

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ З НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану пружно-пластичної ізотропної оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Досліджено вплив зміцнення матеріалу на загальні характеристики напруженого стану.

Теоретичні основи та прикладні проблеми механіки деформаційного зміцнення розглянуто у роботах [1–3, 6, 9, 11, 12, 14]. Сучасні розробки наведено у статтях [8, 10, 13, 15]. У роботі [5] розглянуто задачу про напружений стан пологої ізотропної циліндричної і сферичної оболонок з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу. При цьому застосовували δ_c -модель, узагальнену на матеріали зі зміцненням [4]. Нижче розглядаємо аналогічну задачу для ізотропної оболонки довільної гауссової кривини.

Розглянемо пологу ізотропну оболонку довільної кривини сталої товщини h , яка містить наскрізну тріщину довжини $2\ell_0$ уздовж однієї з ліній головних кривин (рис. 1).

Розміри тріщини вважаємо великими порівняно з товщиною оболонки, але малими порівняно з іншими лінійними розмірами. Це дозволяє розглядати задачу про рівновагу тонкої оболонки з тріщиною за допомогою двовимірної теорії оболонок. У межах цієї теорії тріщини моделюються як математичні розрізи серединної поверхні оболонки.

Оболонку віднесемо до системи ортогональних координат $Oxyz$, вибраної так, що осі Ox та Oy орієнтовані вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки, а вісь Oz спрямована по нормалі до неї. Будемо вважати, що оболонка та береги тріщини навантажені симетричними відносно лінії тріщини зусиллями T і моментами M . У процесі деформації оболонки береги тріщини не контактують між собою.

Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу вважатимемо такими, що в околі тріщини по всій глибині вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Далі, відповідно до δ_c -моделі, зони пластичних деформацій моделюємо поверхнями розриву переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на невідомі нормальне зусилля T та згинний момент M вважаємо розподіленими лінійно [4, 5] за законом

$$T(s) = Pb(s), \quad M(s) = Hb(s).$$

Тут $b(s) = (1 - m^*) \frac{|s| - \tau^*}{1 - \tau^*} + m^*$, $m^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_\tau}$, σ_B – межа міцності матеріалу,

s – координата, вздовж якої розташована тріщина; P та H – невідомі сталі, які відповідають умові пластичності Треска

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \frac{6|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1$$

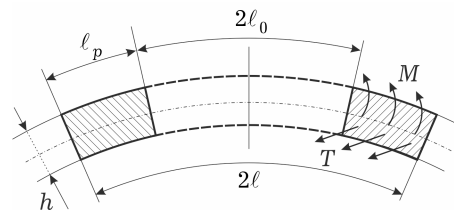


Рис. 1

або пластичного шарніру

$$\left(\frac{P}{h\sigma_\tau}\right)^2 + \frac{2|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1.$$

Тобто у рамках δ_c -моделі замінюємо тріщину відомої довжини $2\ell_0$ тріщиною невідомої довжини 2ℓ , де $\ell = \ell_0 + \ell_p$, на берегах якої виконуються умови

$$T_2(\ell s) = \begin{cases} T(\ell s) - T_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ -T_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases}$$

$$M_2(\ell s) = \begin{cases} M(\ell s) - M_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ -M_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases}$$

де $\tau^* = \ell_0/\ell$, величинами із зірочкою позначено компоненти загального напруженого стану, $T_2^*(\ell s)$ та $M_2^*(\ell s)$ – зусилля і момент у суцільній оболонці на лінії тріщини, ℓ_p – довжина пластичної зони.

У роботі [7] побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для розв'язання пружної задачі про напружений стан оболонки довільної кривини з тріщиною:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{11}(x-t)\psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{13}(x-t)\psi_3(t) dt = -\pi(T_2(x) - T_2^*),$$

$$\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{31}(x-t)\psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{33}(x-t)\psi_3(t) dt = -\pi c^2 R_2(M_2(x) - M_2^*). \quad (1)$$

Ядра \mathcal{K}_{ij} системи (1) наведено у роботі [7], а невідомі функції

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{d[v]}{dt}, \quad \psi_3 = \frac{D(1-\nu)(3+\nu)}{4\ell} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{dt},$$

R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні. Оскільки згідно з постановкою задачі праві частини системи (1) – розривні функції, то розв'язати аналітично її неможливо, а чисельне розв'язання за допомогою методу механічних квадратур або будь-якого іншого наближеного методу ускладнене. Тому шукані функції подамо у вигляді

$$\psi_1(t) = g_1(t) + th(t), \quad \psi_3(t) = g_3(t) + mh(t),$$

де $t = P/T_2^*$, $m = c^2 R_2 H/T_2^*$, функція $h(t)$ – розв'язок рівняння

$$\int_{-1}^1 \frac{h(t)}{t-x} dt = \pi f(x), \quad |x| \leq 1. \quad (2)$$

Тут $f(x) = \begin{cases} -a, & |x| < \tau^*, \\ -a + b(x), & \tau^* < |x| < 1, \end{cases}$ константу a визначаємо з умови існування розв'язку рівняння (2):

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{m^* - \tau^*}{1 - \tau^*} \arccos(\tau) + \frac{2}{\pi} \frac{1 - m^*}{1 - \tau^*} \sqrt{1 - (\tau^*)^2}. \quad (3)$$

Формула (3) співпадає з формулою, отриманою у роботі [4]. Це трансцендентне рівняння, яке можна розв'язати відносно τ^* чисельними методами при конкретних значеннях a .

Розв'язок рівняння (2) відповідає ізотропній пластині з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу і має вигляд

$$h(t) = \frac{P}{\pi} \frac{m^* - \tau^*}{1 - \tau^*} \ln \left| \frac{\tau^* - t}{\tau^* + t} \cdot \frac{1 + t\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - t^2)}}{1 - t\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - t^2)}} \right| -$$

$$- \frac{Pt}{\pi} \frac{1 - m^*}{1 - \tau^*} \ln \left| \frac{1 - (t\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - t^2)})^2}{(\tau^* - t)(\tau^* + t)} \right|.$$

Перепишемо систему (1) відносно шуканих функцій $\psi_1(t)$ і $\psi_3(t)$, поділивши обидва її рівняння на T_2^* (враховуючи, що $M_2^* = 0$ за постановкою задачі):

$$\int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{11}(x-t)g_1(t) + \mathcal{K}_{13}(x-t)g_3(t)) dt + t \left(\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{11}(x-t)h(t) dt + a\pi \right) +$$

$$+ m \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{13}(x-t)h(t) dt = \pi,$$

$$\int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{31}(x-t)g_1(t) + \mathcal{K}_{33}(x-t)g_3(t)) dt + t \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{31}(x-t)h(t) dt +$$

$$+ m \left(\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{33}(x-t)h(t) dt + a\pi \right) = 0. \quad (4)$$

Отриману систему СІР відносно невідомих t , m , $g_1(t)$, $g_3(t)$ з неперервними правими частинами будемо розв'язувати чисельно, використовуючи метод механічних квадратур. Цей метод дозволяє звести СІР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих підінтегральних функцій у зазначених точках (вузлах інтерполяційного полінома).

Кожне рівняння СІР зводиться до системи $n+1$ рівнянь, кожне з яких відповідає значенню інтегрального рівняння у точках (x_m, y_k) , де $x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2(n+1)}\right)$, $m = 1, \dots, n+1$, – зовнішні вузли, $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, \dots, n$, – внутрішні вузли. Схематично матрицю отриманої системи можемо подати таким чином:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c|ccc|c|c} A(x_1, y_1) & \dots & A(x_1, y_n) & B(x_1) & C(x_1, y_1) & \dots & C(x_1, y_n) & D(x_1) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(x_{n+1}, y_1) & \dots & A(x_{n+1}, y_n) & B(x_{n+1}) & C(x_{n+1}, y_1) & \dots & C(x_{n+1}, y_n) & D(x_{n+1}) & 1 \\ \hline E(x_1, y_1) & \dots & E(x_1, y_n) & F(x_1) & G(x_1, y_1) & \dots & G(x_1, y_n) & H(x_1) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(x_{n+1}, y_1) & \dots & E(x_{n+1}, y_n) & F(x_{n+1}) & G(x_{n+1}, y_1) & \dots & G(x_{n+1}, y_n) & H(x_{n+1}) & 0 \end{array} \right\|,$$

де

$$A(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} \mathcal{K}_{11}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$B(x_m) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{11}^r(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a,$$

$$C(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} \mathcal{K}_{13}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$D(x_m) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{13}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2},$$

$$E(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} \mathcal{K}_{31}(x_m - y_k)(1 - y_k^2),$$

$$F(x_m) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{31}(x_m - y_k) h(y_k) \sqrt{1 - y_k^2},$$

$$G(x_m, y_k) = \frac{1}{n+1} \mathcal{K}_{33}(x_m - y_k) (1 - y_k^2),$$

$$H(x_m) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{33}^r(x_m - y_k) h(y_k) \sqrt{1 - y_k^2} + a.$$

Система сумісна і не вироджена, для її розв'язання можна використати метод Гаусса.

Розв'язавши систему, перевіряємо виконання умови пластичності. Якщо вона не виконується з заданою точністю, змінюємо значення $\tau^* = \ell_0/\ell$ і знову розв'язуємо систему.

Застосовуючи описаний метод до пологої циліндричної оболонки, отримали результати, які узгоджуються з наведеними у роботі [5].

На рис. 2 зображено залежність відносної зони пластичності $\tau^* = \frac{\ell_0}{\ell}$ від рівня зовнішнього навантаження $n_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_\tau}$ для циліндричної оболонки з наскрізною тріщиною при значеннях параметра $m^* = 1, 1.5, 2$, що характеризує зміцнення матеріалу ($m^* = 1$ відповідає випадку ідеально пружно-пластичного матеріалу). При цьому вважали, що $\frac{\ell_0}{R_2} = 0.2$.

На рис. 3 наведено залежність τ^* від кривини оболонки λ . При цьому $\frac{\ell_0}{R_2} = 0.05$, $n_0 = 0.1$, $m^* = 1, 1.5, 2$.

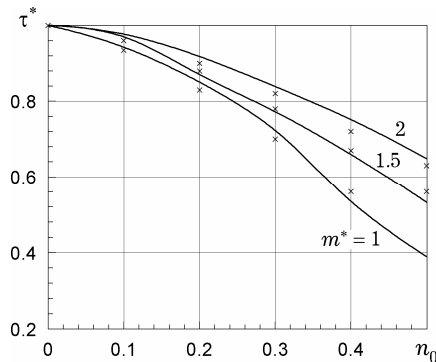


Рис. 2

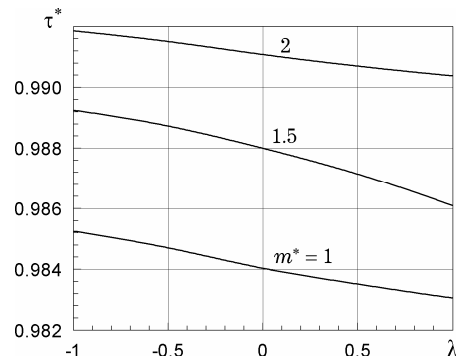


Рис. 3

На основі отриманих результатів числових розрахунків можемо стверджувати, що внаслідок зміцнення матеріалу довжина пластичної зони зменшується.

1. *Бастун В. Н., Каминский А. А.* Прикладные проблемы механики процессов деформационного упрочнения конструкционных металлических материалов // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 10. – С. 12–51.
The same: *Bastun V. N., Kaminskii A. A.* Applied problems in the mechanics of strain hardening of structural metallic materials // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1092–1129.
2. *Данилов В. Л.* К формулировке закона деформационного упрочнения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 6. – С. 146–150.
3. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – **6**, № 3. – С. 314–317.

4. Каминский А. А., Галатенко Г. В. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 4. – С. 54–60.
Te same: Kaminskii A. A., Galatenko G. V. Investigation of fatigue crack growth in materials with hardening // Int. Appl. Mech. – 1984. – **20**, No. 4. – P. 346–351.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. Прагер В. Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 325–335.
7. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортоотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7.) – С. 212–249.
8. A. El Megharbel, G. A. El Nassera, Aly El Domiaty. Bending of tube and section made of strain-hardening materials // J. Materials Proces. Technol. – 2008. – **203**, No. 1-3. – P. 372–380.
9. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening // Acta mech. – 1965. – **1**, No. 2. – P. 81–92.
10. Caner Şimşira, Pinar Karpuzb, Cemil Hakan Gür. Quantitative analysis of the influence of strain hardening on equal channel angular pressing process // Comput. Materials Sci. – 2010. – **48**, No. 3. – P. 633–639.
11. Duszec M. K., Perzyna P. On combined isotropic and kinematic hardening effects in plastic flow processes // Int. J. Plasticity. – 1991. – **7**. – P. 351–364.
12. Golub V. P., Kobzar Yu. M., Fernati P. V. An approach to constructing a rheological model of a strain-hardening medium // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 776–784.
Te same: Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Об одном подходе к построению реологической модели среды с упрочнением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 7. – С. 81–91.
13. Ji Hyun Sunga, Ji Hoon Kimb, R. H. Wagoner. A plastic constitutive equation incorporating strain, strain-rate, and temperature // Int. J. Plasticity. – 2010. – **26**, No. 12. – P. 1746–1771.
14. Khan A., Kamili M., Jackson G. On the evolution of isotropic and kinematic hardening with finite plastic deformation. Part 1 // Int. J. Plasticity. – 1999. – **15**. – P. 1265–1275.
15. Toribio J., Kharin V. Localized plasticity near a crack tip in a strain hardening material subjected to mode I loading // Materials Sci. and Eng. A. – 2001. – **319-321**. – P. 535–539.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ СО СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Решена задача об определении напряженного состояния упруго-пластической изотропной оболочки произвольной кривизны со сквозной трещиной с учетом упрочнения материала. Получена система сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно методом механических квадратур. Исследовано влияние упрочнения материала на основные характеристики напряженного состояния.

STRESS STATE OF ELASTICO-PLASTIC ISOTROPIC SHELL WITH THROUGH CRACK WITH REGARD FOR MATERIAL HARDENING

The problem for determining the stress state of elastico-plastic isotropic shell of arbitrary curvature with a through crack with regard for material hardening is solved. A system of singular integral equations which is solved numerically by the mechanical quadratures method is obtained. The influence of material hardening on the basic characteristics of stress state is studied.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
02.09.09