

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

З використанням методу скінченних елементів досліджується узагальнений плоский напружений стан прямокутника з ізотропного функціонально-градієнтного матеріалу під дією нормального навантаження. Скінченноелементну модель побудовано за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна. Область тіла розбивається на чотирикутні градієнтні елементи, що враховують залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від координат. Числові розрахунки проведено для випадку, коли модуль Юнга є поліноміальною функцією. Проаналізовано вплив градієнтності матеріалу та розмірів прямокутника на його напружено-деформований стан.

Вступ. Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – це композити, які виготовлені з двох або більше складових, відносний вміст кожної з яких змінюється згідно із заданим розподілом в певному просторовому напрямку [5, 7, 9]. ФГМ створюються з метою поєднання фізико-механічних властивостей, що притаманні кожній зі складових частин. Використання ФГМ дає змогу зменшити перепад напружень в тілі під дією нерівномірного навантаження, отримати меншу концентрацію напружень, ніж у відповідному елементі з однорідного матеріалу.

Багатокомпонентні матеріали із заданою функціональною зміною властивостей спочатку розроблялися для космічної техніки. Тепер вони використовуються для виготовлення біологічних та електронних матеріалів, застосовуються в оптиці та медицині [10], в перетворювачах енергії, хімічному виробництві та атомній енергетиці.

Використання аналітичних методів при розв'язуванні задач теорії пружності для неоднорідних тіл наштовхується на значні труднощі. Тому для дослідження плоского напруженого стану таких тіл використовуються різні числові методи, зокрема методи інтегральних рівнянь і граничних елементів [12, 13], скінченних елементів [2, 5, 7, 9] та безсіткові методи [4, 8, 11]. Перевага перших двох методів – економія оперативної пам'яті при їх комп'ютерній реалізації. Однак істотною перешкодою для них є складність запису підінтегральної функції для будь-якого типу неоднорідності матеріалу. На даний час вони ефективні для експоненційної залежності модуля Юнга від однієї з координат [3]. У цьому плані метод скінченних елементів (МСЕ) має значно більші перспективи, оскільки дає змогу враховувати широкий спектр неоднорідностей матеріалу. Безсіткові методи мають перевагу над МСЕ у випадках, коли є можливими спотворення та пошкодження сітки або високі градієнти напружень, наприклад, при великих деформаціях або в проблемах росту тріщин [9].

У літературі при дослідженні напруженого стану неоднорідних тіл використовують два види скінченних елементів [7, 9]:

– звичайний однорідний скінченний елемент, в якому за усереднені фізико-механічні параметри вибираються значення цих параметрів у центральній точці неоднорідного елемента (рис. 1б), що відповідає кусково-однорідній апроксимації властивостей матеріалу;

– градієнтний скінченний елемент, що враховує градієнти властивостей матеріалу (рис. 1в).

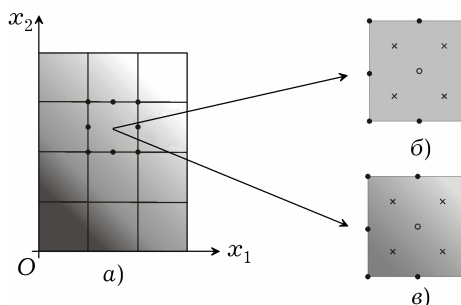


Рис. 1

Серед загальновідомих скінченноелементних пакетів варто відзначити FEMAP, ABAQUS та Comsol Multiphysics, які дають змогу безпосередньо моделювати ФГМ.

У цій роботі для дослідження впливу неоднорідності матеріалу та геометричних параметрів прямокутного тіла на переміщення і напруження в цьому тілі під дією нормального навантаження використано метод скінченних елементів з розбиттям області на чотирикутні градієнтні елементи (рис. 1в), які дозволяють краще врахувати неоднорідність матеріалу.

Опис задачі. Розглянемо узагальнений плоский напружений стан прямокутної пластини довжини a і висоти b (далі – прямокутник), яка у декартовій системі координат x_1Ox_2 займає область Ω з границею $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_e \cup \Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-$. Матеріал тіла є ізотропним і неоднорідним, а його модуль Юнга $E(x_1, x_2)$ і коефіцієнт Пуассона $\nu(x_1, x_2)$ – неперервні функції координат. На верхній грані Γ_e прямокутника діє нормальне стискувальне навантаження $P(x_1)$, а дотичні напруження відсутні. На нижній грані Γ_o виконуються умови гладкого защемлення, за якого дотичні напруження і нормальні переміщення є нульовими. Бічні сторони Γ_a^+ та Γ_a^- ненавантажені.

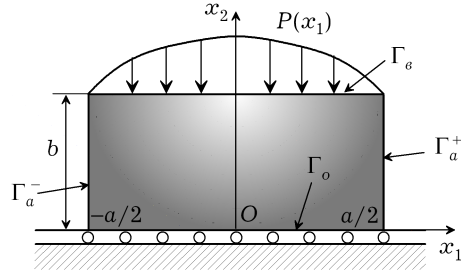


Рис. 2

Вважаємо, що об'ємні сили відсутні.

Математичне формулювання моделі. Компоненти тензора напружень σ_{ij} в області прямокутника задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, x_2)}{\partial x_j} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1)$$

Записавши тензор пружних сталей неоднорідного ізотропного матеріалу через модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона [12]

$$c_{ijkl}(x_1, x_2) = \frac{E(x_1, x_2)}{2(1 + \nu(x_1, x_2))} \left[\frac{2\nu(x_1, x_2)}{1 - 2\nu(x_1, x_2)} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right], \quad (2)$$

закон Гука для такого матеріалу подамо у вигляді

$$\sigma_{ij}(x) = c_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l}, \quad (3)$$

де u_k – компоненти вектора переміщень.

Крайові умови на контурі Γ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -P(x_1), & \sigma_{12}(x_1, x_2) &= 0, & (x_1, x_2) &\in \Gamma_e, \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= 0, & u_2(x_1, x_2) &= 0, & (x_1, x_2) &\in \Gamma_o, \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) &= 0, & \sigma_{12}(x_1, x_2) &= 0, & (x_1, x_2) &\in \Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-. \end{aligned} \quad (4)$$

Застосувавши для розв'язування цієї задачі метод Бубнова – Гальоркіна та використавши ізопараметричне перетворення кожного чотирикутного скінченного елемента в квадрат $\Omega_* = \{\xi, \eta : -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$, отримуємо систему рівнянь відносно невідомих вузлових переміщень $u^{(e)(m)}$ [1, 2, 6]:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} c_{1nkl} J_{k1} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_\ell} u_k^{(e)(m)} d\xi d\eta = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} c_{2nkl} J_{k2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_\ell} u_k^{(e)(m)} d\xi d\eta + \int_{\Gamma_e} P(x_1) \varphi_j d\Gamma_e = 0, \quad e = 1, \dots, N, \quad (5)$$

де $\varphi_m(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_m \xi)(1 + \eta_m \eta)$ – білінійна система базисних функцій; J_{kp} – компоненти якобіана переходу в локальну систему координат (ξ, η) ; N – кількість скінченних елементів.

Аналіз числових результатів. Числові розрахунки проведено для матеріалу з одновимірною неоднорідністю, коли модуль Юнга є функцією однієї з координат x_1 або x_2 , а коефіцієнт Пуассона сталий ($\nu = 0.25$). У всіх розглянутих прикладах вважаємо, що на верхній грані прямокутника діє рівномірний тиск $P(x_1) = 1.0$ Мпа.

Форма деформованого прямокутника. Дослідимо вплив неоднорідності матеріалу на форму деформованого прямокутника висотою $b = 0.1$ м і довжиною $a = 0.2$ м. Розглянемо чотири види квадратичної залежності модуля Юнга від координат:

$$E(x_1, x_2) = \left[2 + 3 \left(\frac{x_2}{b} \right)^2 \right] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (6a)$$

$$E(x_1, x_2) = \left[2 + 3 \left(1 - \frac{|x_2|}{b} \right)^2 \right] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (6б)$$

$$E(x_1, x_2) = \left[2 + 3 \left(\frac{x_1}{a/2} \right)^2 \right] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (6в)$$

$$E(x_1, x_2) = \left[2 + 3 \left(1 - \frac{|x_1|}{a/2} \right)^2 \right] \cdot 10^9 \text{ [Па]}, \quad (6г)$$

для кожної з яких мінімальне та максимальне значення модуля Юнга становлять $2 \cdot 10^9$ Па і $5 \cdot 10^9$ Па відповідно і досягаються на протилежних горизонтальних (у випадках (6a) і (6б)) або вертикальних (у випадках (6в) і (6г)) гранях. У цій статті відношення E_{\max}/E_{\min} матеріалу вибирали з діапазону $2 \leq E_{\max}/E_{\min} \leq 10$ за аналогією до праць [3, 7, 9].

Перші дві формули (6a) і (6б) відповідають неоднорідному по висоті прямокутнику, коли верхні шари жорсткіші (6a) або податливіші (6б), ніж нижні. Останні дві залежності (6в) і (6г) описують поздовжню неоднорідність прямокутника, матеріал бічних шарів якого жорсткіший (6в) або податливіший (6г), ніж матеріал поблизу вертикальної осі $x_2 = 0$.

Форма прямокутника після навантаження для цих чотирьох видів неоднорідності матеріалу зображена на рис. 3a–3г відповідно. Тут переміщення контуру тіла збільшено в 5000 разів.

У випадку прямокутника, неоднорідного по висоті, його верхня грань стає вгнутою, а нижня видовжена більше, ніж верхня (рис. 3a), якщо верхні шари прямокутника жорсткіші (випадок залежності (6a)). Якщо ж матеріал нижніх шарів тіла жорсткіший (випадок залежності (6б)), то верхня грань прямокутника опукла і більше видовжена, ніж нижня (рис. 3б). Коли неоднорідність матеріалу змінюється у поздовжньому напрямі та матеріал податливіший посередині прямокутника (випадок залежності (6в)), верхня сторона стає вгнутою на середній частині й опуклою поблизу країв, а нижня грань видовжується більше, ніж верхня (рис. 3в). Коли ж прямокутник податливіший на краях (випадок залежності (6г)), то вся верхня грань є опуклою та більше видовжена, ніж нижня (рис. 3г).

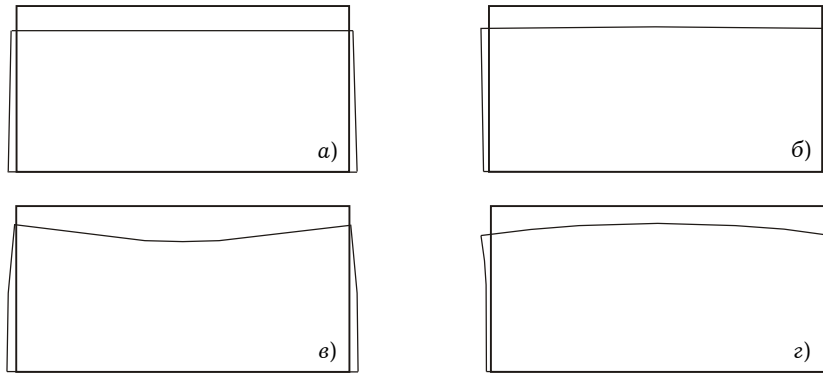


Рис. 3

На рис. 4 зображено нормальні переміщення u_2 верхньої грані прямокутника для залежностей (6) модуля Юнга від координати x_1 чи x_2 (кривим 3–6 відповідають залежності (6a)–(6в)). При неоднорідності по осі Ox_1 перепади u_2 (криві 5, 6) вздовж грані значно більші, ніж при неоднорідності по осі Ox_2 (криві 3, 4). Однак за будь-якого розглянутого характеру зміни модуля Юнга в діапазоні $2 \cdot 10^9 \div 5 \cdot 10^9$ Па нормальні переміщення верхньої грані лежать у межах між переміщеннями однорідного прямокутника з модулями Юнга $2 \cdot 10^9$ Па (крива 1) та $5 \cdot 10^9$ Па (крива 2).

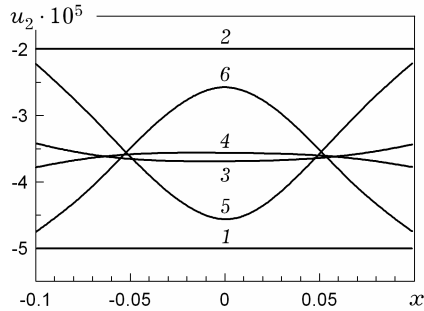


Рис. 4

Далі розглянемо вплив довжини прямокутника та градієнтності матеріалу на розподіл напружень.

Залежність напружень від довжини прямокутника. У разі однорідного прямокутника за рівномірного тиску $P(x_1) = 1$ МПа на верхню грань виникає однорідний напружений стан, за якого у кожній точці тіла нормальні напруження $\sigma_{11} = 0$ МПа, $\sigma_{22} = -1$ МПа, а максимальні дотичні напруження $\tau_{\max} = -0.5$ МПа. Дослідимо, як впливає на напружений стан тіла неоднорідність матеріалу прямокутника та зміна його довжини для випадку змінного по висоті модуля Юнга. Порівнюватимемо напруження у квадраті ($a = b$) та в прямокутнику довжиною $a = 3b$. Лінійні розміри прямокутника на рис. 5–7 подано у дециметрах.

На рис. 5 наведено розподіли напружень σ_{11} , τ_{\max} у тілі, модуль Юнга $E(x_1, x_2)$ якого змінюється за законом (6a). У цьому разі верхні шари є жорсткіші від нижніх. У випадку квадрата максимальні розтягувальні напруження σ_{11} величиною 0.0071 МПа виникають у точці $(0, 0.733)$ (рис. 5а), а максимальні дотичні напруження $\tau_{\max} = 0.505$ МПа – у точці $(0, 0.533)$ (рис. 5в). У прямокутнику екстремуми цих напружень досягаються також на вертикальній осі тіла, проте переміщуються на границю області (рис. 5б, рис. 5г). Зокрема, максимальні розтягувальні $\sigma_{11} = 0.137$ МПа знаходяться в точці $(0, b)$, а максимальні стискувальні $\sigma_{11} = -0.067$ МПа – в точці $(0, 0)$. Максимальні дотичні $\tau_{\max} = 0.578$ МПа також локалізуються по центру верхньої грані (рис. 5г). Розрахунки показали, що напруження σ_{22} у всьому тілі є стискувальними і їх максимум досягається посередині нижньої грані.

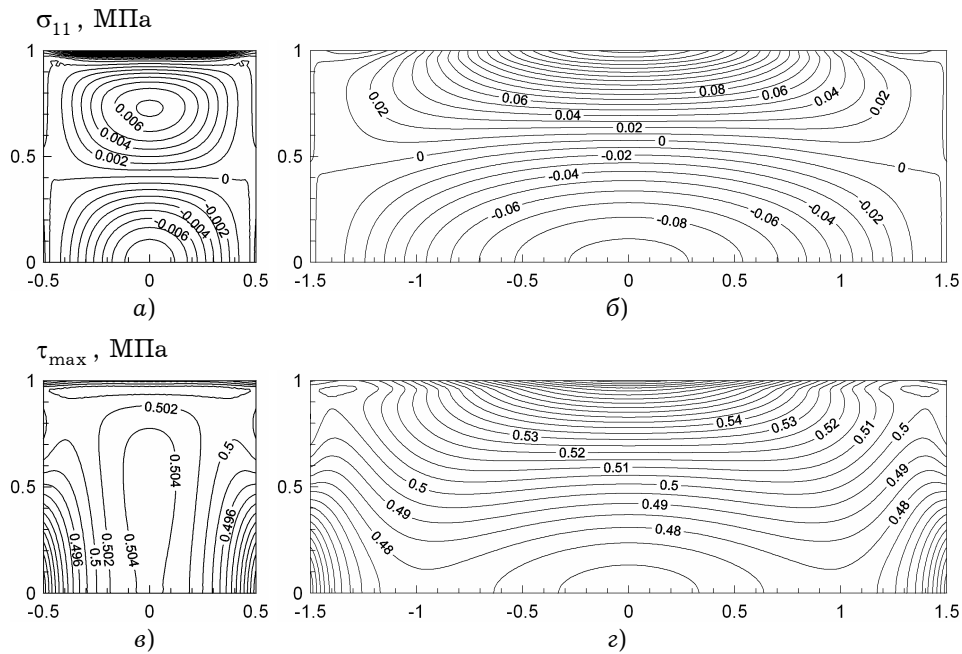


Рис. 5

На рис. 6 зображено розподіл напружень у тілі при зміні модуля Юнга $E(x_1, x_2)$ по висоті згідно з формулою (6б), тобто, коли матеріал верхніх шарів є податливішим.

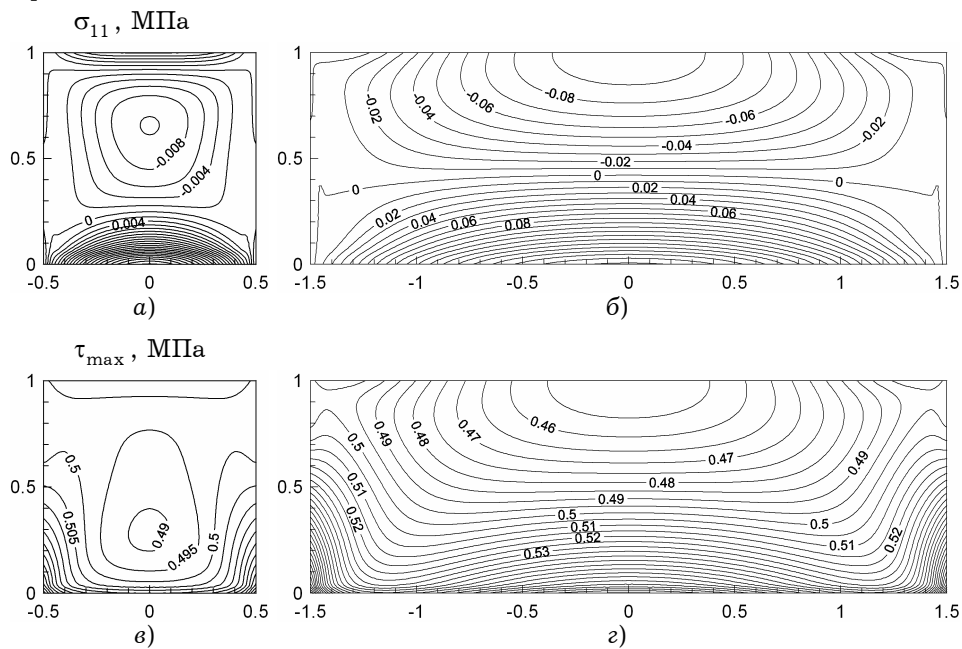


Рис. 6

У випадку квадрата максимальні розтягувальні напруження $\sigma_{11} = 0.042$ МПа знаходяться у точці $(0, 0)$, а максимальні стискувальні $\sigma_{11} = -0.010$ МПа – на вертикальній осі тіла на глибині 0.33 від верхньої грані (рис. 6а). Максимальні дотичні $\tau_{\max} = 0.553$ МПа локалізовані в нижніх лівому і правому кутах (рис. 6в). У прямокутнику екстремуми σ_{11} локалізуються на границі області. Зокрема, максимальні розтягувальні $\sigma_{11} = 0.14$ МПа

знаходяться в точці $(0, 0)$, а максимальні стискувальні напруження $\sigma_{11} = -0.06$ МПа – в точці $(0, b)$ (рис. 6б). На відміну від квадрата, в прямокутнику (рис. 6з) максимальні дотичні напруження $\tau_{\max} = 0.595$ МПа знаходяться в точці $(0, 0)$. Максимальні стискувальні значення напруження σ_{22} зосереджуються в нижніх кутах.

Залежність напружень від градієнтності матеріалу. Дослідимо, як впливає збільшення неоднорідності матеріалу на напружений стан прямокутника з довжиною $a = 0.2$ м і висотою $b = 0.1$ м. Порівнюватимемо напруження у тілах з модулем Юнга $E(x_1, x_2) = [2 + 3(x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па] і $E(x_1, x_2) = [2 + 11(x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па] (рис. 7), мінімальне значення яких однако-ве (дорівнює $2 \cdot 10^9$ Па) і досягається на нижній грані, а максимальні значення на верхній грані дорівнюють $5 \cdot 10^9$ Па і $13 \cdot 10^9$ Па відповідно. У першому випадку матеріал менш градієнтний ($E_{\max}/E_{\min} = 2.5$), у другому – більш градієнтний ($E_{\max}/E_{\min} = 6.5$).

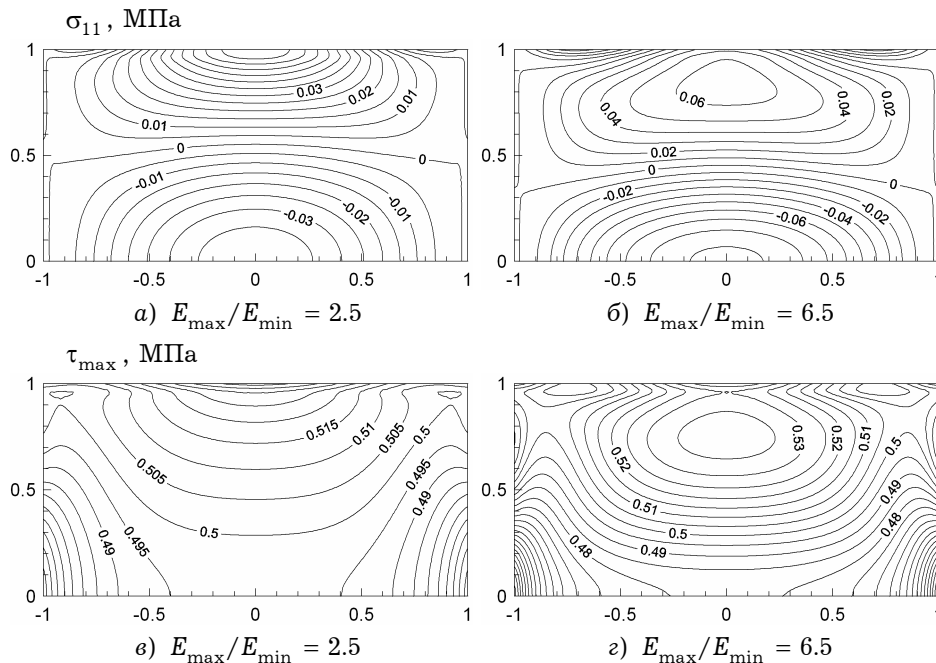


Рис. 7

У разі меншої градієнтності матеріалу ($E(x_1, x_2) = [2 + 3(x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па]) максимальні розтягувальні напруження σ_{11} величиною 0.062 Па виникають в точці $(0, a)$, а максимальні стискувальні $\sigma_{11} = -0.03$ МПа – в точці $(0, 0)$ (рис. 7а). Максимальні дотичні $\tau_{\max} = 0.54$ МПа локалізуються по центру верхньої грані (рис. 7в). Для більш градієнтного матеріалу ($E(x_1, x_2) = [2 + 11(x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па]) максимальні розтягувальні напруження ($\sigma_{11} = 0.061$ МПа) практично не змінюються, проте переміщуються всередину тіла на 0.167 від верхньої грані. Максимальні стискувальні σ_{11} збільшуються до 0.09 МПа без зміни їх позиції (рис. 7б). Максимальні дотичні $\tau_{\max} = 0.539$ МПа знаходяться в точці $(0, a)$, а на глибині 0.233 від верхньої грані утворюється локальний максимум $\tau_{\max} = 0.537$ МПа (рис. 7г). Напруження σ_{22} у всьому тілі є стискувальними і їх максимум досягається по центру нижньої грані.

Далі розглянемо прямокутник, в якого верхні шари м'якші, а нижні жорсткіші (рис. 8). Модуль Юнга вважаємо фіксованим на верхній грані ($E(x_1, x_2) = 2 \cdot 10^9$ [Па]). У випадку залежності модуля Юнга $E(x_1, x_2) = [2 + 3(1 - x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па] максимальні стискувальні напруження локалізуються в точці $(0, 0)$, а максимальні розтягувальні $\sigma_{11} = 0.098$ МПа – на вертикальній осі тіла на висоті 0.8667 від нижньої грані (рис. 8а). Максимальні $\tau_{\max} = 0.59$ МПа знаходяться в нижніх кутах (рис. 8в). При збільшенні неоднорідності матеріалу ($E(x_1, x_2) = [2 + 11(1 - x_2/b)^2] \cdot 10^9$ [Па]) спостерігаємо збільшення екстремальних значень σ_{11} , зокрема, максимальні розтягувальні досягають величини 0.17 МПа, не змінюючи розташування, а максимальні стискувальні $\sigma_{11} = -0.08$ МПа знаходяться в точці $(0, 0.967)$ (рис. 8б). Максимальні дотичні $\tau_{\max} = 0.68$ МПа знаходяться у нижніх кутах (рис. 8г). Максимальні стискувальні σ_{22} знаходяться в нижніх кутах в обох випадках.

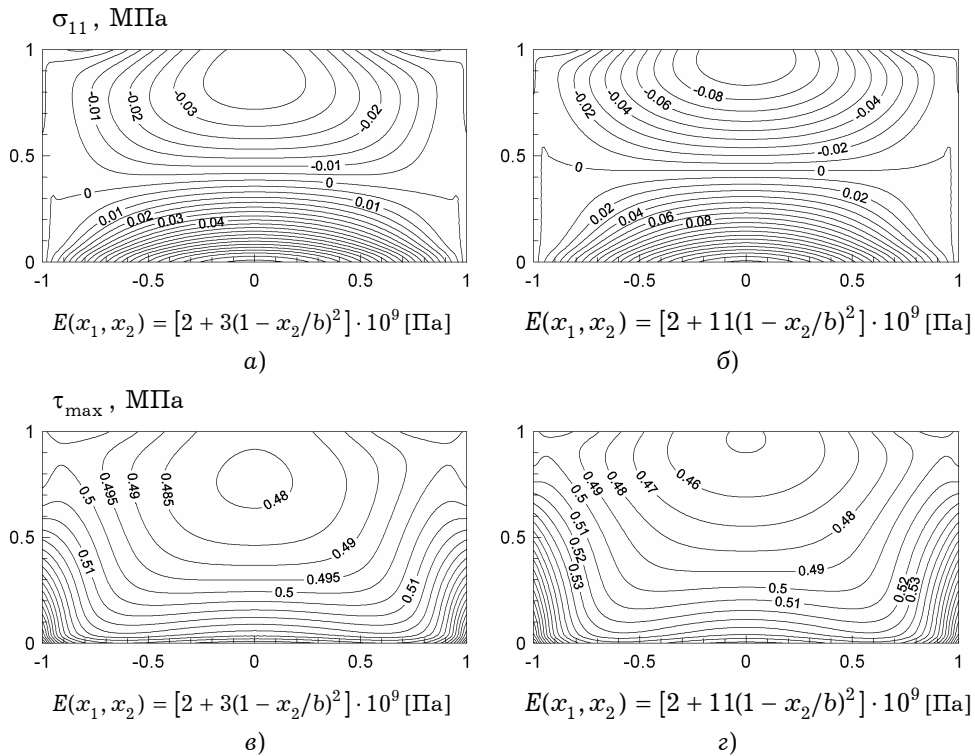


Рис. 8

Висновки. З використанням методу скінченних елементів розв'язано задачу про узагальнений плоский напружений стан прямокутної пластини з ізотропного функціонально-градієнтного матеріалу. Проаналізовано вплив властивостей матеріалу, модуль Юнга якого є функцією однієї з координат, на переміщення та напруження в тілі. Виявлено, що при сталому відношенні E_{\max}/E_{\min} та збільшенні довжини прямокутника екстремуми напружень σ_{11} та τ_{\max} зростають і переміщуються на границю тіла. При фіксованих розмірах прямокутника зі збільшенням відношення E_{\max}/E_{\min} екстремуми напружень σ_{11} та τ_{\max} зростають та зсуваються по вертикальній осі всередину тіла. Коли матеріал на нижній або бічних сторонах є жорсткішим, верхня грань прямокутника стає вгнутою, коли ж матеріал податливіший – опуклою.

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986. – 318 с.
2. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 221 с.
3. Anlas G., Santare M. H., Lambros J. Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials // Int. J. Fract. – 2000. – **104**. – P. 131–143.
4. Dai K. Y., Liu G. R., Lim K. M., Han X., Du S. Y. A meshfree radial point interpolation method for analysis of functionally graded material (FGM) plates // Comput. Mech. – 2004. – **34**. – P. 213–223.
5. Grujicic M., Zhao H. Optimization of 316 stainless steel/alumina functionally graded material for reduction of damage induced by thermal residual stresses // Materials Sci. and Eng. – 1998. – **252**. – P. 117–132.
6. Hutton D. V. Fundamentals of finite element analysis. – New York: McGraw-Hill, 2004. – 505 p.
7. Kim J.-H., Paulino G. H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2002. – **69**. – P. 502–514.
8. Liu G. R. Mesh-free methods. Moving beyond the finite element method. – Boca Raton: CRC PRESS, 2003 – 693 p.
9. Paulino G. H., Kim J.-H. The weak patch test for nonhomogeneous materials modeled with graded finite elements // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. and Eng. – 2007. – **29**. – P. 63–81.
10. Pompe W. Worch H., Epple M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., Hempel U., Scharnweber D., Schulte K. Functionally graded materials for biomedical applications // Materials Sci. and Eng. – 2003. – **362**. – P. 40–60.
11. Rao B. N., Rahman S. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials // Eng. Fract. Mech. – 2003. – **70**. – P. 1–27.
12. Sladek J., Sladek V., Atluri S. N. Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problems of elasticity with nonhomogeneous material properties // Comput. Mech. – 2000. – **24**. – P. 456–462.
13. Yue Z. Q., Xiao H. T., Tham L. G., Boundary element analysis of crack problems in functionally graded materials // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**. – P. 3273–3291.

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

С использованием метода конечных элементов исследуется плоское напряженное состояние прямоугольника из изотропного функционально-градиентного материала при действии нормальной нагрузки. Конечноэлементная модель построена с помощью метода Бубнова – Галёркина. Область тела разбита на четырехугольные градиентные элементы, учитывающие зависимость модуля Юнга и коэффициента Пуассона от координат. Расчеты выполнены для случая, когда модуль Юнга является полиномиальной функцией. Проанализировано влияние градиентности материала и размеров прямоугольника на его напряженное состояние.

FINITE ELEMENT INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN STATE OF INHOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATE

In this work the plane stress-strain state of isotropic rectangular bodies of functionally graded materials is described by the finite element method under normal loading. The finite element model is built using the Bubnov – Galerkin method. The area of the body is divided into rectangular graded elements which allow to set such spatially variable properties of material as Young's modulus and Poisson's ratio. We used polynomial functions for Young's modulus and the Poisson's ratio. On the basis of conducted numerical experiments a number of conclusions is made about dependence of the stress-strain state of the body on the gradient of material and sizes of the body.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
08.10.08