УДК 517.983.54

А. В. Голушков

ЗАДАЧА НИКОЛЕТТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи Николетти для системы дифференциальных уравнений дробного порядка.

Задача Николетти (обобщенная задача Коши) для системы дифференциальных уравнений $y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $y_i(x_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, изучалась в работах А. Б. Найшуля, Л. Н. Ешукова, В. С. Блинчевского и других. В настоящей работе рассматривается задача Николетти для системы дифференциальных уравнений дробного порядка. Получены условия существования и единственности решения этой задачи.

1. Пусть $J = [a, b]$, $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(z)$ − гамма-функция Эйлера. Для $f(x) \in L(J)$ выражения

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad I_{b-}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},$$

являются [3, с. 42] соответственно левосторонним и правосторонним интегралами Римана – Лиувилля порядка α, а

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad D_{b-}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},$$

являются [3, с. 43] соответственно левосторонней и правосторонней производными Римана – Лиувилля порядка α.

Для $c \in [a, b]$ полагаем

$$I_c^{\alpha} f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x \frac{f(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \qquad D_c^{\alpha} f(x) = \operatorname{sgn}(x-c) \frac{df_{1-\alpha}(x)}{dx},$$

$$f_{1-\alpha}(x) = I_c^{1-\alpha} f(x).$$

Интеграл $I_c^{\alpha} f(x)$ при $x > c$ совпадает [2, с. 13] с $I_{c+}^{\alpha} f(x)$, а при $x < c$ − с $I_{c-}^{\alpha} f(x)$, а также производная $D_c^{\alpha} f(x)$ при $x > c$ совпадает с $D_{c+}^{\alpha} f(x)$, а при $x < c$ совпадает с $D_{c-}^{\alpha} f(x)$.

Согласно полугрупповому свойству дробного интегрирования [3, с. 42] получим, что $I_c^{\gamma} I_c^{\beta} f(x) = I_c^{\beta} I_c^{\gamma} f(x) = I_c^{\gamma+\beta} f(x)$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$. В частности, если

$$I_c^1 f(x) = \operatorname{sgn}(x-c) \int_c^x f(t)\,dt,$$

то

$$I_c^{1-\alpha} I_c^{\alpha} f(x) = I_c^1 f(x).$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $f(x) : J \to \mathbb{R}$ − измеримая функция и $|f(x)| \le M$ почти всюду на J. Тогда*

$$\beta(x) = I_c^{\gamma} f(x) \in C(J), \qquad \gamma \in (0,1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно докажем, что $\beta(x) \in C([a,c) \cup (c,b])$. Пусть $c < x_1 < x_2 < b$. Тогда

$$|\beta(x_2)-\beta(x_1)| =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left|\int_c^{x_1}((x_2-t)^{\gamma-1}-(x_1-t)^{\gamma-1})f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{\gamma-1}f(t)\,dt\right| \le$$
$$\le \frac{M}{\Gamma(\gamma)}\left[\int_c^{x_1}((x_1-t)^{\gamma-1}-(x_2-t)^{\gamma-1})\,dt + \int_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{\gamma-1}dt\right] =$$
$$= \frac{M}{\Gamma(\gamma+1)}\left[2(x_2-x_1)^{\gamma}-((x_2-c)^{\gamma}-(x_1-c)^{\gamma})\right]. \quad (1)$$

Так как [1, с. 21] $|\sigma_1^{\lambda}-\sigma_2^{\lambda}| \le |\sigma_1-\sigma_2|^{\lambda}$ для $0 \le \lambda \le 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, то из (1) следует, что

$$|\beta(x_2)-\beta(x_1)| \le \frac{2M(x_2-x_1)^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

Такую же оценку получаем, когда $a \le x_1 < x_2 < c$. Следовательно, $\beta(x) \in$ $\in C([a,c)\cup(c,b])$. Учтем, что $|\beta(x)| \le \dfrac{M|x-c|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ для $x \in [a,c)\cup(c,b]$. Тогда $\lim\beta(x) = 0$ при $x \to c$. Полагая $\beta(c) = 0$, получим, что $\beta(x) \in C(J)$. ◊

Пусть $q(x) = f(x) - f(c)$. Регуляризованной производной функции $f(x)$ с началом в точке c называем [6, 7] функцию $\bar{D}_c^{\alpha} f(x) = D_c^{\alpha} q(x)$.

2. Пусть $x_i \in J$ (здесь и далее $i = 1,\ldots,n$). Рассмотрим систему

$$\bar{D}_{x_i}^{\alpha} y_i(x) = F_i[x, y(x)] \equiv F_i[x, y_1(x),\ldots, y_n(x)], \quad (2)$$

решение которой удовлетворяет условиям

$$y_i(x_i) = \gamma_i, \quad (3)$$

где $\bar{D}_{x_i}^{\alpha} y_i(x) = D_{x_i}^{\alpha} q_i(x)$, $q_i(x) = y_i(x) - \gamma_i$.

Задача Коши для дифференциальных уравнений, которые содержат регуляризованную производную дробного порядка, рассматривалась в [6, 7] и других. Пусть в области $S = J \times G$, $G = \{(y_1,\ldots,y_n) : |y_i - \gamma_i| \le r\}$, функции $F_i(x, y_1,\ldots,y_n)$ удовлетворяют условиям:

(***а***) измеримы по x при каждом фиксированном $y = (y_1,\ldots,y_n)$;

(***б***) непрерывны по y при каждом фиксированном x;

(***в***) $|F_i(x, y_1,\ldots,y_n)| \le M$.

Под решением задачи (2), (3) понимаем такую вектор-функцию $y(x) =$ $= (y_1(x),\ldots,y_n(x))$, что $y_i(x) \in C(J)$, $y_{i,1-\alpha}(x) = I_{x_i}^{1-\alpha} y_i(x) \in AC(J)$, удовлетворяют условиям (3) и системе (2) для почти всех $x \in J$.

Теорема 1. *Пусть функции $F_i(x, y_1,\ldots,y_n)$ удовлетворяют условиям* (***а***), (***б***), (***в***). *Для того чтобы вектор-функция $y(x)$ была решением задачи* (2), (3), *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $y(x)$ была решением системы интегральных уравнений*

$$y_i(x) = \gamma_i + \frac{\operatorname{sgn}(x-x_i)}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_i}^{x}\frac{F_i[t, y(t)]\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y(x)$ − решение задачи (2), (3). Тогда $y_i(x) \in C(J)$, $y_{i,1-\alpha}(x) \in AC(J)$, а

$$q_{i,1-\alpha}(x) = y_{i,1-\alpha}(x) - \frac{\gamma_i |x - x_i|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \qquad (5)$$

Так как $|x - x_i|^{1-\alpha} = (1-\alpha)\cdot \operatorname{sgn}(x - x_i) \int\limits_{x_i}^{x} |t - x_i|^{-\alpha}\, dt$ – абсолютно непрерывная функция, то $q_{i,1-\alpha}(x) \in AC(J)$ и, как следует из (5), $q_{i,1-\alpha}(x_i) = 0$ поскольку согласно лемме $y_{i,1-\alpha}(x_i) = 0$.

По определению регуляризованной производной

$$\bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) = \operatorname{sgn}(x - x_i) \frac{dq_{i,1-\alpha}(x)}{dx}.$$

Тогда, учитывая, что $q_{i,1-\alpha}(x_i) = 0$, получим выражение

$$I^{1}_{x_i} \bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) = \operatorname{sgn}^2(x - x_i) \int\limits_{x_i}^{x} \frac{dq_{i,1-\alpha}(t)}{dt}\, dt = q_{i,1-\alpha}(x),$$

которое представим в виде

$$I^{1-\alpha}_{x_i}\left(I^{\alpha}_{x_i} \bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) - q_i(x)\right) = 0. \qquad (6)$$

Применяя к представлению (6) последовательно операции $I^{\alpha}_{x_i}$ и $\frac{d}{dx}$, получим

$$I^{1}_{x_i}\left(I^{\alpha}_{x_i} \bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) - q_i(x)\right) = 0,$$

$$I^{\alpha}_{x_i} \bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) = q_i(x) \qquad \text{для почти всех} \qquad x \in J. \qquad (7)$$

Так как $y_i(x)$ – решение задачи (2), (3), то (7) можно представить в виде

$$I^{\alpha}_{x_i} F_i[x, y(x)] = q_i(x) \qquad \text{для почти всех} \qquad x \in J. \qquad (8)$$

В силу условий (***а***), (***б***), (***в***) $F_i[x, y(x)] \in L(J)$ и $|F_i[x, y(x)]| \le M$. Тогда согласно лемме $\beta_i(x) = I^{\alpha}_{x_i} F_i[x, y(x)] \in C(J)$. Поэтому (8) имеет место для $x \in J$. Стало быть, $y(x)$ – решение системы интегральных уравнений (4).

Пусть теперь $y_i(x) \in C(J)$ – решение системы (4). Так как по лемме $\beta_i(x_i) = 0$, то $y_i(x)$ удовлетворяют условиям (3). Согласно (4)

$$q_i(x) = y_i(x) - \gamma_i = I^{\alpha}_{x_i} F_i[x, y(x)].$$

Тогда

$$q_{i,1-\alpha}(x) = I^{1-\alpha}_{x_i} I^{\alpha}_{x_i} F_i[x, y(x)] = I^{1}_{x_i} F_i[x, y(x)] \in AC(J).$$

Следовательно, для почти всех $x \in J$

$$\bar{D}^{\alpha}_{x_i} y_i(x) = \operatorname{sgn}(x - x_i) \frac{dq_{i,1-\alpha}(x)}{dx} = \operatorname{sgn}^2(x - x_i) \frac{d}{dx} \int\limits_{x_i}^{x} F_i[t, y(t)]\, dt =$$

$$= F_i[x, y(x)].$$

Этим завершается доказательство теоремы 1. ◊

Теорема 2. *Если функции* $F_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют условиям* (***а***), (***б***), (***в***) *и*

$$\frac{2M(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \le r, \qquad (9)$$

то множество решений задачи (2), (3) *не пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пространство $C^n(J)$ непрерывных на J вектор-функций $y(x)$ с нормой $\|y(x)\| = \max\limits_i \max\limits_J |y_i(x)|$. В этом пространстве выделим множество Y вектор-функций $y(x)$, которые удовлетворяют условиям $y_i(x_i) = \gamma_i$, $y_{i,1-\alpha}(x) \in AC(J)$ и

$$|y_i(x_2) - y_i(x_1)| \le \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}|x_2 - x_1|^\alpha, \tag{10}$$

для любых $x_1, x_2 \in J$. Очевидно, что Y − замкнутое и выпуклое множество. Из (10) при $x_1 = x_i$, $x_2 = x \ne x_i$ вытекает, что

$$\|y(x) - \overline{\gamma}\| \le \frac{2M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n). \tag{11}$$

В силу оценок (10), (11) множество Y является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Согласно теореме Арцела множество Y является компактным подмножеством пространства $C^n(J)$.

На множестве Y определим оператор T, который каждой вектор-функции $y(x) \in Y$ ставит в соответствие вектор-функцию $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ такую, что $u_i(x) = \gamma_i + \dfrac{\operatorname{sgn}(x - x_i)}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_{x_i}^{x} \frac{F_i[t, y(t)]\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}$. Очевидно, что $u_i(x_i) = \gamma_i$. Проверим, что вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет условию (10).

Пусть $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_i < x_2$. Тогда

$$\begin{aligned} |u_i(x_2) - u_i(x_1)| &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left| \int\limits_{x_i}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} F_i[t, y(x)]\,dt - \int\limits_{x_1}^{x_i} (t - x_1)^{\alpha-1} F_i[t, y(x)]\,dt \right| \le \\ &\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left| \int\limits_{x_i}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1}\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_i} (t - x_1)^{\alpha-1}\,dt \right| = \\ &= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left((x_2 - x_i)^\alpha + (x_i - x_1)^\alpha\right) \le \\ &\le \frac{2^{1-\alpha} M (x_2 - x_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \le \frac{2M(x_2 - x_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

(Согласно [1, с. 21] для $0 \le \lambda \le 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ имеет место оценка $\sigma_1^\lambda + \sigma_2^\lambda \le 2^{1-\lambda}(\sigma_1 + \sigma_2)^\lambda$.) Такую же оценку получаем и в других случаях расположения точек x_1, x_2 относительно x_i. Кроме того,

$$u_{i,1-\alpha}(x) = I_{x_i}^{1-\alpha} u_i(x) = \frac{\gamma_i |x - x_i|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + I_{x_i}^{1} F_i[x, y(x)].$$

Следовательно, $u_{i,1-\alpha}(x) \in AC(J)$. Таким образом, оператор T переводит множество Y в его часть. Докажем, что оператор T непрерывен. Рассмотрим последовательность $\{y_{(x)}^{(k)}\} \subset Y$, $y^{(k)}(x) = (y_1^{(k)}(x), \ldots, y_n^{(k)}(x))$, причем $\left\|y^{(k)}(x) - y(x)\right\| \to 0$ при $k \to \infty$ и $y(x) \in C^n(J)$.

Докажем, что $Ty^{(k)}(x) \to Ty(x)$, $k \to \infty$. В силу условия (**б**) для каждого $x \in J$ при $k \to \infty$ $F_i[x, y^{(k)}(x)] \to F_i[x, y(x)]$. По теореме Лебега [4, с. 354]

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_i}^{x}|x-t|^{\alpha-1}F_i[t,y^{(k)}(x)]\,dt=\int_{x_i}^{x}|x-t|^{\alpha-1}F_i[t,y(x)]\,dt\,.$$

Таким образом, непрерывный оператор T переводит выпуклое, замкнутое и компактное множество Y в его часть. По теореме Шаудера [5] оператор T имеет неподвижную точку $y(x)=Ty(x)$, $y(x)\in Y$, которая является решением задачи (2), (3). ◊

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и функции* $F_i:S\to$ $\to\mathbb{R}$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$|F_i(x,y_1,\dots,y_n)-F_i(x,z_1,\dots,z_n)|\le K\sum_{j=1}^{n}|y_j-z_j|\,,$$

а также

$$\rho=\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\max_J\sum_{j=1}^{n}|x-x_j|^{\alpha}<1\,. \tag{12}$$

Тогда задача (2), (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $u_i(x)$ и $y_i(x)$, $i=1,\dots,n$, − два решения задачи (2), (3) и пусть $\delta=\max_J\sum_{j=1}^{n}|u_j(x)-y_j(x)|$. Тогда

$$|u_i(x)-y_i(x)|\le\frac{K}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_i}^{x}|x-t|^{\alpha-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}|u_j(t)-y_j(t)|\,dt\right|\le\frac{K\delta|x-x_i|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i(x)-y_i(x)|\le\frac{K\delta}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|^{\alpha}\le\rho\cdot\delta\,.$$

Следовательно, $\delta\le\rho\cdot\delta$. Принимая во внимание условие (12), получаем, что $\delta=0$, т.е. $u_i(x)=y_i(x)$ при $x\in J$. ◊

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. − Москва: Наука, 1968. − 511 с.
2. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. − Нальчик, 2000. − 297 с.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. − Минск: Наука и техника, 1987. − 688 с.
4. *Титчмарш Е.* Теория функций. − Москва: Наука, 1980. − 463 с.
5. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теория операторов. − Москва: Мир, 1983. − 431 с.
6. *Эйдельман С. Д., Чикрий А. А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. − 2000. − **52**, № 11. − С. 1566−1583.
7. *Kilbas A. A., Marzan S. A.* Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. − 2004. − **7**, No. 3. − P. 297−321.

ЗАДАЧА НІКОЛЕТТІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Отримані достатні умови існування та єдності розв'язку задачі Ніколетті для системи диференціальних рівнянь дробового порядку.

NIKOLETTY TYPE PROBLEM FOR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of the Nikoletty type problem for a system of differential equations of the fractional order are obtained.

Ин-т бизнеса, экономики и информ. технологий,
Одеск. нац. политехн. ун-та, Одесса

Получено
18.04.07