УДК 517.53+517.54

Я. С. Магола, М. М. Шеремета

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено властивості цілих розв'язків диференціальних рівнянь вигляду

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0\,,$$

де $n \ge 3$, $2 \le m \le n$ *і* $a_k^{(j)}$ *– комплексні числа.*

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [5, с. 38], що умова $\operatorname{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$, є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [5, с. 64] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\operatorname{Re}\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \ne 0$ [5, с. 64]. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [5, с. 71], тобто $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \ne 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді й лише тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n/f_1) z^n$.

S. M. Shah [9], вивчаючи властивості цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (a_1^{(1)} z^2 + a_2^{(1)} z) w' + (a_1^{(0)} z^2 + a_2^{(0)} z + a_3^{(0)}) w = 0\,, \tag{2}$$

довів таку теорему.

Теорема А. *Якщо*

$$a_1^{(0)} \ne 0,\ a_2^{(1)} + a_3^{(0)} = 0,\ a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = 0,\ a_2^{(1)} \ge 1,\ \left|a_1^{(0)}\right|^{1/2} \le \log(2 + \sqrt{3})\,,$$

то існує цілий розв'язок $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ *рівняння* (2) *такий, що всі парні похідні є однолистими в* $\mathbb{D}$ *і* $\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sqrt{\left|a_1^{(0)}\right|}\, r$ *при* $r \to \infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Дослідженню близькості до опуклості розв'язків диференціальних рівнянь вигляду $w'' + aw' + bw = 0$, де a і b – аналітичні в $\mathbb{D}$ функції, присвячено статті [7, 8].

Безпосереднім узагальненням рівняння С. Шаха (S. Shah) є диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j+1} a_k^{(n-j)} z^{n-k+1} \right) w^{(n-j)} = 0\,. \tag{3}$$

У [6] доведено таку теорему.

Теорема Б. *Ціла функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (3) *тоді й лише тоді, коли для кожного* $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{m=0}^{\min\{s,n\}} \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{(s-m)!}{(s-k-m)!} f_{s-m} = 0 , \tag{4}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Якщо припустити, що $a_k^{(j)} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n-j-1$ і $j = 1, 2, \ldots, n-2$, то рівняння (3) матиме вигляд [6]

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0 , \tag{5}$$

а ціла функція (1) є розв'язком диференціального рівняння (5) тоді й лише тоді, коли $a_{n+1}^{(0)} f_0 = 0$, $(a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)}) f_1 + a_n^{(0)} f_0 = 0$ і для $s \ge 2$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} a_{n-k}^{(k)} \frac{(s-1)!}{(s-k-1)!} f_{s-1} = 0 . \tag{6}$$

Використовуючи ці формули для коефіцієнтів, у [6] досліджено можливе зростання цілого розв'язку рівняння (5), його опуклість і близькість до опуклості в $\mathbb{D}$. Тут припустимо, що $n \ge 3$, $2 \le m \le n$, і нехай

1) $a_k^{(j)} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n-j-m, n-j-m+2, \ldots, n-j$ та $j = 0, \ldots, n-m-1$;

2) $a_k^{(n-m)} = 0$ для $k = 2, \ldots, m$;

3) $a_k^{(n-j)} = 0$ для $k = 1, \ldots, j$ та $j = 1, \ldots, m-1$.

Тоді рівняння (3) у цьому випадку можна записати у вигляді

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0 , \tag{7}$$

а з теореми **Б** неважко отримати такий наслідок.

Твердження 1. *Нехай* $n \ge 3$, $2 \le m \le n$. *Ціла функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (7) *тоді й лише тоді, коли*

$$\sum_{k=0}^{s} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s = 0, \qquad 0 \le s \le m-1 , \tag{8}$$

і для $s \ge m$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{(s-m)!}{(s-k-m)!} f_{s-m} = 0 , \tag{9}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Використовуючи це твердження, дослідимо властивості цілих розв'язків рівняння (7). Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$. Тоді, якщо виберемо $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = f_3 = \ldots = f_{m-1} = 0$, то умова (8) буде виконуватись, а з рекурентної формули (9) буде випливати, що $f_m = 0$. Такий розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{mj+1} z^{mj+1} = z + f_{m+1} z^{m+1} + f_{2m+1} z^{2m+1} + \ldots . \tag{10}$$

2. Основною теоремою є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $n \ge 3$, $2 \le m \le n$ *і* $j_0 = [(n-1)/m]$, *а* $\text{æ}_m = \max\{\text{æ}_m^{(1)}, \text{æ}_m^{(2)}\}$, *де*

$$\text{æ}_m^{(1)} = \max\left\{ \left| \frac{\sum\limits_{k=m}^{pm+1} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{pm+1} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}} \right|, \ p = 1, \ldots, j_0 \right\} \tag{11}$$

і

$$\text{æ}_m^{(2)} = \max\left\{ \left| \frac{\sum\limits_{k=m}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}} \right|, \ p > j_0 + 1 \right\}. \tag{12}$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (10) *диференціального рівняння* (7) *з такими властивостями*:

(***i***) *якщо* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{\text{æ}_m^j}{(jm)!} \le 1$, *то всі похідні* $f^{(\ell m)}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;

(***ii***) *якщо* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{(jm+1)\text{æ}_m^j}{(jm)!} \le 1$, *то всі похідні* $f^{(\ell m)}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, *є опуклими в* $\mathbb{D}$;

(***iii***) *функція* f *має регулярне зростання і при* $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = \frac{m+q-1}{m}(1+o(1))\left(\sqrt[m]{\left|a_q^{(n-m-q+1)}\right|}\, r\right)^{m/m+q-1}, \tag{13}$$

де $q = \min\{j \in \{1, \ldots, n+1-m\} : a_j^{(n-m-j+1)} \ne 0\}$.

Д о в е д е н н я. Почнемо з твердження (***iii***). Для функції (10) формула (9) має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\min\{jm+1,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{(jm+1)!}{(jm+1-k)!} f_{jm+1} + \\ + \sum_{k=0}^{\min\{jm+1,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{((j-1)m+1)!}{((j-1)m+1-k)!} f_{(j-1)m+1} = 0, \\ j \ge 1. \tag{14}$$

Зрозуміло, що $j_0 = \max\{j : jm+1 \le n\}$, а $j_0 = 0$ тоді й лише тоді, коли $m = n$. Тоді для $j \ge j_0$ з (9) отримуємо

$$(jm+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm+1-k)!} f_{jm+1} = \\ = -((j-1)m+1)! \sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m+1-k)!} f_{(j-1)m+1}.$$

Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm+1-k)!} = \frac{1+o(1)}{(jm+1-n)!}, \qquad j \to \infty.$$

З іншого боку, якщо

$$a_1^{(n-m)} = a_2^{(n-m-1)} = \ldots = a_{q-1}^{(n-m-q+2)} = 0$$

і

$$a_q^{(n-m-q+1)} \ne 0,$$

то подібно

$$\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m+1-k)!} = \frac{a_q^{(n-m-q+1)}(1+o(1))}{(jm+q-n)!}, \qquad j \to \infty .$$

Тому

$$\frac{(jm+1)!}{(jm+1-n)!} f_{jm+1} =$$

$$= -(1+o(1))((j-1)m+1)! \frac{a_q^{(n-m-q+1)}}{(jm-n+q)!} f_{(j-1)m+1}, \quad j \to \infty,$$

звідки

$$f_{jm+1} = -\frac{1+o(1)}{(jm+1)^{m+q-1}} a_q^{(n-m-q+1)} f_{(j-1)m+1}, \qquad j \to \infty .$$

Отже, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ і всіх $j \ge j_0(\varepsilon)$

$$\frac{1-\varepsilon}{(jm+1)^{m+q-1}} \left| a_q^{(n-m-q+1)} \right| \left| f_{(j-1)m+1} \right| \le \left| f_{jm+1} \right| \le$$

$$\le \frac{1+\varepsilon}{(jm+1)^{m+q-1}} \left| a_q^{(n-m-q+1)} \right| \left| f_{(j-1)m+1} \right| .$$

Тому для кожного $j \ge 1$

$$K_1 \frac{\left(\sqrt[m]{(1-\varepsilon)\left| a_q^{(n-m-q+1)} \right|}\right)^{jm+1}}{\prod_{s=0}^{j} (sm+1)^{m+q-1}} \le \left| f_{jm+1} \right| \le K_2 \frac{\left(\sqrt[m]{(1+\varepsilon)\left| a_q^{(n-m-q+1)} \right|}\right)^{jm+1}}{\prod_{s=0}^{j} (sm+1)^{m+q-1}}, \tag{15}$$

де K_1 і K_2 – додатні сталі. Розглянемо функцію

$$f^*(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{jm+1}}{\prod_{s=0}^{j} (sm+1)^p}, \tag{16}$$

де $p = m+q-1 \ge 2$. Нехай $\mu_{f^*}(r)$ – максимальний член (16), а $\nu_{f^*}(r)$ – його центральний індекс. Оскільки $r_{jm+1} = ((j+1)m+1))^{p/m} \uparrow \infty,\ j \to \infty$, то $\nu_{f^*}(r) = jm+1$ для $r_{(j-1)m+1} \le r \le r_{jm+1}$. Звідси випливає, що $(\nu_{f^*}(r))^{p/m} \le$ $\le r \le (\nu_{f^*}(r) + m)^{p/m}$, тобто $\nu_{f^*}(r) = (1+o(1)) r^{m/p}$ при $r \to \infty$,

$$\ln \mu_{f^*}(r) = \ln \mu_{f^*}(r_0) + \int_0^r \frac{\nu_{f^*}(t)}{t} dt = (1+o(1)) \frac{p}{m} r^{m/p}, \quad r \to \infty, \tag{17}$$

а за теоремою Бореля $\ln M_{f^*}(r) = (1+o(1)) \dfrac{p}{m} r^{m/p}$, $r \to \infty$. Тому з огляду на (15) і довільність $\varepsilon > 0$ отримуємо твердження (***iii***).

Для дослідження близькості до опуклості розв'язку рівняння (7) будемо використовувати таку лему [1, 2, 4].

Лема 1. *Якщо* $f(z) = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s$ *і* $\sum_{s=2}^{\infty} s\left| f_s \right| \le 1$, *то* f *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

За умови $j_0 > 0$ з (9) для $j \le j_0$ маємо

$$f_{jm+1} = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{(j-1)m+1} a_{n+1-k-m}^{(k)} \dfrac{((j-1)m+1)!}{((j-1)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{jm+1} a_{n+1-k}^{(k)} \dfrac{(jm+1)!}{(jm+1-k)!}} f_{(j-1)m+1} =$$

$$= \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j-s)m+1} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j-s+1)m+1} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m+1-k)!}}. \qquad (18)$$

Ця формула справджується і для j_0, тобто

$$f_{j_0 m+1} = \frac{(-1)^{j_0}}{(j_0 m+1)!} \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s)m+1} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s+1)m+1} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m+1-k)!}}. \qquad (19)$$

Якщо $j > j_0$, то

$$f_{jm+1} = -\frac{((j-1)m+1)!}{(jm+1)!} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm+1-k)!}} f_{(j-1)m+1},$$

тобто, зважаючи на (19),

$$f_{jm+1} = (-1)^{j-j_0} \frac{(j_0 m+1)!}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m+1-k)!}} f_{j_0 m+1} =$$

$$= \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m+1-k)!}} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s)m+1} \dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s+1)m+1} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m+1-k)!}}. \qquad (20)$$

Якщо $j_0 = 0$, тоді в (20) множник $\prod\limits_{s=1}^{j_0}$ відсутній, а добуток $\prod\limits_{s=1}^{j-j_0}$ слід замінити на $\prod\limits_{s=1}^{j}$.

Для ℓm-ї похідної від функції (10) з $\ell \ge 1$ правильною є формула

$$f^{(\ell m)}(z) = \frac{(\ell m + 1)!}{1!} f_{\ell m+1} z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(jm + \ell m + 1)!}{(jm+1)!} f_{mj+\ell m+1} z^{mj+1}\,.$$

Функція $f^{(\ell m)}$ є опуклою чи близькою до опуклої тоді й лише тоді, коли такою є функція

$$F_\ell(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(jm + \ell m + 1)!}{(jm+1)!(\ell m+1)!} \frac{f_{jm+\ell m+1}}{f_{\ell m+1}} z^{jm+1} = z + \sum_{j=1}^{\infty} F_{jm+1}^{(\ell)} z^{jm+1}\,. \tag{21}$$

Якщо $j + \ell \le j_0$, то на підставі (18)

$$F_{jm+1}^{(\ell)} = \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s)m+1} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+\ell-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s+1)m+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}. \tag{22}$$

Якщо $j + \ell > j_0$ і $\ell \le j_0$, тоді з урахуванням (18) і (20)

$$F_{jm+1}^{(\ell)} = \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j-(j_0-\ell)} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+\ell-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}} \times$$

$$\times \prod_{s=1+\ell}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0+\ell-s)m+1} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0+\ell-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0+\ell-s+1)m+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0+\ell-s+1)m+1-k)!}}. \tag{23}$$

Нарешті, якщо $\ell > j_0$, то з огляду на (20)

$$F_{jm+1}^{(\ell)} = \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+\ell-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}. \tag{24}$$

Зауважимо, що при $\ell = 0$ формули (22) та (23) збігаються відповідно з формулами (18) та (20). Внаслідок цього зауваження далі будемо вважати, що $\ell \ge 0$.

Оцінимо $\left|F_{jm+1}\right|$. Для $j + \ell \le j_0$ з формули (22) маємо

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right| = \left| \frac{(-1)^j}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s)m+1} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+\ell-s)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s+1)m+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(jm+1)!} \prod_{s=1}^{j} \left| \frac{\sum\limits_{k=m}^{(j+\ell-s+1)m+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s+1)m+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}} \right| \le \frac{1}{(jm+1)!} \times$$

$$\times\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{(j+\ell-s+1)m+1}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+\ell-s+1)m+1}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}\right| : j+\ell\le j_0, 1\le s\le j\right\}.$$

Легко побачити, що, якщо $j+\ell\le j_0$ і $1\le s\le j$, то $j+\ell-s+1\le j_0$. Тому з попередньої нерівності отримуємо

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right|\le\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}æ_m^{(1)}=\frac{(æ_m^{(1)})^j}{(jm+1)!}. \tag{25}$$

Якщо ж $\ell>j_0$, то з (24) подібно отримуємо

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right|\le\frac{1}{(jm+1)!}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)m+1-k)!}}\right| : \ell>j_0, 1\le s\le j\right\}.$$

Якщо $\ell>j_0$ і $1\le s\le j$, то $j+\ell-s+1\ge j_0+2\ge j_0+1$. Тому з останньої нерівності отримуємо оцінку

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right|\le\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}æ_m^{(2)}=\frac{(æ_m^{(2)})^j}{(jm+1)!}. \tag{26}$$

Нарешті, якщо $j+\ell>j_0$ і $\ell\le j_0$, то з формули (23) подібно отримуємо

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right|\le\frac{(æ_m^{(1)})^{j_0-\ell}(æ_m^{(2)})^{j-(j_0-\ell)}}{(jm+1)!}. \tag{27}$$

Отже, у всіх трьох випадках справджується нерівність

$$\left|F_{jm+1}^{(\ell)}\right|\le\frac{æ_m^j}{(jm+1)!}. \tag{28}$$

Тому за лемою 1 функція $F_\ell(z)$ (а звідси і $f^{(\ell m)}(z)$, $\ell\ge 0$) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{æ_m^j}{(jm)!}\le 1$, тобто твердження (***i***) доведено.

Для доведення твердження (***ii***) використаємо наступну лему [4].

Лема 2. *Якщо* $f(z)=z+\sum\limits_{s=2}^{\infty}f_s z^s$ *і* $\sum\limits_{s=2}^{\infty}s^2|f_s|\le 1$, *то* f *є опуклою в* $\mathbb{D}$.

За цією лемою з (28) отримуємо твердження (***ii***).

Теорему 1 повністю доведено. ◊

Зауваження 1. Оскільки $m\ge 2$, то

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}=\frac{a_{n+1}^{(0)}}{(pm+1)!}+\frac{a_n^{(1)}}{(pm)!}+$$

$$+\sum_{k=2}^{m-1}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}+\sum_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}, \tag{29}$$

причому сума $\sum_{k=2}^{m-1}$ відсутня у випадку, коли $m = 2$. З огляду на умову

$$a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$$

будемо вважати, що $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, а всі решта $a_{n+1-k}^{(k)} \ge 0$. Тоді

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm+1-k)!}\right| = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{\left|a_{n+1-k}^{(k)}\right|}{(pm+1-k)!} +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n} \frac{\left|a_{n+1-k}^{(k)}\right|}{(pm+1-k)!} \ge \sum_{k=m}^{n} \frac{\left|a_{n+1-k}^{(k)}\right|}{(pm+1-k)!}.$$

Тому, якщо існує число $\eta_m > 0$ таке, що $\left|a_{n+1-k}^{(k-m)}\right| \le \eta_m \left|a_{n+1-k}^{(k)}\right|$, то з (12) отримаємо оцінку $æ_m^{(2)} \le \eta_m$. Подібно можна показати, що і $æ_m^{(1)} \le \eta_m$. Отже, з теореми 1 випливає таке

Твердження 2. *Нехай* $n \ge 3$, $2 \le m \le n$, $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$ *і всі* $a_{n+1-k}^{(k)} \ge 0$ *при* $k \ge 2$. *Тоді, якщо* $\left|a_{n+1-k}^{(k-m)}\right| \le \eta_m \left|a_{n+1-k}^{(k)}\right|$ *для всіх* $k \ge m$, *то існує цілий розв'язок* (10) *диференціального рівняння* (7) *з властивостями* (***i***), (***ii***), (***iii***), *вказаними у теоремі* 1, *але з заміною* $æ_m$ *на* η_m.

Зауваження 2. У випадку $m = 2$ умова з твердження (***i***) теореми 1 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{æ_2^j}{(2j)!} \le 1$ рівносильна умові $\operatorname{ch}\sqrt{æ_2} \le 2$, тобто умові $æ_2 \le \ln^2(2+\sqrt{3})$, а умова $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)æ_2^j}{(2j)!} \le 1$ з твердження (***ii***) рівносильна умові

$$\operatorname{ch}\sqrt{æ_2} + \sqrt{æ_2}\operatorname{sh}\sqrt{æ_2} \le 2$$

і виконується, якщо $æ_2 < \ln^2 2$. У загальному випадку умова $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{æ_m^j}{(jm)!} \le 1$ виконується, наприклад, якщо $æ_m \le \frac{m!}{2}$, а умова $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(jm+1)æ_m^j}{(jm)!} \le 1$ виконується, якщо $æ_m \le \frac{m!}{2(m+1)}$.

3. Наслідки і доповнення теореми 1. Нехай спочатку $m = n$. Тоді диференціальне рівняння (7) матиме вигляд

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + (a_1^{(0)} z^n + a_{n+1}^{(0)}) z w = 0. \tag{30}$$

З огляду на твердження 1 знову припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$. Тому для того, щоб виконувалась умова (8), виберемо

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = \ldots = f_{n-1} = 0.$$

З рекурентної формули (9) випливає, що $f_n = 0$. Отже, розв'язок рівняння (30) будемо шукати у такому вигляді:

$$f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{nj+1} z^{nj+1} = z + f_{n+1} z^{n+1} + f_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots. \tag{31}$$

Дослідимо опуклість і близькість до опуклості цілого розв'язку (31) диференціального рівняння (30). Як і при доведенні теореми 1, використаємо лему 1 та лему 2. Оскільки тепер $j_0 = 0$, то, як вище, для коефіцієнтів f_{jn+1} легко отримуємо формулу

$$f_{jn+1} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j-s)n+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)n+1-k)!}}, \qquad j \ge 1. \tag{32}$$

Для коефіцієнтів функції F_ℓ з (21) випливає формула

$$F_{jn+1}^{(\ell)} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+\ell-s)n+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)n+1-k)!}}. \tag{33}$$

Звернемо увагу на те, що при $\ell = 0$ формула (33) збігається з формулою (32).

З (33) випливає, що

$$\left|F_{jn+1}^{(\ell)}\right| \le \frac{1}{(jn+1)!}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+\ell-s)n+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+\ell-s+1)n+1-k)!}}\right| : \ell \ge 0,\, 1 \le s \le j\right\}.$$

Тому, якщо приймемо

$$\text{æ}_n = \max\left\{\left|\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((p-1)n+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn+1-k)!}}\right|,\ p > 1\right\}, \tag{34}$$

то отримаємо таку оцінку:

$$\left|F_{jn+1}^{(\ell)}\right| \le \frac{\text{æ}_n^j}{(jn+1)!}. \tag{35}$$

З наведених міркувань випливає такий

Наслідок 1. *Нехай* $n \ge 3$, *а* æ_n *визначається формулою* (34). *Припустимо, що* $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (31) *диференціального рівняння* (30) *з такими властивостями:*

(***i***) *якщо* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{\text{æ}_n^j}{(jn)!} \le 1$, *то всі похідні* $f^{(\ell n)}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;

(***ii***) *якщо* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(jn+1)\text{æ}_n^j}{(jn)!} \le 1$, *то всі похідні* $f^{(\ell n)}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, *є опуклими в* $\mathbb{D}$;

(***iii***) *функція* f *має регулярне зростання і*

$$\ln M_f(r) = (1+o(1))\sqrt[n]{\left|a_1^{(0)}\right|}\,r, \qquad r \to \infty.$$

Зауваження 3. Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то з (29) за умови $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$ для $m = n$ отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn+1-k)!} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn+1-k)!} + \frac{1}{(pn+1-n)!} \geq \frac{1}{((p-1)n+1)!},$$

якщо всі $a_{n+1-k}^{(k)} \geq 0,\ 2 \leq k \leq n-1$. Тому $æ_n \leq \left|a_1^{(0)}\right|$ і справджується наступне

Твердження 3. *Нехай* $n \geq 3,\ a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$ *і* $a_{n+1-k}^{(k)} \geq 0,\ 2 \leq k \leq n-1$. *Тоді існує цілий розв'язок* (31) *диференціального рівняння* (30) *з властивостями* (***i***), (***ii***), (***iii***), *вказаними у наслідку 1, з заміною* $æ_m$ *на* $\left|a_1^{(0)}\right|$.

Нехай тепер $m = 2$. Тоді рівняння (7) набуде вигляду

$$z^n w^{(n)} + a_2^{(n-1)} z^{n-1} w^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} (a_{n-j-1}^{(j)} z^2 + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0. \tag{36}$$

Знову на підставі твердження 1 припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$ і для того, щоб задовольнити умову (8), виберемо $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

З рекурентної формули (9) випливає, що $f_2 = 0$. Отже, розв'язок рівняння (36) будемо шукати у вигляді

$$f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j+1} z^{2j+1} = z + f_3 z^3 + f_5 z^5 + \ldots. \tag{37}$$

У цьому випадку з теореми 1 з огляду на зауваження 2 отримаємо такий

Наслідок 2. *Нехай* $n \geq 3$ *і* $j_0 = [(n-1)/2]$, *а* $æ_2 = \max\{æ_2^{(1)}, æ_2^{(2)}\}$, *де*

$$æ_2^{(1)} = \max\left\{ \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{2p+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p+1-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p+1-k)!}} \right|,\ p = 1, \ldots, j_0 \right\}$$

та

$$æ_2^{(2)} = \max\left\{ \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p+1-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p+1-k)!}} \right|,\ p > j_0 + 1 \right\}.$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (37) *диференціального рівняння* (36) *з такими властивостями:*

(***i***) *якщо* $æ_2 \leq \ln^2(2+\sqrt{3})$, *то всі похідні* $f^{(2\ell)},\ \ell \in \mathbb{Z}_+$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;

(***ii***) *якщо* $æ_2 \leq \ln^2 2$, *то всі похідні* $f^{(2\ell)},\ \ell \in \mathbb{Z}_+$, *є опуклими в* $\mathbb{D}$;

(***iii***) *функція* f *має регулярне зростання і при* $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = \frac{1+q}{2}(1+o(1))\left(\sqrt{\left|a_q^{(n-q-1)}\right|}\,r\right)^{2/1+q},$$

де $q = \min\{j \in \{1, \ldots, n-1\} : a_j^{(n-j-1)} \neq 0\}$.

Припустимо тепер, що всі коефіцієнти рівняння (36) є дійсними числами. Тоді для дослідження близькості до опуклості розв'язку (37) рівняння (36) використаємо такий критерій Александера (Alexander) [3, с. 9].

Лема 3. *Якщо* $f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j+1} z^{2j+1}$ *і*

$$1 \ge 3f_3 \ge 5f_5 \ge \ldots \ge (2j-1)f_{2j-1} \ge (2j+1)f_{2j+1} \ge \ldots 0\,, \tag{38}$$

то f *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

З рекурентної формули (9) з $m = 2$ для $j \ge 1$ маємо

$$f_{2j+1} = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \dfrac{(2j-1)!}{(2j-1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \dfrac{(2j+1)!}{(2j+1-k)!}} f_{2j-1} =$$

$$= -\frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \dfrac{(2j-1)!}{(2j-1-k)!}}{a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)}(2j+1) + \sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}-2} a_{n-1-k}^{(k+2)} \dfrac{(2j+1)!}{(2j-1-k)!}} f_{2j-1}.$$

Нехай $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \le 0$, $a_{n-1-k}^{(k+2)} \ge 0$ і $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \le 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$, $0 \le k \le$ $\le n-2$. Тоді для кожного $j \ge 1$

$$f_{2j+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}-2} \left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \dfrac{(2j-1)!}{(2j-1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{\min\{2j+1,n\}-2} a_{n-1-k}^{(k+2)} \dfrac{(2j+1)!}{(2j-1-k)!}} f_{2j-1} \le$$

$$\le \frac{2}{2j(2j+1)} f_{2j-1} \le \frac{2j-1}{2j+1} f_{2j-1}.$$

Отже, умова леми 3 виконується і f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

При $m = 2$ функція (21) матиме вигляд

$$F_\ell(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} F_{2j+1}^{(\ell)} z^{2j+1}\,,$$

де

$$F_{2j+1}^{(\ell)} = \frac{(2(j+\ell)+1)!}{(2j+1)!(2\ell+1)!} \frac{f_{2(j+\ell)+1}}{f_{2\ell+1}}.$$

Зауважимо, що при $j = 0$ функція $F_{2j+1}^{(\ell)} = 1$.

Помножимо останню рівність на $(2j+1)$ і з рекурентної формули виразимо $f_{2(j+\ell)+1}$ через $f_{2(j+\ell)-1}$. Тоді

$$(2j+1)F_{2j+1}^{(\ell)} = (2j+1)\frac{(2(j+\ell)+1)!}{(2j+1)!(2\ell+1)!} \frac{f_{2(j+\ell)+1}}{f_{2\ell+1}} \le$$

$$\le \frac{(2(j+\ell)-1)!}{(2j-1)!(2\ell+1)!} \frac{f_{2(j+\ell)-1}}{f_{2\ell+1}} = F_{2j-1}^{(\ell)} \le (2j-1)F_{2j-1}^{(\ell)}.$$

Наступне твердження випливає з вищенаведених міркувань.

Твердження 4. *Нехай* $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \le 0$, $a_{n-1-k}^{(k+2)} \ge 0$ *для всіх* $0 \le k \le n-2$. *Тоді, якщо* $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \le 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$ *для всіх* $0 \le k \le n-2$, *то існує цілий розв'язок* (37) *диференціального рівняння* (36) *такий, що всі похідні* $f^{(2j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями.*

Зауваження 4. Оскільки $\ln^2(2+\sqrt{3}) < 2$, то твердження 4 у випадку дійсних $a_n^{(k)}$ є загальнішим, ніж твердження (***i***) наслідку 2.

Зауваження 5. Умову $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \le 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$ у твердженні 4 замінити умовою $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \le 2.5a_{n-1-k}^{(k+2)}$ не можна. Справді, оскільки область однолистості функції $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)$ є смугою $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$, то функція

$$f_0 = \frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\alpha} = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

є однолистою в $\mathbb{D}$, якщо $0 < \alpha < \pi/2$, і не є однолистою в $\mathbb{D}$, якщо $\pi/2 < \alpha < +\infty$. Легко перевірити, що ця функція є розв'язком рівняння

$$z^3 w''' + z^2 w'' - \alpha^2 z^3 w' - \alpha^2 z^2 w = 0\,,$$

тобто рівняння (36) з $n = 3$, $a_4^{(0)} = a_3^{(1)} = 0$, $a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = -\alpha^2$ і $a_2^{(2)} = a_1^{(3)} = 1$. Умова $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| \le 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$ для всіх $0 \le k \le n-2$ означає тут $\alpha^2 \le 2$, тобто $\alpha < \sqrt{2}$. Оскільки $\sqrt{2} < \pi/2$, то за твердженням 4 функція f_0 є однолистою в $\mathbb{D}$. З іншого боку, якщо б $\left|a_{n-1-k}^{(k)}\right| = 2.5a_{n-1-k}^{(k+2)}$, то мали би, що $\alpha = \sqrt{2.5} > \pi/2$, і функція f_0 не була б однолистою в $\mathbb{D}$.

4. Висновки. Диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0$$

за певних умов на параметри $a_k^{(j)}$ має цілий розв'язок

$$f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{mj+1} z^{mj+1}\,,$$

який разом зі своїми похідними $f^{(\ell m)}$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, є близькими до опуклих або опуклими в $\mathbb{D}$ функціями. Для цього розв'язку справджується асимптотична рівність

$$\ln M_f(r) = \frac{m+q-1}{m}(1+o(1))\left(\sqrt[m]{\left|a_q^{(n-m-q+1)}\right|}\,r\right)^{m/m+q-1}, \qquad r \to \infty\,,$$

де

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

і

$$q = \min\left\{j \in \{1,\ldots,n+1-m\} : a_j^{(n-m-j+1)} \ne 0\right\}.$$

1. *Шеремета З. М.* Про функції, близькі до опуклих // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 144–146.
2. *Шеремета З. М., Шеремета М. Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения – 2002. – **38**, № 4. – С. 435–440.

3. *Goodman A. W.* Univalent functions. – Florida: Mariner Publ. Co., 1983. – Vol. II. – 311 p.
4. *Goodman A. W.* Univalent function and nonanalytic curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P. 597–601.
5. *Graham I., Kohr G.* Geometric function theory in one and higher dimensions. – New York–Basel: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 526 p.
6. *Mahola Ya. S., Sheremeta M. M.* Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree // Мат. студії. – 2008. – **30**. – P. 153–162.
7. *Owa S., Saitoh H., Srivastava H. M., Yamakava R.* Geometric properties of solutions of a class of differential equations // Comput. and Math. with Appl. – 2004. – **47**. – P. 1689–1696.
8. *Saitoh H.* Geometric properties of solutions of a class of ordinary linear differential equations // Appl. Math. and Comput. – 2007. – **187**. – P. 408–416.
9. *Shah S. M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – **142**. – P. 422–430.

О СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Исследованы свойства целых решений дифференциальных уравнений вида

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0 ,$$

где $n \ge 3$, $2 \le m \le n$ *и* $a_k^{(j)}$ *– комплексные числа.*

ON PROPERTIES OF ENTIRE SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

The properties of entire solutions of the differential equations of the form

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0 ,$$

where $n \ge 3$, $2 \le m \le n$, *and* $a_k^{(j)}$ *are complex numbers, are investigated.*

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
26.06.09