 3(34). – С. 99–106.
3. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 1(32). – С. 114–123.

4. *Федорчук В. М.* Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – Киев, 1978. – 36 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78.18).
5. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Nonsplit subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group P(1, 4) // Ukr. Math. J. – 1981. – **33**, No. 5. – P. 535–538.
6. *Федорчук В. М.* Об инвариантных операторах нерасщепимых подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Теорет.-алгебр. анализ уравнений мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 98–100.
7. *Федорчук В. М.* Об инвариантных операторах расщепимых подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Симметрия и решения уравнений мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 90–92.
8. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Splitting subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group P(1, 4) // Ukr. Math. J. – 1979. – **31**, No. 6. – P. 554–558.
9. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про інваріантні оператори низьковимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 1. – С. 16–23.
10. *Федорчук В. М., Фущич В. И.* О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. Междунар. семинара (Звенигород, 1979). – Москва: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.
11. *Фущич В. И.* Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, № 3. – С. 360–382.
12. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
13. *Фущич В. И., Кривский И. Ю.* О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского. – Киев, 1968. – 38 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ТФ-68-72.)
14. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
15. *Abellanas L., Alonso L. M.* A general setting for Casimir invariants // J. Math. Phys. – 1975. – **16**. – P. 1580–1584.
16. *Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R., Garcia Vergnolle L.* Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – **39**, No. 6. – P. 1339–1355.
17. *Beltrametti E. G., Blasi A.* On the number of Casimir operators associated with any Lie group // Phys. Lett. – 1966. – **20**. – P. 62–64.
18. *Boyko V., Patera J., Popovych R.* Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements // Linear Algebra Appl. – 2008. – **428,** No. 4. – P. 834–854.
19. *Campoamor-Stursberg R.* Structural data and invariants on nine dimensional Lie algebras with nontrivial Levi decomposition. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 2009. – 108 p.
20. *Campoamor-Stursberg R., Low S. G.* Virtual copies of semisimple Lie algebras in enveloping algebras of semidirect products and Casimir operators // J. Phys. A: Math. and Theoret. – 2009. – **42**, No. 6. – 065295, 18 p.
21. *Casimir H. B. G.* Über die Konstruktion einer zu den irreduzibelen Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen gehörigen Differentialgleichung // Proc. Royal Acad. Amsterdam. – 1931. – **34**. – P. 844–846.
22. *Echarte R. F. J., Núñez V. J., Ramíres L. F.* Relations among invariants of complex filiform Lie algebras // Appl. Math. Comput. – 2004. – **147**, No. 2. – P. 365–376.
23. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 14. – P. 2893–2899.
24. *Fushchych W. I., Krivsky I. Yu.* On a possible approach to the variable-mass problem // Nuclear Physics B. – 1968. – **7**. – P. 79–82.

25. *Fushchych W. I., Krivsky I. Yu.* On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space // Nuclear Physics B. – 1969. – **14**. – P. 573–585.
26. *Kalnins E. G., Thomova Z., Winternitz P.* Subgroup type coordinates and the separation of variables in Hamilton – Jacobi and Schroedinger equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 2005. – **12,** No. 2. – P. 178–208.
27. *Lemke J., Ne'eman Y., Pecina-Cruz J.* Wigner analysis and Casimir operators of $\overline{S}\overline{A}(4,R)$ // J. Math. Phys. – 1992. – **33**. – P. 2656–2659.
28. *Leveille M.* Casimir invariants for the eight-dimensional subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 11. – P. 3331–3333.
29. *Ndogmo J. C.* Invariants of a semi-direct sum of Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 5635–5647.
30. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. – 1976. – **17**, No. 6. – P. 986–994.
31. *Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**, No. 6. – P. 977–985.
32. *Pauri M., Prosperi G. M.* On the construction of the invariants operators for any finite-parameter Lie group // Nuovo Cimento. A. – 1966. – **43**. – P. 533–537.
33. *Pecina-Cruz J. N.* On the Casimir of the group $ISL(n,R)$ and its algebraic decomposition // J. Math. Phys. – 2005. – **46,** No. 6. – 063503, 5 p.
34. *Perroud M.* The fundamental invariants of inhogomogeneous classical groups // J. Math. Phys. – 1983. – **24**. – P. 1381–1391.
35. *Šnobl L., Winternitz P.* A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants // J. Phys. A: Math. Gen. – 2005. – **38**. – P. 2687–2700.
36. *The Casimir effect 50 years later*: Proc. 4th Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions held at the University of Leipzig (Leipzig, Sept. 14–18, 1998) / Edited by M. Bordag. – River Edge: World Sci. Publ. Co., 1999. – 397 p.
37. *Tremblay S., Winternitz P.* Invariants of the nilpotent and solvable triangular Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2001. – **34**. – P. 9085–9099.
38. *Zassenhaus H.* On the invariants of Lie group. I: Computers in nonassociative rings and algebras // Special Session: 82nd Annual Meeting Amer. Math. Soc. (San Ontario, 1976) / Eds R. E. Beck and B. Kolman. – New York: Acad. Press. – P. 139–155.

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ НЕСОПРЯЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Проведена классификация четырехмерных несопряженных подалгебр алгебры Ли группы Пуанкаре $P(1,4)$ в классы изоморфных подалгебр. С использованием этой классификации построены инвариантные операторы (*обобщенные операторы Казимира*) [30] *для всех четырехмерных несопряженных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ и приведены в явном виде.*

INVARIANT OPERATORS FOR FOUR-DIMENSIONAL NON-CONJUGATED SUBALGEBRAS OF LIE ALGEBRA OF POINCARÉ GROUP $P(1,4)$

The classification of four-dimensional non-conjugated subalgebras of Lie algebra of Poincaré group $P(1,4)$ into the classes of isomorphic subalgebras has been made. Using this classification the invariant operators (*the generalized Casimir operators*) [30] *for all four-dimensional non-conjugated subalgebras of Lie algebra of group $P(1,4)$ have been constructed and presented in an explicit form.*

[1] Ін-т математики, Педаг. ун-т ім. Комісії Нар. Освіти, Краків, Польща,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 11.02.10