УДК 519.6

В. М. Білецький

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Описано метод узагальненого відокремлення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь та його модифікацію, що мінімізує відхилення наближеного розв'язку від точного. Доведено збіжність модифікованого методу. Наведено порівняння методів на основі числових результатів.

Вступ. Узагальнене відокремлення змінних застосовують для розв'язування багатовимірних задач у випадку, коли точне відокремлення виконати не вдається. Варіаційно-ітераційний метод узагальненого відокремлення змінних використовують для розв'язання багатовимірних інтегральних рівнянь [2, 3, 6]. Наближений розв'язок у такому випадку знаходять у вигляді суми, кожен доданок якого є добутком функцій однієї змінної. Доданки знаходять згідно з умовою мінімуму відповідного функціонала. Схожий підхід використовують для наближення функцій декількох змінних [5, 11] і для розв'язання нелінійних обернених задач [7, 8, 13].

У [17] метод узагальненого відокремлення змінних застосовано до розв'язування двовимірних нелінійних рівнянь, які виникають в задачах фазової оптимізації електромагнітних полів. Схожі проблеми, що стосуються відокремлення змінних і зведення багатовимірних задач до ряду одновимірних, розглянуто в [15, 16, 18–22].

Розв'язуючи багатовимірні інтегральні рівняння чисельними методами, часто стикаємося з проблемою складності обчислень. Вже у дво- та тривимірному просторах необхідно значно зменшувати кількість вузлів розбиття по кожному з вимірів, а при збільшенні кількості вимірів ця проблема стає критичною. Метод узагальненого відокремлення змінних дозволяє звести розв'язання багатовимірної задачі до ряду одновимірних задач і таким чином обійти згадану проблему.

Традиційно для відшукання наближеного розв'язку мінімізують квадрат нев'язки рівняння. Однак використання такого функціонала не гарантує монотонність збіжності наближеного розв'язку до точного. У [6] запропоновано мінімізувати квадрат відхилення наближеного розв'язку від точного.

У цій статті на прикладі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду описано алгоритм методу і його модифікація. Також доведено теорему збіжності для модифікації методу та наведено порівняння методів на основі числових результатів.

1. Схема методу. Коротко опишемо схему методу узагальненого відокремлення змінних для багатовимірного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$Au \equiv \int\limits_D \mathcal{K}(x,y)u(x)\,dx - \lambda u(y) = f(y)\,, \tag{1}$$

де $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_N,b_N]$ – обмежена прямокутна область в $\mathbb{R}^N$; $x = (x_1,\ldots,x_N)$, $y = (y_1,\ldots,y_N)$; u, $f \in L_2(D)$; $\mathcal{K} \in L_2(D\times D)$; параметр λ не належить до спектра ядра $\mathcal{K}$.

Як відомо, згідно з альтернативою Фредгольма [10] для довільної правої частини $f \in L_2(D)$ рівняння (1) існує єдиний розв'язок, який будемо шукати у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(x), \qquad u^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^{N} u_j^{(k)}(x_j)\,. \tag{2}$$

Введемо позначення

$$f_0 = f, \qquad f_{k+1} = f_k - Au^{(k)}. \tag{3}$$

Кожен доданок в ряді (2) вибираємо згідно з умовою мінімуму квадрата норми нев'язки

$$J_k(u) = \|f_k - Au\|^2 = \int_D |f_k(x) - (Au)(x)|^2\, dx \to \min. \tag{4}$$

У просторі $L_2(D)$

$$J_k(u) = (f_k, f_k) - 2\,\mathrm{Re}\,(f_k, Au) + (Au, Au).$$

З необхідних умов мінімуму функціонала (4) отримуємо систему N одновимірних рівнянь Ейлера для функцій $u_j^{(k)}(x_j)$:

$$\int_{D_j} \frac{\overline{u}^{(k)}(x)}{\overline{u}_j^{(k)}(x_j)} A^*(A(u^{(k)}) - f_k)(x)\, d\hat{x}_j = 0, \qquad j = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

Тут риска над символом функції означає комплексне спряження, A^* – оператор, спряжений до A:

$$A^* v \equiv \int_D \overline{\mathcal{K}}(x,y) v(y)\, dy - \overline{\lambda} v(x),$$

D_j – перетин області D з гіперплощиною $x_j = \mathrm{const}$, а $d\hat{x}_j$ – елемент об'єму в області D_j.

Кожне з рівнянь такої системи є лінійним відносно однієї з функцій $u_j^{(k)}(x_j)$, а отже, його можна розглядати окремо як умову мінімуму функціонала J_k за функцією $u_j^{(k)}(x_j)$ при фіксованих інших співмножниках $u^{(k)}(x_j)$. Таким чином, циклічно-послідовне розв'язування таких рівнянь відносно $u_j^{(k)}(x_j)$, $j = 1,\ldots,N$, еквівалентне покомпонентній мінімізації J_k. Зауважимо, що J_k можна мінімізувати іншим чином, наприклад, будь-яким ґрадієнтним методом.

У [14] доведено збіжність методу, тобто послідовність наближених розв'язків збігається до точного. Однак застосована обчислювальна схема не гарантує монотонності цієї збіжності, оскільки на кожному кроці обчислювальної процедури мінімізується нев'язка рівняння, а не відхилення наближеного розв'язку від точного. Згідно із запропонованою в [6] модифікацією методу доданки в ряді вибираємо так, щоб мінімізувати саме норму різниці точного та наближеного розв'язків. Схема модифікації методу передбачає побудову наближеного розв'язку у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A^* u^{(k)})(x), \qquad u^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^{N} u_j^{(k)}(x_j). \tag{6}$$

Тоді

$$f_0 = f, \qquad f_{k+1} = f_k - AA^* u^{(k)}, \tag{7}$$

а кожен доданок вибираємо згідно з умовою мінімуму функціонала

$$J_k(u) = \left\|\hat{u}^{(k)} - A^* u\right\|^2 = \int_D \left|\hat{u}^{(k)}(x) - (A^* u)(x)\right|^2 dx \to \min, \tag{8}$$

де $\hat{u}^{(k)}(x)$ – точний розв'язок рівняння $Au = f_k$.

Зауважимо, що тепер

$$J_k(u) = (\hat{u}^{(k)}, \hat{u}^{(k)}) - 2\mathrm{Re}(\hat{u}^{(k)}, A^* u) + (A^* u, A^* u) =$$

$$= (\hat{u}^{(k)}, \hat{u}^{(k)}) - 2\mathrm{Re}(f_k, u) + (A^* u, A^* u).$$

Звідси випливає, що для мінімізації функціонала (8) можна обійтися без точного розв'язання рівняння (1) чи обернення оператора A. Натомість отримаємо систему N одновимірних рівнянь Ейлера, яка має такі ж властивості, як і система (5):

$$\int_{D_j} \frac{\bar{u}^{(k)}(x)}{\bar{u}_j^{(k)}(x_j)} (AA^* u^{(k)} - f_k)(x) d\hat{x}_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Розглянемо послідовності

$$\|f_0\|, \ \|f_1\|, \ \|f_2\|, \ \ldots \tag{10}$$

та

$$\left\|\hat{u}^{(0)}\right\|, \ \left\|\hat{u}^{(1)}\right\|, \ \left\|\hat{u}^{(2)}\right\|, \ \ldots. \tag{11}$$

Для немодифікованої версії методу числова послідовність (10) є незростаючою та обмеженою знизу нулем, а отже, і збіжною до деякого невід'ємного числа. Проте послідовність (11), взагалі кажучи, не є незростаючою. У випадку запропонованої модифікації навпаки − послідовність (11) є незростаючою, а послідовність (10), взагалі кажучи, − ні.

2. Обґрунтування збіжності. Для немодифікованої схеми методу доведено [14], що числова послідовність (10) збігається саме до нуля. А оскільки оператор A є лінійним та обмеженим і рівняння (1) має єдиний розв'язок, то оператор A^{-1} є також лінійним та обмеженим [1, 4, 12] і послідовність (11) теж є збіжною до нуля.

Покажемо, що для модифікації методу обидва твердження також справджуються.

Введемо позначення для таких множин:

$$S_j = \{u_j \in L_2([a_j, b_j]) : \|u_j\| = 1\};$$

$$S = \left\{u \in L_2(D) : u(x) = \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j), \ u_j \in S_j\right\};$$

$$X = \left\{\frac{A^* u}{\|A^* u\|} \in L_2(D) : u \in S\right\}.$$

Сформулюємо допоміжні леми, доведення яких можна знайти в [14].

Лема 1. *Множина* X *є тотальною в* $L_2(D)$, *тобто замикання лінійної оболонки* X *співпадає з* $L_2(D)$:

$$\overline{\operatorname{span}(X)} = L_2(D). \tag{12}$$

Лема 2. *Для довільної функції* $f \in L_2(D)$ *існує функція з множини* X, *на якій досягається максимум модуля скалярного добутку з функцією* f:

$$\forall f \in L_2(D) \qquad \exists\, x_f \in X : |(f, x_f)| = \sup_{x \in X} |(f, x)|. \tag{13}$$

Сформулюємо основну теорему збіжності для модифікованого методу.

Теорема 1. *Для довільної правої частини* $f \in L_2(D)$ *рівняння* (1) *послідовність* (11) *збігається до нуля.*

Д о в е д е н н я. Кожну функцію $A^*\left(\prod_{j=1}^{N} u_j\right)$ можна подати у вигляді αx і, навпаки, − кожну функцію вигляду αx можна подати як $A^*\left(\prod_{j=1}^{N} u_j\right)$, де

$$u_j \in L_2([a_j, b_j]), \qquad \alpha \in C, \qquad x \in X.$$

Тоді, позначивши $\alpha_k x_k = A^*(u^{(k)})$, запишемо таке співвідношення:

$$\hat{u}^{(k+1)} = \hat{u}^{(k)} - \alpha_k x_k .$$

Отримаємо наступну нерівність:

$$J_k(u) = \left\|\hat{u}^{(k)} - \alpha x\right\|^2 = \left\|\hat{u}^{(k)}\right\|^2 + |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}(\hat{u}^{(k)}, \alpha x) \geq$$

$$\geq \left\|\hat{u}^{(k)}\right\|^2 + |\alpha|^2 - 2|\alpha|\left|(\hat{u}^{(k)}, x)\right| = \left\|\hat{u}^{(k)}\right\|^2 +$$

$$+ (|\alpha| - \left|(\hat{u}^{(k)}, x)\right|)^2 - \left|(\hat{u}^{(k)}, x)\right|^2 \geq \left\|\hat{u}^{(k)}\right\|^2 - \left|(\hat{u}^{(k)}, x_{\hat{u}^{(k)}})\right|^2 .$$

Рівність досягається при таких умовах:

$$\alpha = (\hat{u}^{(k)}, x),$$

$$x = x_{\hat{u}^{(k)}} .$$

Оскільки $J_k(u^{(k)})$ – мінімум функціонала J_k, то виконуються умови

$$\alpha_k = (\hat{u}^{(k)}, x_k),$$

$$x_k = x_{\hat{u}^{(k)}},$$

$$\left\|\hat{u}^{(k+1)}\right\|^2 = \left\|\hat{u}^{(k)}\right\|^2 - |\alpha_k|^2 .$$

Існування x_k випливає з леми 2.

Таким чином, $\left\{\left\|\hat{u}^{(k)}\right\|\right\}_{k=0}^{\infty}$ – монотонно незростаюча послідовність в $\mathbb{R}$, яка обмежена знизу нулем, а отже, і збіжна:

$$\exists a \geq 0 : \lim_{k\to\infty}\left\|\hat{u}^{(k)}\right\| = a .$$

Далі, враховуючи рівність

$$\left\|\hat{u}^{(M)}\right\|^2 = \left\|\hat{u}^{(0)}\right\|^2 - \sum_{k=0}^{M-1}|\alpha_k|^2, \qquad M \in \mathbb{N},$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2 \leq \left\|\hat{u}^{(0)}\right\|^2 < \infty . \tag{14}$$

Звідси

$$|\alpha_k| \to 0, \qquad k \to \infty . \tag{15}$$

З означення x_k очевидно, що

$$\forall x \in X : \left|(\hat{u}^{(k)}, x)\right| \leq \left|(\hat{u}^{(k)}, x_k)\right| = |\alpha_k| .$$

Звідси, врахувавши (15), отримаємо

$$\forall x \in X : (\hat{u}^{(k)}, x) \to 0, \qquad k \to \infty .$$

Відповідно до леми 1 X є тотальною множиною в $L_2(D)$, а отже,

$$\forall u \in L_2(D) : (\hat{u}^{(k)}, u) \to 0, \qquad k \to \infty .$$

Тобто послідовність (11) є слабко збіжною до нуля в $L_2(D)$:

$$\hat{u}^{(k)} \xrightarrow{\mathrm{w}} 0, \qquad k \to \infty . \tag{16}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Згідно з (14)

$$\exists N_0 \in N: \sum_{k=N_0}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \varepsilon .$$

З (16) випливає, що

$$(\hat{u}^{(k)}, \hat{u}^{(N_0)}) \to 0, \qquad k \to \infty .$$

Отже,

$$\exists M > N_0: \ \forall k > M \qquad \left|(\hat{u}^{(k)}, \hat{u}^{(N_0)})\right| < \varepsilon .$$

Нехай $s \in \mathbb{N}$. Позначимо через n_s таке число, що

$$2^s \le n_s < 2^{s+1}, \qquad |\alpha_{n_s}| = \min_{2^s \le k < 2^{s+1}} |\alpha_k| . \tag{17}$$

Розглянемо підпослідовність $\left\{\left\|\hat{u}^{(n_s)}\right\|\right\}_{s=1}^{\infty}$. Тоді для такого s, що $2^s > M$, маємо

$$\left\|\hat{u}^{(n_s)}\right\|^2 = \left(\hat{u}^{(n_s)}, \hat{u}^{(N_0)} - \sum_{k=N_0}^{n_s-1} \alpha_k x_k\right) \le \left|(\hat{u}^{(n_s)}, \hat{u}^{(N_0)})\right| +$$

$$+ \sum_{k=N_0}^{n_s-1} \left|(\hat{u}^{(n_s)}, \alpha_k x_k)\right| < \varepsilon + \sum_{k=N_0}^{n_s-1} |\alpha_k| \left|(\hat{u}^{(n_s)}, x_k)\right| \le$$

$$\le \varepsilon + \sum_{k=N_0}^{n_s-1} |\alpha_k| |\alpha_{n_s}| \le \varepsilon + \sum_{k=N_0}^{n_s-1} \frac{|\alpha_k|^2 + |\alpha_{n_s}|^2}{2} <$$

$$< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + 2^s |\alpha_{n_s}|^2 \le \frac{3}{2}\varepsilon + \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} |\alpha_k|^2 < \frac{5}{2}\varepsilon .$$

Отже,

$$\left\|\hat{u}^{(n_s)}\right\| \to 0, \qquad s \to \infty .$$

Оскільки ця послідовність є підпослідовністю монотонної послідовності (11), то

$$\left\|\hat{u}^{(k)}\right\| \to 0, \qquad k \to \infty ,$$

що й потрібно було довести. ◊

3. Числові результати. Для числових експериментів було створено програмний пакет, який реалізує обидва варіанти методу. Розглянемо модельну задачу для рівняння (1) при

$D = [0,1] \times [0,1]$,

$\mathcal{K}(x_1, x_2 y_1, y_2) = 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$,

$\lambda = 2$,

$\hat{u}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ – точний розв'язок, на основі якого обчислимо праву частину рівняння $f(x_1, x_2)$.

Позначимо

$$\alpha_k = \frac{\|f_k\|}{\|f_0\|},$$

$$\beta_k = \frac{\left\|\hat{u}^{(k)}\right\|}{\left\|\hat{u}^{(0)}\right\|}.$$

Зміну параметрів α_k та β_k при $\lambda = 2$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

	Параметр	Крок, k					
		0	1	2	3	4	5
Немодифікований метод	α_k, %	100	43.89	8.465	1.82	1.4455	0.1654
	β_k, %	100	133.49	4.6	3.54	0.53	0.171
Модифікований метод	α_k, %	100	74.7	1.5	2.845	0.06	0.112
	β_k, %	100	26.65	5.1	1.015	0.2	0.04

Видно, що параметр α_k зменшується монотонно тільки для немодифікованого методу, а β_k – тільки для модифікованого. Особливо відрізняється поведінка їх зміни при значенні параметра λ задачі (1), близькому до власного значення відповідного оператора Фредгольма (у нашому випадку одне з власних значень приблизно дорівнює 1.795).

У табл. 2 та 3 наведено зміну параметрів α_k та β_k при $\lambda = 1.85$ і $\lambda = 1.81$ відповідно.

Таблиця 2

	Параметр	Крок, k					
		0	1	2	3	4	5
Немодифікований метод	α_k, %	100	16.75	5.765	3.3081	2.3537	1.42
	β_k, %	100	169.95	29.34	29.27	8.1861	8.1625
Модифікований метод	α_k, %	100	29.88	119.63	3.1964	39.14	2.107
	β_k, %	100	95.046	49	28	16.04	9.1955

Таблиця 3

	Параметр	Крок, k					
		0	1	2	3	4	5
Немодифікований метод	α_k, %	100	5.8624	4.855	4.3783	4.019	3.714
	β_k, %	100	207.5	160.34	160.33	135.03	135.01
Модифікований метод	α_k, %	100	16.234	98.35	2.597	83.6	2.3488
	β_k, %	100	94.2	85.27	78.663	72.585	66.978

1. *Аграновский М. Л., Баглай Р. Д.* Об одном разложении в гильбертовом пространстве и его приложениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1977. – **17**, № 4. – С. 871–878.
2. *Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н.* Вариационно-итерационный метод решения многомерных интегральных уравнений // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. XX республ. конф. – Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986. – Ч. 2. – С. 23.
3. *Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н.* Приближенное вариационно-итерационное разделение переменных в многомерных задачах // Волны и дифракция-85: Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. – Т. 1. – С. 122.
4. *Вагін П., Остудін Б., Шинкаренко Г.* Основи функціонального аналізу. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – 140 с.
5. *Верлань А. Ф., Серикова И. А.* К вопросу сходимости вариационно-итерационного метода аппроксимации функции двух переменных // Точность и надежность кибернетических систем. – 1975. – Вып. 3. – С. 10–12.
6. *Войтович М. М., Ярошко С. А.* Варіаційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 4. – С. 122–126.

7. *Войтович Н. Н.* Синтез двумерной антенной решетки с обобщенным разделением переменных // Радиотехника и электроника. – 1988. – **33**, № 12. – С. 2637–2640.
8. *Войтович Н. Н., Ярошко С. А.* Численное решение задачи синтеза двумерной антенной решетки // Радиотехника и электроника. – 1991. – **36**, № 1. – С. 192–196.
9. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 232 с.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1981. – 542 с.
11. *Поспелов В. В.* О приближении функции нескольких переменных произведениями функции одного переменного. – Москва, 1978. – 20 с. – (Препр. / ИПМ АН СССР; № 32.)
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
13. *Balyash Y. G., Voitovych N. N., Yaroshko S. A.* Generalized separation of variables in problems of diffraction and antenna synthesis // Proc. 1989-URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory (Stockholm, Sweden). – Stockholm, 1989. – P. 650–652.
14. *Biletskyy V.* An iterative method of generalized separation of variables for solving linear operator equations // J. Numer. and Appl. Math. – 2009. (Submitted).
15. *Biletskyy V., Yaroshko S.* A method of generalized separation of variables for solving many-dimensional linear Fredholm integral equation theory // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. XIIth Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 17–20, 2007. – Lviv, 2007. – P. 94–97.
16. *Biletskyy V., Yaroshko S.* A method of generalized separation of variables for solving three-dimensional integral equations theory // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. XIth Int. Seminar/Workshop, Tbilisi, Oct. 11–13, 2006. – Lviv–Tbilisi, 2006. – P. 164–168.
17. *Bulatsyk O., Katsenelenbaum B., Topolyuk Yu., Voitovich N.* Phase optimization problems. Applications in wave field theory. – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA, 2010. – x + 309 p.
18. *De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J.* A multilinear singular value decomposition // SIAM J. Matrix Anal. and Appl. – 2000. – **21**. – P. 1253–1278.
19. *Gavrilyuk I., Hackbusch W., Khoromskij B.* Hierarchical tensor-product approximation to the inverse and related operators for high-dimensional elliptic problems // Computing. – 2005. – **74**. – P. 131–157.
20. *Hackbusch W., Khoromskij B.* Tensor-product approximation to operators and functions in high dimensions // J. Complexity. – 2007. – **23**. – P. 697–714.
21. *Kolda T., Bader B.* Tensor decompositions and applications. – Techn. Report SAND2007-6702. – Sandia Nat. Laboratories, 2007.
22. *Navasca C., De Lathauwer L., Kinderman S.* Swamp reducing technique for tensor decompositions // Proc. 16-th European Signal Processing Conf. (EUSIPCO 2008), Lausanne, Switzerland, Aug. 2008. – 4 p.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описан метод обобщенного разделения переменных для решения многомерных интегральных уравнений и его модификация, которая минимизирует отклонение приближенного решения от точного. Доказана сходимость модификации метода. Дается сравнение методов на основе численных результатов.

MODIFICATION OF METHOD OF GENERALIZED SEPARATION OF VARIABLES FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS

The method of generalized separation of variables for solving the multidimensional integral equations and its modification minimizing the deviation of the approximate solution from the exact one are described. The convergence of the modified method is proved. The comparison of the methods on the basis of numerical results is presented.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів
Одержано
20.10.09