

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрена новая нелинейная модель распространения волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном – жидкий слой со свободной поверхностью». Методом многомасштабных разложений получены первые три линейные приближения нелинейной задачи. Построены и подробно анализируются решения задачи первого приближения. Показано, что существует внутренняя и поверхностная составляющие волнового поля и проанализировано их взаимодействие.

Введение. Изучение внутренних волн конечной амплитуды привлекало большое внимание многочисленных исследователей: (Benjamin, 1966, 1967) [11, 12], (Benney, 1966) [13], (Ono, 1975) [30], (Davis, Acrivos, 1967) [20], (Kubota et al., 1978) [27]. Большинство выполненной теоретической работы было связано с анализом волновых движений в системах, где внутренние волны слабо линейны и длинные по отношению к полной глубине жидкости. Необходимые процедуры приводят к уравнению Кортевега де Фриза, описывающего эволюцию волнового движения при балансе между нелинейностью и дисперсией (Grimshaw et al., 2002) [23]. Это уравнение было достаточно хорошо изучено и были развиты методы, дающие точные решения для произвольно заданных начальных условий (Segur, 1973) [31].

Распространение и устойчивость волновых пакетов на границе раздела полубесконечных жидкостей впервые исследовал Найфе (Nayfeh, 1976) [29]. В работе (Lu, Chwang, 2005) [28] исследуется аналитически взаимодействие интерфейсных волн в двух полубесконечных жидкостях в случаях двух невязких жидкостей и комбинаций, когда одна из жидкостей вязкая.

В то же время некоторые более поздние работы касаются этой проблемы, отметим некоторые из них (Segur, Hammack, 1982) [32], (Yuen, Lake, 1982) [42], (Ablowitz, Segur, 1980) [9], (Whitham, 1980) [41], (Bhatnagar, 1979) [14]. В работе (Selezov, Korsunsky, 1992) [35] исследовалось асимптотическим методом распространение волн в двухслойной жидкометаллической среде в МГД-постановке. Распространение нелинейных волн в двух- и трехслойных жидкостях исследовалось в работах (Selezov, Huc, 1997) [34], (Selezov et al., 1997) [33], а возбуждение нелинейных волн при наличии препятствия на поверхности раздела в работе (Selezov et al., 1999) [36].

В приведенном ниже анализе представлены в основном последние современные достижения. В (Vincze et al., 2007) [39] исследуется взаимодействие верхней жидкости с нижним селевым потоком и показано возникновение вертикальных вибраций, обусловленных генерированием внутренних волн в пикноклине. В работе (Макаренко, Мальцева, 2008) [3] исследуется в рамках второго приближения теории мелкой воды распространение внутренних волн в двухслойной жидкости, ограниченной сверху и снизу, в случае, когда в каждом слое есть слабая непрерывная стратификация. В работе (Debsarma, Das, 2007) [21] исследуется в рамках капиллярно-гравитационной постановки устойчивость распространения двух волновых пакетов распространяющихся в одном направлении, но имеющих разные длины волн. В (Carr, Davies, 2006) [17] представлены эксперименты по распространению волн в двухслойной жидкости, генерируемых разрежением сверху, что в результате приводит к формированию струи вдоль донной поверхности. В работе (Sutherland, Nault, 2007) [38] представлены эксперименты по распространению волн в двухслойной жидкости с учетом конечной толщины интерфейса. В работе (Насиуев, 2006) [24] получены аналитические ре-

шения задачи о распространении волн в кусочно-постоянной двухслойной жидкости, ограниченной сверху и снизу жесткими границами. Рассматриваются две задачи: в одной к поверхности приложен импульс типа δ -функции по времени и координате, в другой – этот импульс движется вдоль поверхности раздела с постоянной скоростью. Решения построены с применением интегральных преобразований Фурье с последующим переходом к оригиналам в комплексной плоскости. Рассмотрены предельные случаи глубокой и мелкой воды и установлены качественные особенности и режимы распространения неустановившихся и стационарных волн (критические скорости и резонансы).

Из работ, опубликованных в последнее время об исследованиях двухслойных жидкостей, отметим следующие работы. В статье (Buick, Martin, 2003) [15] и других моделировались внутренние волны между двумя вязкими несжимаемыми слоями и результаты были сравнены с волнами, генерированными в лабораторных условиях. Установлено довольно хорошее соответствие. Внимания заслуживают также теоретические исследования в работе (Choi, Camassa, 1999) [19], где были решены модельные уравнения, выведенные из уравнений Эйлера, описывающие эволюцию внутренних гравитационных волн в двухслойной невязкой и несмешивающейся жидкости, причем никакие ограничения на амплитуду не наложены. Эти же исследователи указали области пригодности асимптотических приближений для сильно нелинейных волновых пакетов внутренних волн в системе «слой – слой» (Camassa et al., 2006) [16].

До настоящего времени в преобладающем количестве задач механики и физики, где применялся метод многомасштабных разложений, были получены результаты до третьего порядка. Среди них можно особенно выделить класс задач, учитывающих поверхностное натяжение, что существенно влияет на распространение капиллярно-гравитационных волн, где имеет место важный вклад высоких гармоник в волновой процесс в целом. В публикациях (Авраменко, 2001) [1], (Селезов, Авраменко, 2000–2001) [4, 5], (Селезов и др., 2005–2006) [6, 7] исследованы двухслойные системы вида «полупространство – полупространство», «слой – полупространство» до четвертого приближения и система «слой – слой» до третьего приближения, а также представлено обоснование методологических нюансов метода многомасштабных разложений. Анализ предыдущих исследований показывает, что большинство задач распространения волновых пакетов вдоль поверхности контакта в рамках слабо нелинейных моделей касались двухслойных жидкостей, при этом изучались поверхностные или внутренние волновые пакеты.

В настоящее время особый интерес представляют исследования не только распространения отдельных волновых пакетов, но и взаимодействие внутренних и поверхностных волн. Приближение «твердой крышки» достаточно обосновано в рамках отдельных моделей волновых движений, но области его достоверности для гравитационно-капиллярных волн в рамках слабо нелинейной модели также представляют значительный интерес.

В работе (Watson, 1996) [40] проведено исследование генерации внутренних волн поверхностными. Распространение гравитационно-капиллярных поверхностных волн при наличии генерации внутренних волн большой амплитуды рассмотрено в коротковолновом приближении (Bakhanov et al., 1999) [10]. В работе (Гримшоу, Пелиновский, 1995) [2] изучено взаимодействие поверхностных и внутренних волн с движущимися возмущениями. В работе (Donato et al., 1999) [22] изучено распространение коротких поверхностных волн с применением лучевой теории для линейных волн, а также и полное нелинейное численное решение. Исследованы нелинейные внутренние волны и солитоны в шельфовой зоне Японского моря (Серебряный и др., 2005) [8]. Выявлены основные закономерности направленности распространения внутренних волн на шельфе и вблизи материкового склона. В

работе (Chi-Min Liu, 2006) [18] на основе метода возмущений построены решения второго порядка. Исследуется передаточная функция и влияние эффектов второго порядка на волновой профиль.

В работе (Hashizume, 1980) [25] взаимодействие между короткими поверхностными и длинными внутренними волнами в двухслойной жидкости исследовано методом многомасштабных разложений. При равенстве групповой скорости поверхностных волн и фазовой скорости внутренних волн получено стационарное решение для связанной огибающей. Показано сильное влияние на огибающую такого взаимодействия. Отметим также работы (Holloway et al., 2000) [26] и (Shingareva, Celaya, 2007) [37].

В данной работе рассматривается новая нелинейная задача распространения волновых пакетов в гидродинамической системе, которая состоит из двух жидкостей с разными свойствами, верхняя из которых ограничена сверху свободной поверхностью. Устанавливаются условия распространения волновых пакетов как на свободной поверхности, так и на поверхности контакта жидкостей. На обеих поверхностях учитывается сила поверхностного натяжения.

1. Постановка задачи и метод решения. Исследуется задача о распространении двумерных волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности контакта жидкого слоя с плотностью ρ_1 и верхнего жидкого слоя с плотностью ρ_2 (рис. 1). Слои разделены поверхностью контакта $z = \eta(x, t)$, а верхний слой ограничен свободной поверхностью $z = \eta_0(x, t)$. При решении учитываем силы поверхностного натяжения на поверхности контакта и на свободной поверхности. Сила тяжести направлена перпендикулярно к поверхности раздела в отрицательном z -направлении.

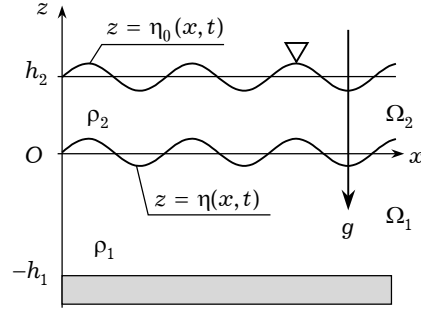


Рис. 1

Здесь введены безразмерные величины при помощи характерной длины L , равной толщине нижнего слоя, максимального отклонения свободной поверхности a , плотности нижнего слоя жидкости ρ_1 , характерного времени $(L/g)^{1/2}$, где g – ускорение свободного падения:

$$(x, z) = L(x^*, z^*), \quad t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*, \quad \rho_2 = \rho_1 \rho^*, \quad (\eta, \eta_0) = a(\eta^*, \eta_0^*),$$

$$\varphi = \frac{La}{\sqrt{L/g}} \varphi^*, \quad (T, T_0) = L^2 \rho_1 g (T^*, T_0^*). \quad (1)$$

Представим математическую постановку задачи (звездочки опущены):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \alpha \eta(x, t), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = \alpha \eta_0(x, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho) \eta + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \alpha \rho (\nabla \varphi_2)^2 - T \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

при $z = \alpha \eta(x, t)$, (5)

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0$$

при $z = \alpha \eta_0(x, t)$,

(6)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1 = -\frac{h_1}{L},$$
(7)

где коэффициент нелинейности α введен как отношение $\frac{a}{L} = \alpha$ [11].

Для решения задачи применяется метод многомасштабных разложений до третьего порядка (в дальнейшем звездочки опускаем) (Оно, 1975) [30]. Представим искомые функции отклонения поверхности контакта, отклонения свободной поверхности и потенциалы скоростей в виде

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(X_0, X_1, X_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\ \eta_0(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(X_0, X_1, X_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\ \varphi_j(x, z, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(X_0, X_1, X_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Быстрый масштаб t_0 и короткий масштаб X_0 характеризуют частоту и длину волны, соответственно. Медленные масштабы t_1 , t_2 и длинные масштабы X_1 , X_2 характеризуют временные и пространственные изменения фазы и амплитуды волны ($t_i = t\alpha^i$, $X_i = x\alpha^i$).

2. Три приближения нелинейной задачи. Подставляя формулы (8) в систему (2)–(7), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α , получаем три линейных приближения нелинейной задачи.

Первое приближение (при α):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta_{01}}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t_0} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_0} + (1 - \rho) \eta_1 - T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_0} + \eta_{01} - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1. \quad (16)$$

Второе приближение (при α^2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial X_1} &= 0 & \text{в} & \quad \Omega_1, \\
\frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial X_1} &= 0 & \text{в} & \quad \Omega_2, \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} &= - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} & \text{при} & \quad z = 0, \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} &= - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} & \text{при} & \quad z = 0, \\
\frac{\partial \eta_{01}}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_{02}}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} &= - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} & \text{при} & \quad z = h_2, \\
\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial t_0 \partial z} - \rho \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z} \right) + (1 - \rho) \eta_2 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \right)^2 - \rho \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \right)^2 \right) - \\
&- T \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial X_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0 \partial X_1} \right) = 0 & \text{при} & \quad z = 0, \\
\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_0} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z} + \eta_{02} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \right)^2 - \\
&- T_0 \left(\frac{\partial^2 \eta_{02}}{\partial X_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0 \partial X_1} \right) = 0 & \text{при} & \quad z = h_2, \\
\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} &= 0 & \text{при} & \quad z = -h_1.
\end{aligned} \tag{17}$$

Третье приближение (при α^3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial X_0 \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial X_2} &= 0 & \text{в} & \quad \Omega_1, \\
\frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial X_0 \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial X_2} &= 0 & \text{в} & \quad \Omega_2, \\
\frac{\partial \eta_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial z^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{11}}{\partial z^3} = \\
&= - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_2}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial X_0} - \\
&- \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial z} & \text{при} & \quad z = 0, \\
\frac{\partial \eta_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial z^3} = \\
&= - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_2}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_0} - \\
&- \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} & \text{при} & \quad z = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta_{02}}{\partial t_1} + \frac{\partial \eta_{01}}{\partial t_2} + \frac{\partial \eta_{03}}{\partial t_0} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} - \eta_{02} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \eta_{01}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial z^3} = \\
& = - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_{02}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_0} - \\
& - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \quad \text{при} \quad z = h_2, \\
& \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial t_0} + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial t_0 \partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial t_1 \partial z} + \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{11}}{\partial t_0 \partial z^2} - \rho \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_2} + \right. \\
& + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_0} + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_1 \partial z} + \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z^2} \left. \right) + \\
& + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial t_0 \partial z} + (1 - \rho) \eta_3 + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial X_1} + \\
& + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} - \rho \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial t_0 \partial z} - \\
& - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_1} - \rho \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \\
& - \rho \eta_1 \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - T \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial X_0^2} - T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_1^2} - 2T \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial X_0 \partial X_1} - \\
& - 2T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0 \partial X_2} - \frac{3}{2} T \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\
& \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_0} + \eta_{02} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial t_1 \partial z} + \frac{1}{2} \eta_{01}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial t_0 \partial z^2} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial t_0 \partial z} + \\
& + \eta_{03} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_{01}} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} + \\
& + \eta_{01} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{03}}{\partial X_0^2} - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_1^2} - 2T_0 \frac{\partial^2 \eta_{02}}{\partial X_0 \partial X_1} - \\
& - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0 \partial X_2} - \frac{3}{2} T_0 \left(\frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2, \\
& \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1. \tag{18}
\end{aligned}$$

Полученные приближения на основе метода многомасштабных разложений (Naufeh, 1976) [29] после реализации (17) и (18) должны приводить в итоге к нелинейному уравнению Шредингера, как и в предыдущих исследованиях (Селезов, Авраменко, 2000–2001) [4, 5], (Селезов и др., 2005–2006) [6, 7]. В дальнейшем ограничиваемся подробным анализом первого приближения. В результате будут установлены характерные особенности взаимодействия поверхностных и внутренних волн в рассматриваемой системе.

3. Решения первой линейной задачи и дисперсионное уравнение. Из первой линейной задачи (9)–(16) получаем следующие решения:

$$\eta_1 = Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}, \tag{19}$$

$$\varphi_{11} = -\frac{i\omega}{k} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}, \tag{20}$$

$$\Phi_{12} = \frac{i\omega}{k} \left(\frac{\omega^2 \operatorname{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{\omega^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} \right) (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}), \quad (21)$$

$$\eta_{01} = \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} \right) (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}), \quad (22)$$

где $\theta = kx_0 - \omega t_0$, k – волновое число центра волнового пакета, ω – частота центра волнового пакета. В рамках линейной задачи остаются только масштабы t_0 и x_0 , потому индексы при масштабных переменных опускаем, т.е. ниже пространственную и временную координаты будем обозначать x и t соответственно.

После подстановки найденных решений в соотношение (14) получаем дисперсионное уравнение, которое связывает между собой частоту и волновое число центра волнового пакета:

$$\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho \omega^2 \frac{\omega^2 - (k + T_0 k^3) \operatorname{cth}(kh_2)}{\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0 k^3)} = (1 - \rho)k + Tk^3. \quad (23)$$

Дисперсионное уравнение (23), по существу, определяет условия распространения линейно устойчивых волновых пакетов в рассматриваемой гидродинамической системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью». Полученное дисперсионное уравнение имеет множитель $\frac{\omega^2 - (k + T_0 k^3) \operatorname{cth}(kh_2)}{\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0 k^3)}$, замена которого на $\operatorname{cth}(kh_2)$ приводит к дисперсионному уравнению для системы «слой – слой» (Nayfeh, 1976) [29]. Отметим, что краевые условия на свободной поверхности и на «твердой крышке» не могут быть получены одни из других никаким граничным переходом поскольку они есть физически несовместимы.

Из дисперсионного уравнения (23) получаем биквадратное уравнение

$$\begin{aligned} \omega^4 (\rho + \operatorname{cth}(kh_1) \operatorname{cth}(kh_2)) - \omega^2 [\operatorname{cth}(kh_1)(k + T_0 k^3) + \\ + \rho \operatorname{cth}(kh_2)(k + T_0 k^3) + \operatorname{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)] + \\ + (k + T_0 k^3)(k - \rho k + Tk^3) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

при условии

$$\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \neq 0.$$

Уравнение (24) имеет две пары корней

$$\omega_1^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_2^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где

$$a = \rho + \operatorname{cth}(kh_1) \operatorname{cth}(kh_2), \quad c = (k + T_0 k^3)(k - \rho k + Tk^3),$$

$$\begin{aligned} b = -[\operatorname{cth}(kh_1)(k + T_0 k^3) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)(k + T_0 k^3) + \\ + \operatorname{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)]. \end{aligned}$$

Первая пара корней ω_1^2 аналогична паре корней дисперсионного уравнения системы «полупространство – полупространство», поскольку при бесконечном увеличении толщин слоев, $h_2 \rightarrow \infty$, $h_1 \rightarrow \infty$, выражение (23) для ω_1^2 вырождается в соответствующее дисперсионное уравнение (Nayfeh, 1976) [29]

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{1 + \rho}.$$

Вторая пара корней ω_2^2 для системы «слой – слой со свободной поверхностью» появилась впервые среди аналогичных задач для гидродинамических систем «полупространство со свободной поверхностью», «полупространство – полупространство» (Nayfeh, 1976) [29], «слой с твердой крышкой – полупространство» (Селезов, Авраменко, 2000) [5], «слой – слой» (Авраменко, 2001) [1]. Появление дополнительных корней дисперсионного уравнения обусловлено наличием двух поверхностей, вдоль которых распространяются волновые пакеты: вдоль поверхности контакта – внутренние волны, а вдоль свободной поверхности – поверхностные волны.

4. Анализ результатов. Анализ условий знакоустойчивости и равенства нулю корней уравнения (24) приводит к выводам о том, что $\omega_1^2 = 0$, если $k = \sqrt{\frac{\rho - 1}{T}}$, а ω_2^2 всегда больше нуля. Значит, поверхность контакта системы «слой – слой со свободной поверхностью» линейно устойчива или неустойчива в зависимости от того, есть ли k больше или меньше критического значения $k_c = \sqrt{\frac{\rho - 1}{T}}$, которое отделяет линейно устойчивое волновое движение от неустойчивого.

Проанализируем отношение амплитуд первых приближений отклонений свободной поверхности $\eta_0(x, t)$ и поверхности контакта $\eta(x, t)$, которые соответствуют ω_1^2 и ω_2^2 . Обозначим их a_1 и a_2 соответственно:

$$a_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)},$$

$$a_2 = \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} \right)^{-1}.$$

Величина a_1 характеризует вклад волны с частотой ω_1 в поверхностное движение, а величина a_2 – вклад волны с частотой ω_2 в волновое движение на поверхности контакта жидких сред.

На рис. 2а представлена зависимость a_1 от толщины нижнего слоя при волновых числах $k = 0.01, 1, 2, 3$ в случае, когда $h_2 = 1$, $T = T_0 = 0$, $\rho = 0.6$. При увеличении толщины нижнего слоя для каждого фиксированного значения k существует граничное значение, к которому стремится величина a_1 , характеризующая отношение амплитуды отклонения свободной поверхности к амплитуде отклонения поверхности контакта волны с частотой ω_1 . Анализ показал, что отклонения с частотой ω_1 на поверхности контакта больше, чем отклонения на свободной поверхности, и это характерно для внутренних волн.

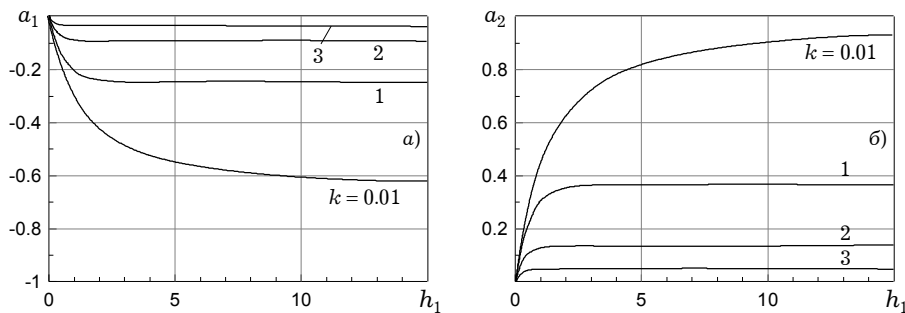


Рис. 2

На рис. 2б представлена зависимость a_2 от толщины нижнего слоя при волновых числах $k = 0.01, 1, 2, 3$ в случае, когда $h_2 = 1$, $T = T_0 = 0$, $\rho = 0.6$. Для каждого фиксированного значения k существует граничное значение, к которому стремится величина a_2 , характеризующая отношение амплитуды отклонения поверхности контакта к амплитуде отклонения свободной поверхности для волны с частотой ω_2 , при увеличении толщины нижнего слоя, при этом значения $a_2 < 1$. Для малых значений волновых чисел граничное значение амплитуды стремится к единице, то есть для длинных волн амплитуды отклонений обеих поверхностей становятся равными. Неравенство $a_2 < 1$ свидетельствует о том, что отклонение с частотой ω_2 на свободной поверхности больше, чем отклонение на поверхности контакта, и это характерно для поверхностных волн.

Изменение отношения ρ плотностей сильно влияет на a_1 для волн с частотой ω_1 . Приближение этого отношения плотностей к единице уменьшает величину a_1 , как показано на рис. 3, где представлены зависимости a_1 от толщины нижнего слоя в случае $h_2 = 1$, $T = T_0 = 0$ при значениях волнового числа $k = 0.01, 1, 2, 3$ для различных значений отношения плотностей: $\rho = 0.7$ (рис. 3а), $\rho = 0.8$ (рис. 3б), $\rho = 0.9$ (рис. 3в). Такая зависимость характерна для внутренних волн, вызванных перепадом плотностей в жидкой среде. Отметим, что для волн с частотой ω_2 величина a_2 практически не зависит от изменения отношения плотностей и ее зависимость от толщины нижнего слоя остается близкой к изображенной на рис. 2б.

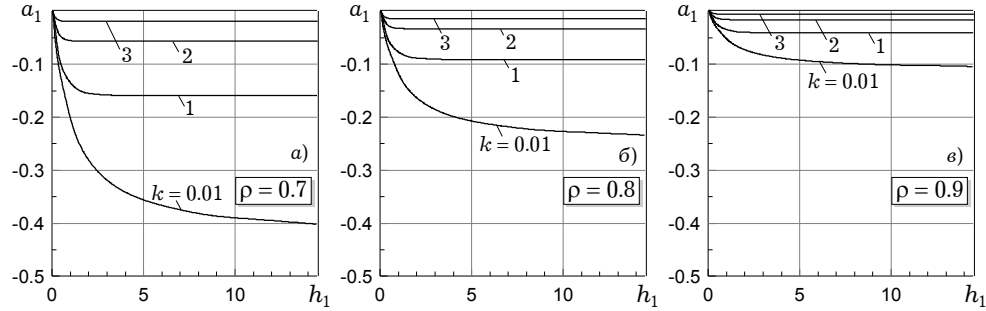


Рис. 3

Нетрудно видеть, что частоты волн удовлетворяют неравенствам $\omega_1 < \omega_2$, то есть внутренняя волна с частотой ω_1 медленнее поверхностной с частотой ω_2 . Это значит, что их сумма будет изменяться во времени, и это будет проявляться в изменении амплитуд суммарных волн на свободной поверхности и на поверхности контакта, то есть будет наблюдаться перекачка энергии от поверхностной волны к внутренней и наоборот. Из формул (17) и (20) следует, что отклонение поверхности контакта в первом приближении состоит из суммы двух гармоник:

$$\eta = A \cos(kx - \omega_1 t) + B a_2 \cos(kx - \omega_2 t),$$

аналогично вычисляется отклонение свободной поверхности

$$\eta_0 = A a_1 \cos(kx - \omega_1 t) + B \cos(kx - \omega_2 t),$$

где A и B — произвольные постоянные, которые определяют амплитуды гармоник с частотами ω_1 и ω_2 .

На рис. 4 представлены картины волнового движения на свободной поверхности $\eta_0(x,t)$ и поверхности контакта $\eta(x,t)$ в первом приближении для таких значений параметров: $A = 0.2$, $B = 0.09$, $k = 1$, $\rho = 0.7$, $h_1 = 3$, $h_2 = 1$ в моменты времени $t = 0$ (рис. 4а) и $t = 6$ (рис. 4б). Видно, что в момент $t = 0$ амплитуда свободной поверхности меньше, чем $B = 0.09$, при этом амплитуда поверхности контакта больше, чем $B = 0.09$. В момент времени $t = 6$ наблюдается противоположная картина.

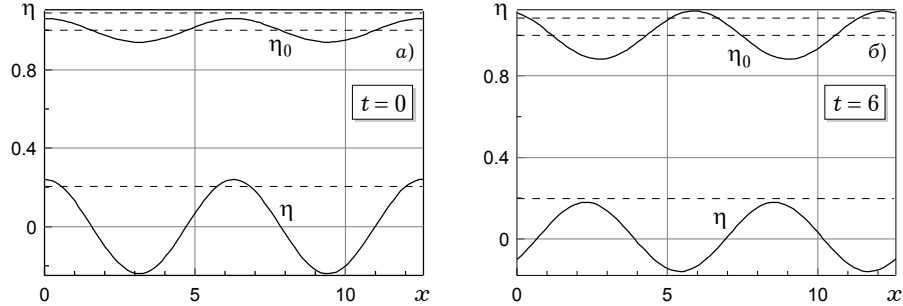


Рис. 4

Отметим, что в постановке задачи были введены безразмерные величины (1) для отклонений свободной поверхности и поверхности контакта двух жидких слоев при помощи одного и того же самого числа a . Известно, что в натуральных условиях амплитуды внутренних и поверхностных волн существенно отличаются, поэтому целесообразно было бы ввести две постоянные безразмеривания отдельно для внутренних и для поверхностных волн. Несмотря на это, качественная картина соотношения внутренних и поверхностных волн будет оставаться такой, как указано выше. Следовательно, в этом случае можно говорить только о качественном анализе взаимодействия внутренних и поверхностных волн.

Выводы. Представлены первые три линейные приближения новой нелинейной задачи о распространении волновых пакетов в двухслойной жидкости, которая снизу ограничена твердым дном, а сверху – свободной поверхностью. В результате анализа первой линейной задачи получены выражения для потенциалов скоростей в верхнем и нижнем слоях, выражения для отклонений свободной поверхности и поверхности контакта жидких сред, а также дисперсионное уравнение, которое имеет две пары корней. Анализ корней дисперсионного уравнения и отношений отклонения свободной поверхности и поверхности контакта показал, что существует внутренняя и поверхностная составляющие волнового поля в системе «слой – слой со свободной поверхностью», которые взаимодействуют между собой.

1. Авраменко О. В. Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2001. – Вип. 50. – С. 122–128.
2. Гримшоу Р., Пелиновский Е. Н. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с бегущими возмущениями // Докл. РАН. – 1995. – **344**, № 3. – С. 394–396.
3. Макаренко Н. Н., Мальцева Ж. Л. Асимптотические модели внутренних стационарных волн // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – **49**, № 4. – С. 151–161.
4. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околорезонансных волновых числах // Динам. системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
5. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 113–122.

6. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовский Ю. В. Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикл. гидромеханика. – 2006. – **8** (80), № 4. – С. 60–65.
7. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовский Ю. В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикл. гидромеханика. – 2005. – **7**(79), № 1. – С. 80–89.
8. Серебряный А. Н., Фурдуйев А. В., Аредов А. А., Охрименко Н. Н. Шум внутренней волны большой амплитуды в океане // Докл. РАН. – 2005. – **402**, № 4. – С. 543–547.
9. Ablowitz M. J., Segur H. Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Math. – 1980. – **62**. – P. 249–262.
10. Bakhanov V. V., Kropfli R. A., Ostrovsky L. A. On the effect of strong internal waves on surface waves // IGARSS '99. Proc. Geoscience and Remote Sensing Symp. IEEE 1999 International. – 1999. – Vol. 1. – P. 170–172.
11. Benjamin T. B. Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. – 1966. – **25**. – P. 241–270.
12. Benjamin T. B. Internal waves of permanent form of great depth // J. Fluid Mech. – 1967. – **29**. – P. 559–592.
13. Benney C. J. Long nonlinear waves in fluid flows // J. Math. Phys. – 1966. – **45**. – P. 52–63.
14. Bhatnagar P. L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – 199 p.
То же: Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – Москва: Мир, 1983. – 136 с.
15. Buick J. M., Martin A. J. Comparison of a lattice Boltzmann simulation of steep internal waves and laboratory measurements using particle image velocimetry // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2003. – **22**, No. 1. – P. 27–38.
16. Camassa R., Choi W., Michallet H., Rusan P.-O., Sveen J. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves // J. Fluid Mech. – 2006. – **549**. – P. 1–23.
17. Carr M., Davies P. A. The motion of an internal solitary wave of depression over a fixed bottom boundary in a shallow, two-layer fluid // Phys. Fluids. – 2006. – **18**. – P. 016601-1–016601-10.
18. Chi-Min Liu Second-order random internal and surface waves in a two-fluid system // Geophys. Res. Lett. – 2006. – **33**. – L06610, doi: 10.1029/2005GL025477.
19. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1999. – **396**. – P. 1–36.
20. Davis R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // J. Fluid Mech. – 1967. – **29**. – P. 593–607.
21. Debsarma S., Das K. P. Fourth-order nonlinear evolution equations for a capillary-gravity wave packet in the presence of another wave packet in deep water // Phys. Fluids. – 2007. – **19**. – P. 097101-1–097101-16.
22. Donato A. N., Peregrine E. D. H., Stocker J. R. The focusing of surface waves by internal waves // J. Fluid Mech. – 1999. – **384**. – P. 27–58.
23. Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O. Higher-order Korteweg – de Vries models for internal solitary wave in a stratified shear flow with a free surface // Nonlinear Processes in Geophys. – 2002. – **9**, No. 3. – P. 221–235.
24. Hacıyev B. I. Unstationary waves in two-layered fluid caused by normal loading at the interface // Proc. IMM (Inst. Mathematics and Mechanics) NAS of Azerbaijan. – 2006. – P. 119–126.
25. Hashizume Y. Interaction between short surface waves and long internal waves // J. Phys. Soc. Japan. – 1980. – **48**, No. 2. – P. 631–638.
26. Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T. Internal tide transformation and oceanic internal solitary waves // Chapt. 2 in the book «Environmental Stratified Flows» / Ed. R. Grimshaw. – Kluwer Acad. Publ., 2000. – P. 29–60.
27. Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs L. D. Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth // AIAA. J. Hydrodyn. – 1978. – **12**. – P. 157–165.
28. Lu D. Q., Chwang A. T. Interfacial waves due to a singularity in a system of two semi-infinite fluids // Phys. Fluids. – 2005. – **17**. – P. 102107-1–102107-9.
29. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976. – **43**, No. 4. – P. 584–588.
30. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids // J. Phys. Soc. Jpn. – 1975. – **39**. – P. 1082–1091.

31. *Segur H.* The Korteweg-de Vries equation and water waves. Solutions of the equations. Part 1 // *J. Fluid Mech.* – 1973. – **59**. – P. 721–736.
32. *Segur H., Hammack J. L.* Soliton models of long internal waves // *J. Fluid Mech.* – 1982. – **118**. – P. 285–304.
33. *Selezov I., Avramenko O., Nayfeh A., Huq P., Zeegers N.* Propagation of water wave-packets at the interface of layer and half-space fluid // Proc. 2nd Int. Conf. «Asymptotics in Mechanics» (St-Petersburg, Russia, 13–16 October 1996) / Ed. by A. Nayfeh and K. Rozhdestvensky. – St-Petersburg: St-Petersburg State Marine Techn. Univ., 1997. – P. 245–252.
34. *Selezov I., Huq P.* Asymptotic-heuristic analysis of nonlinear water wave propagation in two- and three-layer fluids // Proc. 2nd Int. Conf. «Asymptotics in Mechanics» (St-Petersburg, Russia, 13–16 October 1996) / Ed. by A. Nayfeh and K. Rozhdestvensky. – St-Petersburg: St-Petersburg State Marine Techn. Univ., 1997. – P. 237–244.
35. *Selezov I. T., Korsunsky S. V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal-electrolyte // Int. Conf. MHD Processes to Protection of Environment (Kiev – Odessa, Ukraine, 24–29 June 1992). – Part 1. – P. 111–117.
36. *Selezov I. T., Mironchuk M. V., Huq P.* Evolution equation for waves forced by a slender obstacle in a two-layer fluid // *Доп. НАН України.* – 1999. – № 4. – С. 77–82.
37. *Shingareva I., Celaya C. L.* On frequency-amplitude dependences for surface and internal standing waves // *J. Comput. Appl. Math.* – 2007. – **200**, No. 2. – P. 459–470.
38. *Sutherland B. S., Nault J. T.* Intrusive gravity currents propagating along thin and thick interfaces // *J. Fluid Mech.* – 2007. – **586**. – P. 109–118.
39. *Vincze M., Kozma P., Gyure B., Janosi I. M., Szabo K. G., Tel T.* Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche // *Phys. Fluids.* – 2007. – **19**. – P. 108108-1–108108-4.
40. *Watson K. M.* The coupling of surface and internal gravity waves revised // *J. Phys. Oceanography.* – 1990. – **20**. – P. 1233–1248.
41. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. – New York: J. Wiley & Sons Inc., 1980. – 636 p.
То же: *Уизем Дж. Б.* Лине́йные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
42. *Yuen H. C., Lake B. M.* Nonlinear dynamics of deep-water waves // *Adv. Appl. Mech.* – 1982. – **22**. – P. 33–45.

НЕЛІНІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ВНУТРІШНІХ І ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Розглянуто нову нелінійну модель поширення хвильових пакетів у системі «рідкий шар з твердим дном – рідкий шар з вільною поверхнею». Методом багатомасштабних розкладів отримано три перші лінійні наближення нелінійної задачі. Побудовано і детально аналізуються розв'язки задачі першого наближення. Показано, що існує внутрішня і поверхнева складові хвильового поля та проаналізовано їх взаємодію.

NONLINEAR INTERACTION OF INTERNAL AND SURFACE GRAVITY WAVES IN TWO-LAYER FLUID WITH FREE SURFACE

A new nonlinear model of wave-packet propagation in the system «fluid layer with a solid bottom – fluid layer with a free surface» is considered. The first three linear approximations of the nonlinear problem are obtained by the method of multiply scale expansions. Solutions of the first problem are presented and analyzed in detail. It is shown that the internal and surface components of wave field exist and their interaction is analyzed.

¹ Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ,
² Держ. пед. ун-т, Кіровоград

Одержано
30.12.08