

ЕРМІТОВІ СПЛАЙНИ ЯК БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ ТРАЄКТОРІЙ НАПРУЖЕНЬ

Запропоновано скінченноелементний підхід з використанням ермітових сплайнів для зведення задачі побудови траєкторій напружень до знаходження двох потенціальних функцій, що задовольняють умови інтерполяції перших похідних у вузлах регулярної сітки. Ефективність такого підходу продемонстровано на тестових задачах, виявлено особливості розрахункових співвідношень.

1. Вступ. Для дослідження полів напружень у різноманітних об'єктах, від елементів конструкцій до товщ гірських порід, застосовують сучасні методи математичного моделювання та опрацювання даних вимірювань з подальшим поданням результатів у вигляді одно-, дво- та тривимірної графіки залежно від прийнятих припущень та специфіки задачі. Можна вважати вже класичними двовимірні графіки у вигляді карт ізоліній, для побудови яких існують як і достатньо універсальні програми, так і модулі візуалізації в пакетах скінченноелементного аналізу. Тензорна природа напружень навіть у випадку двовимірних задач (плоска деформація чи плоский напружений стан) потребує візуалізації трьох компонент σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} симетричного тензора напружень (надалі працюватимемо з декартовою системою координат Oxy). У результаті три карти ізоліній є достатньо складними для аналізу, зокрема для виявлення деяких узагальнених чи структурних особливостей напруженого стану. З іншого боку, поле напружень можна зобразити як векторне поле, використовуючи поняття головних напружень як нормальних, так і дотичних. Напрями двох взаємно перпендикулярних нормальних напружень визначають, як відомо, за формулою [5]

$$\operatorname{tg}(2\alpha + \pi) = \operatorname{tg} 2\alpha = 2\tau_{xy} \frac{1}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \quad (1)$$

де α – кут між віссю x та напрямом дії першого (більшого) головного напруження σ_1 , $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$; напрям дії другого головного напруження σ_2 повернутий на кут $\pm 90^\circ$ до напрямку σ_1 . Їхні значення можна обчислити так:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = \sigma_0 - \tau_{\max}, \quad (2)$$

де $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ – гідростатичний тиск, $\tau_{\max} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2}$ – максимальне дотичне напруження.

Як правило, векторне поле головних напружень показують у вигляді пари перехрещених стрілок, повернутих згідно з формулою (1) на кут α , які вказують напрям розтягу-стиску (розтяг показують протилежно напрямленими стрілками, а стиск – стрілками до перехрестя). Довжина стрілок може слугувати мірою величини напружень. Проте для побудови траєкторій важливим є тільки дотичний напрям, а тому векторне поле з урахуванням (1), (2) та умови нормування $(dx)^2 + (dy)^2 = 1$ можна задати у вигляді пари чисел $dx = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{1}{\tau_{\max}}$, $dy = 2\tau_{xy} \frac{1}{\tau_{\max}}$, так що $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{dy}{dx}$.

Такі орієнтовані стрілки мають бути побудовані у заданій множині точок – вузлах скінченних елементів: чи в точках інтегрування, чи на перетині ліній регулярної (прямокутної) сітки розбиття, чи в дискретному наборі точок спостереження, де визначено головні напруження. Тоді значення в проміжних точках, зокрема у вузлах регулярної сітки, можна отримати одним з

методів апроксимації. Тому вважатимемо відомим поле напружень у деякій області, точніше, два взаємно перпендикулярних векторних поля головних напружень (див. рис. 1, де на прикладі елементарного прямокутника регулярної сітки розбиття ілюструється побудова двох сімей траєкторій напружень s_1 та s_2 за заданими векторними полями). Одним із недоліків такого зображення головних напружень є можливість захащення рисунка в зоні надмірного згущення точок спостереження чи вибору невдалих розмірів стрілок.

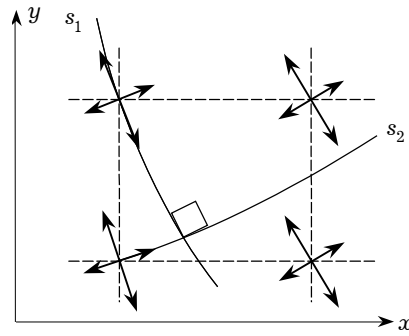


Рис. 1

За головними напруженнями можна побудувати траєкторії напружень – дві взаємно ортогональні сім'ї ліній, дотичні до яких у кожній точці вказують напрям головних напружень. Якщо траєкторія відповідної сім'ї проходить через точку спостереження, то напрям дотичної має співпадати із заданими значеннями векторного поля (умова інтерполяції). Неперервне продовження цих ліній зовсім необов'язково має проходити через задані точки (наприклад, через вузли регулярної сітки), а тому побудова траєкторій пов'язана з вибором методу усереднення напрямку дотичної за даними деяких найближчих вузлів.

Побудова траєкторій головних напружень або максимальних напружень зсуву широко використовується в експериментальних і теоретичних методах у фотопружності, у випадку дослідження росту тріщин і теорії пластичності, для розв'язування геотехнічних і тектонофізичних задач тощо [9, 11, 12]. Траєкторії напружень як предмет дослідження – це і важливий самостійний метод аналізу [7], а також метод візуалізації у поєднанні, наприклад, з методом скінченних елементів [8].

Побудова траєкторій вручну – далеко не очевидна і неефективна процедура, але програми, які рисували би траєкторії напружень автоматично, поки що є рідкісними і вузькоорієнтованими, переважно комерційними, організованими за принципом «чорного ящика», або написаними «на випадок», тобто недоступними для широкого застосування. Тому варто навести *аргументи* на користь наявності такої функціональності – відновлення траєкторій за дотичним векторним полем:

- очевидні – комп'ютеризація процесу, швидкість, алгоритмічність, якість і компактність векторної графіки;
- важливість для характеристики поля напружень в цілому і особливо для структурних досліджень (наприклад, в геології [10]), а також можливість застосування в інших галузях знань, де треба проаналізувати векторні поля;
- комплексність задачі, що включає вибір апроксимації значень векторного поля у проміжних вузлах, структур даних для збереження інформації про самі лінії-траєкторії, можливість їхнього подальшого опрацювання і модифікації (наприклад, згущення цих ліній у деякій зоні), залежність усієї картини (дві сім'ї траєкторій) від вибору початкової точки побудови тощо.

Головна ідея – це звести задачу побудови траєкторій напружень до простішої задачі побудови ізоліній для деякої «потенціальної» поверхні. До розв'язання цього питання застосуємо наявні сучасні програми комп'ютерної картографії. Метою роботи є запропонувати достатньо універсальний числовий підхід до побудови траєкторій напружень з використанням сплайнів ермітового типу та методу скінченних елементів.

1. Математична постановка задачі. Для спрощення теоретичних викладок та апробації запропонованого підходу обмежимося замкненою областю прямокутної форми $\bar{\Omega} = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$, сторони якої орієнто-

вані вздовж осей декартової системи координат. Розділимо цю область вертикальними та горизонтальними лініями на n_x та n_y смуг з постійними кроками $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/n_x$ і $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/n_y$ відповідно. У точках перетину цих ліній (вузлах утвореної регулярної сітки) з координатами (x_i, y_j) , де $x_i = x_{\min} + i \Delta x$, $i = 0, \dots, n_x$; $y_j = y_{\min} + j \Delta y$, $j = 0, \dots, n_y$, задано векторні поля $(dx_i^{(1)}, dy_j^{(1)})$ і $(dx_i^{(2)}, dy_j^{(2)})$, що вказують напрям дотичних до ліній-траєкторій напружень двох сімей s_1 чи s_2 . Умова ортогональності ліній цих сімей дає рівняння

$$dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} + dy_j^{(1)} dy_j^{(2)} = 0, \quad (3)$$

звідки

$$dx_i^{(1)} = dy_j^{(2)}, \quad dx_i^{(2)} = -dy_j^{(1)}. \quad (4)$$

Тому фактично достатньо задати одне векторне поле, а інше можна розрахувати програмно. Оскільки напрям дотичних можна змінити на протилежний, то дотичні першої сім'ї траєкторій можуть бути задані як $(dx_i^{(1)}, dy_j^{(1)})$ або $(-dx_i^{(1)}, -dy_j^{(1)})$, а другої сім'ї – як $(-dy_j^{(1)}, dx_i^{(1)})$ або $(dy_j^{(1)}, -dx_i^{(1)})$ відповідно. Зауважимо про неоднозначність результатів відновлення ліній траєкторій у випадку довільного вибору напрямів у всіх вузлах. Як показали числові експерименти, дотичний вектор повинен бути близьким до напрямку векторного поля в сусідніх вузлах.

Нехай $U_1(x, y)$, $U_2(x, y)$ – дві (поки що довільні) неперервні скалярні функції, визначені в замкненій прямокутній області $\bar{\Omega}$. Будуватимемо їх так, щоб лінії рівня $U_1(x, y) = c_1$ та $U_2(x, y) = c_2$ співпали з лініями траєкторій. Тоді c_1 та c_2 – деякі параметри, що визначають першу чи другу сім'ю траєкторій. Якщо функції U_1 і U_2 відомі (знайдено, наприклад, значення у вузлах регулярної сітки (x_i, y_j)), то вибір параметрів c_1 , c_2 можна додати програмі побудови ізоліній (тобто керувати тим, наскільки густо будуть зображені лінії на карті). Для отримання остаточного результату – завершення картини траєкторій напружень – достатньо буде сумістити ці дві карти ізоліній для функцій U_1 та U_2 . Отже, наша задача зводиться до послідовності двох задач знаходження значень функцій U_1 та U_2 , кожна з яких описує одну із сімей ізоліній-траєкторій.

Якщо маємо функцію $U_k(x, y)$, де $k = 1$ або 2 , то напрям найбільшого зростання у деякій точці (x_0, y_0) визначає градієнт $(\partial U_k(x_0, y_0)/\partial x, \partial U_k(x_0, y_0)/\partial y) = (U_{k,x}(x_0, y_0), U_{k,y}(x_0, y_0))$. Проведемо через цю точку лінію рівня $U_k(x_0, y_0)$ і визначимо локальну праву систему координат (\mathbf{n}, \mathbf{s}) , де \mathbf{n} – нормаль до лінії рівня в точці (x_0, y_0) , яка співпадає з напрямом градієнта $(U_{k,x}, U_{k,y})$, а $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$ – дотичний вектор (рис. 2). З умови ортогональності цих векторів $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ або $U_{k,x} s_x + U_{k,y} s_y = 0$ випливає, що $\mathbf{s} = (-U_{k,y}, U_{k,x})$ або $-\mathbf{s} = (U_{k,y}, -U_{k,x})$. Оскільки напрями дотичних до траєкторій вважаємо заданими, то векторне поле дотичних першої сім'ї траєкторій є полем градієнта функції U_2 , і на-

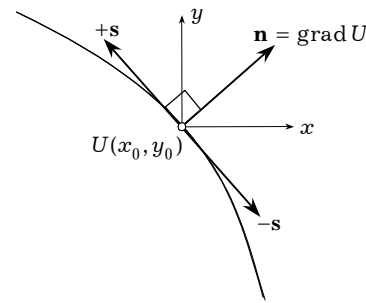


Рис. 2

впаки, для знаходження функції U_1 використовуємо як поле градієнта напрямки дотичних другої сім'ї. З огляду на неперервність функцій U_1 і U_2 умова ортогональності для довільної точки $(x, y) \in \bar{\Omega}$ може бути записана у вигляді

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{\partial U_2}{\partial x},$$

що співпадає з умовами Коші – Рімана для гармонічних функцій. Тоді в припущенні, що функції U_1, U_2 двічі неперервно диференційовні, для їх визначення матимемо однорідне гармонічне рівняння

$$\Delta U_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Отже, U_1 і U_2 можна назвати потенціалами або потенціальними функціями для побудови траєкторій напружень. Рівняння (5), очевидно, треба доповнити умовами інтерполяції градієнта цих функцій у вузлах:

$$\frac{\partial U_1(x_i, y_j)}{\partial x} = dx(x_i, y_j), \quad \frac{\partial U_1(x_i, y_j)}{\partial y} = dy(x_i, y_j) \quad (6')$$

або

$$\frac{\partial U_2(x_i, y_j)}{\partial x} = -dy(x_i, y_j), \quad \frac{\partial U_2(x_i, y_j)}{\partial y} = dx(x_i, y_j). \quad (6'')$$

Якщо область $\bar{\Omega}$ замкнута, то на границі області можна вважати заданими нормальні похідні від функцій U_1 і U_2 :

$$-\frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) U_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right) U_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) U_2 = \left(-\frac{\partial}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \cos \alpha \right) U_2, \quad (8)$$

де α – кут, що знаходимо за формулою (1). Таким чином, для визначення «потенціалів» U_1 чи U_2 маємо задачу Неймана (5), (6). Якщо $U(x, y)$ – розв'язок цієї задачі, то $A \cdot U(x, y) + B$ – теж, очевидно, розв'язок цієї задачі. Для усунення неоднозначності можна покласти $A = 1$, а $B = U(x_0, y_0) = 0$, тобто зафіксуємо значення функції в одному з вузлів сітки, наприклад, нехай значення потенціалу в лівому нижньому вузлі області $\bar{\Omega}$ дорівнює нулеві. Далі буде показано, що раціонально взяти $A = 6$.

Еквівалентна варіаційна постановка задачі знаходження розв'язку рівняння (5) за умов інтерполяції (6') чи (6'') і граничних умов у вигляді значень нормальної похідної (7) чи (8) зводиться до пошуку мінімуму функціонала

$$\int_{\bar{\Omega}} (U_{k,x}^2 + U_{k,y}^2) d\Omega \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

у класі функцій, інтегрованих з квадратом разом з першою похідною, які також задовольняють умови вигляду (6) інтерполяції градієнтів функцій. Очевидно, що тоді граничні умови (7) чи (8) на нормальні похідні від функцій U_1 та U_2 задовольняються автоматично, а тому в функціоналі (9) відсутні інтеграли по границі області з нормальними похідними від цих функцій. Зауважимо, що оператор Лапласа часто використовують у задачах апроксимації, однак тут маємо специфічні умови (6) інтерполяції градієнтів замість стандартної умови мінімізації кривини відновлюваної функції.

3. Застосування сплайн-інтерполяції і методу скінченних елементів.

Подальші кроки розв'язання задачі (9) включають застосування ідей методу скінченних елементів (МСЕ) і вибір спеціальної сплайн-інтерполяції ермітового типу на кожному з них [2]. У цій роботі зі скінченним елементом ототожнимо прямокутник $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$, виділений лініями регулярної сітки, і відобразимо його на стандартний елемент $[-1, +1] \times [-1, +1]$, на якому введемо локальну систему координат $O\xi\eta$ з початком у центральній точці. У цьому випадку (сторони скінченного елемента паралельні осям глобальної системи координат Oxy) легко перейти від похідних за x та y до похідних за ξ та η відповідно, якщо врахувати формули переходу від локальних до глобальних координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \Delta x \cdot \xi, & \xi &\in [-1, +1], \\ y &= \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \Delta y \cdot \eta, & \eta &\in [-1, +1], \end{aligned} \quad (10)$$

де $\Delta x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$, $\Delta y = \frac{y_{j+1} - y_j}{2}$. З урахуванням цих формул глобальні похідні за x та y на окремих елементах можна записати так:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \frac{\partial U}{\partial \eta}. \quad (11)$$

Функції форми (базисні функції) на кожному елементі виберемо у вигляді кубічних поліномів [3]:

$$N_{0,i} = \frac{-\xi_i \eta_i}{8} (\xi_i + \xi)(\eta_i + \eta)(-2 - \xi_i \xi - \eta_i \eta + \xi^2 + \eta^2), \quad (12')$$

$$N_{\xi,i} = \frac{-1}{8} (\xi_i + \xi)(\eta_i + \eta)(\xi^2 - 1), \quad (12'')$$

$$N_{\eta,i} = \frac{-1}{8} (\xi_i + \xi)(\eta_i + \eta)(\eta^2 - 1). \quad (12''')$$

Тут (ξ_i, η_i) – координати вузлів стандартного елемента; $-\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = -\xi_4 = 1$, $-\eta_1 = -\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$.

Функції (12')–(12''') є повними в класі поліномів другого степеня P_2 [4] і задовольняють такі умови інтерполяції:

$$N_{0,i}(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} N_{0,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_{0,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad (13')$$

$$N_{\xi,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} N_{\xi,i}(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_{\xi,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad (13'')$$

$$N_{\eta,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} N_{\eta,i}(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_{\eta,i}(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}, \quad (13''')$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Тепер функцію U на елементі апроксимуємо через вузлові параметри ермітовим сплайном відносно глобальних координат (x, y) або локальних координат (ξ, η) :

$$\begin{aligned} U^{(e)}(x, y) &= U^{(e)}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^4 N_{0,n}(\xi, \eta) U_n + \\ &+ \sum_{n=1}^4 N_{\xi,n}(\xi, \eta) U_{x,n} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \sum_{n=1}^4 N_{\eta,n}(\xi, \eta) U_{y,n} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (14)$$

де U_n – значення самої функції; $U_{x,n}$, $U_{y,n}$ – значення її першої похідної у вузлах елемента, $n = 1, \dots, 4$; $N_{0,n}$, $N_{\xi,n}$, $N_{\eta,n}$ – відповідні базисні функції.

ції. Оскільки задане поле градієнта функції U визначається через компоненти напружень, то вимоги до гладкості самої функції U достатньо обмежити класом C^0 неперервних функцій, а перші похідні можуть мати розриви I-го роду (тобто бути інтегровними з квадратом), що властиво для класичного МСЕ у формі методу в переміщеннях. Тому формула (12) не містить змішаних похідних U_{xy} (та відповідних базисних функцій), необхідних для побудови гладкої функції класу C^1 . З апроксимації (14) та формул (11) для глобальних частинних похідних матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{\Delta_x} \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi} N_{0,n}(\xi, \eta) U_n + \\ &+ \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi} N_{\xi,n}(\xi, \eta) U_{x,n} + \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi} N_{\eta,n}(\xi, \eta) U_{y,n}, \end{aligned} \quad (15')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} U^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{\Delta_y} \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta} N_{0,n}(\xi, \eta) U_n + \\ &+ \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta} N_{\xi,n}(\xi, \eta) U_{x,n} + \sum_{n=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta} N_{\eta,n}(\xi, \eta) U_{y,n}, \end{aligned} \quad (15'')$$

де враховано, що $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Delta_x$, $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \Delta_y$ згідно з формулами (10).

Формули (14), (15) зручно подати в матричному вигляді:

$$U^{(e)}(x, y) = [N]^{(e)} \cdot q^{(e)}, \quad (16')$$

де $[N]^{(e)}$ – вектор-рядок базисних функцій, а $q^{(e)}$ – вектор-стовпець вузлових значень, що згруповані за порядком і за напрямом похідних:

$$\begin{aligned} [N]^{(e)} &= ([N_0], \Delta_x [N_\xi], \Delta_y [N_\eta]), & q^{(e)} &= (q_0, q_x, q_y)^\top, \\ [N_0] &= [N_{0,1}, N_{0,2}, N_{0,3}, N_{0,4}], & q_0 &= [U_1, U_2, U_3, U_4], \\ [N_\xi] &= [N_{\xi,1}, N_{\xi,2}, N_{\xi,3}, N_{\xi,4}], & q_x &= [U_{x,1}, U_{x,2}, U_{x,3}, U_{x,4}], \\ [N_\eta] &= [N_{\eta,1}, N_{\eta,2}, N_{\eta,3}, N_{\eta,4}], & q_y &= [U_{y,1}, U_{y,2}, U_{y,3}, U_{y,4}]. \end{aligned}$$

Тут $N_{\bullet,j}$ – базисні функції вигляду (12) для j -го вузла. З урахуванням цих позначень виразимо глобальні похідні функції U через локальні похідні від базисних функцій та вузлові параметри:

$$\frac{\partial}{\partial x} U^{(e)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [N]^{(e)} \cdot q^{(e)} = [N]_x^{(e)} \cdot q^{(e)}, \quad (16'')$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U^{(e)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [N]^{(e)} \cdot q^{(e)} = [N]_y^{(e)} \cdot q^{(e)}, \quad (16''')$$

де $[N]_x^{(e)}$, $[N]_y^{(e)}$ – матриця-рядок похідних від базисних функцій за x та y відповідно:

$$\begin{aligned} [N]_x^{(e)} &= \frac{\partial}{\partial x} [N]^{(e)} = \frac{1}{\Delta_x} \frac{\partial}{\partial \xi} [N]^{(e)} = \\ &= \frac{1}{\Delta_x} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} [N_0], \Delta_x \frac{\partial}{\partial \xi} [N_\xi], \Delta_y \frac{\partial}{\partial \xi} [N_\eta] \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta_x} ([N_{0,\xi}], \Delta_x [N_{\xi,\xi}], \Delta_y [N_{\eta,\xi}]) = \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_x} [N_{0,\xi}], [N_{\xi,\xi}], \frac{\Delta_y}{\Delta_x} [N_{\eta,\xi}] \right), \end{aligned} \quad (17')$$

$$\begin{aligned}
[N]_y^{(e)} &= \frac{\partial}{\partial y} [N]^{(e)} = \frac{1}{\Delta_y} \frac{\partial}{\partial \eta} [N]^{(e)} = \\
&= \frac{1}{\Delta_y} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} [N_0], \Delta_x \frac{\partial}{\partial \eta} [N_\xi], \Delta_y \frac{\partial}{\partial \eta} [N_\eta] \right) = \\
&= \frac{1}{\Delta_y} ([N_{0,\eta}], \Delta_x [N_{\xi,\eta}], \Delta_y [N_{\eta,\eta}]) = \\
&= \left(\frac{1}{\Delta_y} [N_{0,\eta}], \frac{\Delta_x}{\Delta_y} [N_{\xi,\eta}], [N_{\eta,\eta}] \right), \tag{17''}
\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial i} [N_\bullet] = [N_{\bullet,i}]$, $i \in \{\xi, \eta\}$, – матриці локальних похідних від базисних функцій.

4. Дискретизована задача. Скінченноелементне подання функціонала (9) набуде вигляду

$$I(U_k) = \sum_{e=1}^{n_x n_y} \int_{\Omega^{(e)}} (U_{k,x}^2 + U_{k,y}^2) d\Omega^{(e)} \rightarrow \min, \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

Дискретизуємо функціонал $I(U_k)$, підставивши в (12) формули (17) і замінюючи інтегрування по площі елемента повторним інтегралом у локальних координатах (ξ, η) :

$$I(q) = \sum_{e=1}^{n_x n_y} (q^{(e)})^\top \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([K_{,\xi}] + [K_{,\eta}]) |J| d\xi d\eta \cdot q^{(e)} \rightarrow \min, \tag{19}$$

де $q = \cup q^{(e)}$ – усі ступені вільності в задачі мінімізації; $|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \Delta_x \Delta_y$ – якобіан переходу від глобальних координат (x, y) до локальних (ξ, η) ; $[K_{,\xi}]$, $[K_{,\eta}]$ – симетричні матриці добутків похідних від базисних функцій, що мають блочну (3×3) -структуру:

$$\begin{aligned}
[K_{,i}] &= \begin{vmatrix} k_{00}^{(i)} [N_{0,i}]^\top [N_{0,i}] & k_{01}^{(i)} [N_{0,i}]^\top [N_{\xi,i}] & k_{02}^{(i)} [N_{0,i}]^\top [N_{\eta,i}] \\ k_{10}^{(i)} [N_{\xi,i}]^\top [N_{0,i}] & k_{11}^{(i)} [N_{\xi,i}]^\top [N_{\xi,i}] & k_{12}^{(i)} [N_{\xi,i}]^\top [N_{\eta,i}] \\ k_{20}^{(i)} [N_{\eta,i}]^\top [N_{0,i}] & k_{21}^{(i)} [N_{\eta,i}]^\top [N_{\xi,i}] & k_{22}^{(i)} [N_{\eta,i}]^\top [N_{\eta,i}] \end{vmatrix}, \\
& i \in \{\xi, \eta\}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Тут, наприклад, $k_{00}^{(i)} = (\Delta_x)^{-2}$, $k_{10}^{(i)} = k_{01}^{(i)} = (\Delta_x)^{-1}$, $k_{20}^{(i)} = k_{02}^{(i)} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ для матриці $[K_{,\xi}]$, аналогічні вирази маємо для матриці $[K_{,\eta}]$ із взаємозаміною Δ_x та Δ_y . Інші коефіцієнти далі не використовуються, а тому їх не наведено.

Важливо відмітити, що фактично можемо використовувати тільки блоки першого рядка та стовпця в матриці (20), оскільки значення похідних q_x та q_y є відомими, а отже, не впливають на мінімум функціонала (18). Тому невідомі значення функції q_0 знайдемо з еквівалентної задачі мінімізації, де виділено квадратичну (перший доданок) та лінійну форми (другий і третій доданки) від вузлових невідомих q_0 :

$$\begin{aligned}
I(q_0) = \sum_{e=1}^{n_x n_y} \left\{ (q_0^{(e)})^\top \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (k_1 \cdot [N_{0,\xi}]^\top [N_{0,\xi}] + k_2 \cdot [N_{0,\eta}]^\top [N_{0,\eta}]) d\xi d\eta \cdot q_0^{(e)} + \right. \\
+ 2(q_0^{(e)})^\top \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{\Delta_x} [N_{0,\xi}]^\top [N_{\xi,\xi}] + \right. \\
+ k_1 [N_{0,\xi}]^\top [N_{\eta,\xi}] \Big) |J| d\xi d\eta \cdot q_x^{(e)} + \\
+ 2(q_0^{(e)})^\top \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(k_2 [N_{0,\eta}]^\top [N_{\xi,\eta}] + \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{\Delta_y} [N_{0,\eta}]^\top [N_{\eta,\eta}] \right) |J| d\xi d\eta \cdot q_y^{(e)} \right\} \rightarrow \min. \quad (21)
\end{aligned}$$

Тут введено позначення $k_1 = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{1}{k_2}$, причому ці коефіцієнти є сталими і визначають параметри регулярної сітки. Для квадратного елемента (розбиття з однаковим кроком уздовж x та y , очевидно, матимемо $k_1 = k_2 = 1$, що особливо спрощує матричні обчислення і може бути використане для побудови тестових прикладів.

Інтеграли від (4×4) -матриць, що входять в (21), можна обчислити аналітично і надалі ефективно використовувати в програмній реалізації:

$$\begin{aligned}
[N_{00}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\xi}]^\top [N_{0,\xi}] d\xi d\eta = \frac{1}{105} \begin{vmatrix} 46 & -46 & -17 & 17 \\ -46 & 46 & 17 & -17 \\ -17 & 17 & 46 & -46 \\ 17 & -17 & -46 & 46 \end{vmatrix}, \\
[M_{00}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\eta}]^\top [N_{0,\eta}] d\xi d\eta = \frac{1}{105} \begin{vmatrix} 46 & 17 & -17 & -46 \\ 17 & 46 & -46 & -17 \\ -17 & -46 & 46 & 17 \\ -46 & -17 & 17 & 46 \end{vmatrix}, \\
[N_{0\xi}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\xi}]^\top [N_{\xi,\xi}] d\xi d\eta = \frac{1}{30} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \\
[M_{0\eta}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\eta}]^\top [N_{\eta,\eta}] d\xi d\eta = \frac{1}{30} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \\
[N_{0\eta}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\xi}]^\top [N_{\eta,\xi}] d\xi d\eta = \frac{1}{210} \begin{vmatrix} 22 & -22 & 13 & -13 \\ -22 & 22 & -13 & 13 \\ -13 & 13 & -22 & 22 \\ 13 & -13 & 22 & -22 \end{vmatrix}, \\
[M_{0\xi}] &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_{0,\eta}]^\top [N_{\xi,\eta}] d\xi d\eta = \frac{1}{210} \begin{vmatrix} 22 & -13 & 13 & -22 \\ 13 & -22 & 22 & -13 \\ -13 & 22 & -22 & 13 \\ -22 & 13 & -13 & 22 \end{vmatrix}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Задача мінімізації (21) дає систему лінійних алгебричних рівнянь з симетричною матрицею і з правими частинами F_1 і F_2 для шуканих вузлових значень обох «потенціальних» функцій U_1 і U_2 відповідно:

$$[A]q_0 = [F_1, F_2], \quad (23')$$

де

$$[A] = \sum_e (k_1 N_{00} + k_2 M_{00}), \quad (23'')$$

$$[F_k] = - \sum_e \left[\frac{|J|}{\Delta_x} ([N_{0\xi}] + \Delta_y [N_{0\eta}]) q_{x,k}^{(e)} + \frac{|J|}{\Delta_y} (\Delta_x [M_{0\xi}] + [M_{0\eta}]) q_{y,k}^{(e)} \right], \quad k = 1, 2. \quad (23''')$$

Отже, $[A]$ – симетрична додатно визначена матриця, розрідженість якої (наявність нульових коефіцієнтів) можна врахувати, зберігаючи її, наприклад, у формі верхньої стрічкової матриці. Півширина стрічки цієї матриці (без головної діагоналі) не перевищує $\max\{n_x, n_y\}$. Додатна визначеність вводиться штучно за допомогою врахування умови фіксації значення функції у деякому вузлі, наприклад, найпершому $U(x_0, y_0) = 0$, що для системи (23') еквівалентно зануленню коефіцієнтів 1-го рядка матриці (крім діагонального) та правих частин.

Систему (23') розв'язуємо методом Холецького (або LDL^T -факторизації) в два етапи:

1) факторизація матриці $[A] = LL^T$, тут L – нижня трикутна матриця;

2) виконання прямого $L \cdot t = F_k$, та зворотного ходу $L^T \cdot q_0 = t$ для кожної з правих частин окремо [1].

5. Тестові приклади.

Постійне векторне поле. Нехай задано пару чисел (dx_0, dy_0) , що визначає векторне поле в усіх вузлах регулярної сітки. На деякому з елементів розглянемо апроксимацію похідних, наприклад, як змінюється $\frac{\partial U}{\partial x}$ уздовж верхньої чи нижньої сторони ($\eta = \pm 1$) або $\frac{\partial U}{\partial y}$ уздовж лівої чи правої сторони ($\xi = \pm 1$). Підставляючи $\eta = 1$ (верхня сторона) у формули (12) з урахуванням (13), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\Delta_x} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (N_{0,3}) U_3 + \frac{\partial}{\partial \xi} (N_{0,4}) U_4 \right) + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (N_{\xi,3}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (N_{\xi,4}) \right) dx_0, \end{aligned} \quad (24)$$

тобто похідні $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}$ тільки для чотирьох базисних функцій відмінні від нуля.

Зауважимо, що на цій стороні похідна $\frac{\partial U}{\partial y} = dy_0$ залишається постійною.

Запишемо формулу (24) явно відносно ξ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3}{4\Delta_x} (1 - \xi^2)(U_3 - U_4) + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) dx_0. \quad (25)$$

Якщо тепер покласти $U_3 - U_4 = 2\Delta_x dx_0$, то $\frac{\partial U}{\partial x} = dx_0$, тобто функція U буде змінюватися лінійно вздовж верхньої сторони. Аналогічна ситуація й на

інших сторонах елемента. Природно припустити, що «потенціальна» функція U буде білінійною на усьому елементі. Для вузлових значень покладемо

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0, & U_2 &= U_1 + 2\Delta_x dx_0, \\ U_3 &= U_2 + 2\Delta_y dy_0, & U_4 &= U_1 + 2\Delta_y dy_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Підставивши (26) у (14), (15), після алгебричних перетворень з базисними функціями отримуємо

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \Delta_x dx_0(1 + \xi) + \Delta_y dy_0(1 + \eta), \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= dx_0, & \frac{\partial U}{\partial y} &= dy_0, \end{aligned}$$

тобто функція є справді білінійною і зберігає градієнт сталим. Далі, рівняння дискретної задачі (23) повинні виконуватися на будь-якому елементі. Підставимо обчислені матриці (22) в (23'') і (23''') для постійного векторного поля (dx_0, dy_0) і вузлових значень (26):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{105} \left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 46 & -46 & -17 & 17 \\ \Delta_y & -46 & 46 & 17 & -17 \\ \Delta_x & -17 & 17 & 46 & -46 \\ 17 & -17 & -46 & 46 \end{array} \right\| + \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \left\| \begin{array}{cccc} 46 & 17 & -17 & -46 \\ 17 & 46 & -46 & -17 \\ -17 & -46 & 46 & 17 \\ -46 & -17 & 17 & 46 \end{array} \right\| \right) \times \\ & \quad \times \left\| \begin{array}{c} U_0 \\ U_0 + 2\Delta_x dx_0 \\ U_0 + 2\Delta_x dx_0 + 2\Delta_y dy_0 \\ U_0 + 2\Delta_y dy_0 \end{array} \right\| = \\ & = \frac{-A}{30} \left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ \Delta_y & -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} dx_0 \\ dx_0 \\ dx_0 \\ dx_0 \end{array} \right\| + \Delta_x \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} dy_0 \\ dy_0 \\ dy_0 \\ dy_0 \end{array} \right\| \right), \end{array} \right) \end{aligned}$$

причому вклад матриць $[N_{0\eta}]$ і $[M_{0\xi}]$ дорівнює нулеві, оскільки для них сума коефіцієнтів рядка є нуль (і множимо на стовпець з однаковими компонентами). Звідси отримуємо $A = 6$:

$$\left\| \begin{array}{c} -(6/5)\Delta_y dx_0 - (6/5)\Delta_x dy_0 \\ (6/5)\Delta_y dx_0 - (6/5)\Delta_x dy_0 \\ (6/5)\Delta_y dx_0 + (6/5)\Delta_x dy_0 \\ -(6/5)\Delta_y dx_0 + (6/5)\Delta_x dy_0 \end{array} \right\| = \frac{A}{30} \left\| \begin{array}{c} -6\Delta_y dx_0 - 6\Delta_x dy_0 \\ 6\Delta_y dx_0 - 6\Delta_x dy_0 \\ 6\Delta_y dx_0 + 6\Delta_x dy_0 \\ -6\Delta_y dx_0 + 6\Delta_x dy_0 \end{array} \right\|.$$

Отже, хоча теоретично функція U з використанням ермітової апроксимації відновлює напрями векторного поля для довільного A , але тільки для $A = 6$ вона зберігає постійним градієнт, який можна визначити за вузловими значеннями самої функції. Оскільки програми побудови ізоліній, крім координат точок, використовують, як правило, тільки значення самого картованого параметра – функції U , то масштабний коефіцієнт $A = 6$ для правої частини (17') дає змогу таким програмам незалежно та достатньо точно відновлювати задане векторне поле як градієнт сіткової функції U .

Стиснення важкого прямокутного блока є модельною задачею для теоретичного обґрунтування утворення розломів у земній корі [6]. Відомий розв'язок у напруженнях з урахуванням сили ваги запишемо так [5, 6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= cx + by - ay, \\ \sigma_{yy} &= -ay, \\ \tau_{xy} &= -cy,\end{aligned}\tag{27}$$

де $a = \rho g$, ρ – густина блока, g – прискорення вільного падіння; b, c – вертикальний і горизонтальний градієнти додаткових напружень $\sigma_{xx} - ay$ відповідно. Числовий розв'язок (функції U_1 і U_2) отримано для таких значень: $x_{\min} = -4.1$, $x_{\max} = -0.1$, $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = 0$, $a = b = c = 25$.

На рис. 3 наведено схему навантаження і траєкторії головних напружень у стиснутому блоці (суцільні лінії – найбільші напруження стиску σ_3 , стрілки задають відповідне векторне поле). Розмірність градієнта напружень – МПа/км або КПа/м, тоді лінійні розміри беремо в [км] або [м] відповідно. Карти ізоліній побудовано за достатньо «грубою» (4×4)-сіткою елементів (25 вузлів), проте отримана картина добре узгоджується з відомими результатами, отриманими іншими методами [6, 10].

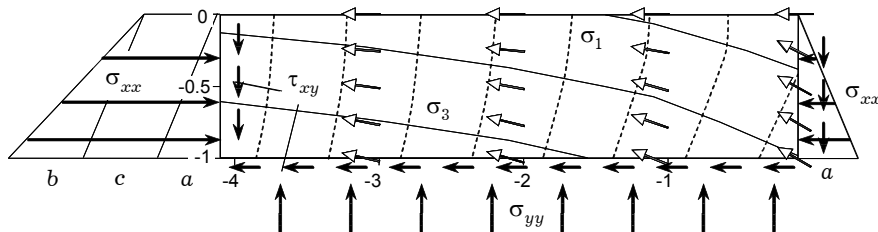


Рис. 3

Зауважимо, що розв'язок (27) у початку координат дає особливу точку векторного поля $(dx, dy) = (0, 0)$, оскільки всі компоненти напружень дорівнюватимуть нулеві. Щоб обійти цю ситуацію, зміщено блок вліво на 0.1. Хоча в більшості реальних задач особливі точки малоімовірні, проте в рамках запропонованого вище підходу вони повинні бути попередньо виключені з розгляду.

6. Висновки. Запропонований підхід легко можна інтегрувати в пакети скінченноелементного аналізу або використовувати самостійно як підготовчий етап для програм комп'ютерного картування. Хоча алгоритм описано з прив'язкою до регулярної сітки, проте, очевидно, без значних модифікацій він може бути придатний для областей, що вписані в цю сітку, тобто, коли деякі з прямокутних елементів виключено з розгляду.

Аналогічно можна було б розглянути й апроксимації на трикутних елементах, а в подальшому плануємо узагальнити підхід на довільні скінченноелементні розбиття. На думку авторів, ідея ермітових сплайнів також має перспективу розширення на тривимірні задачі для побудови вже поверхонь-траєкторій.

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 334 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – Москва: Мир, 1975. – 541 с.
3. Пинежанинов Ф. Базисные функции для конечных элементов с производными. 2000. – <http://pinega.da.ru>.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
6. Шейдеггер А. Основы геодинамики. – Москва: Недра, 1987. – 384 с.
7. Galybin A. N. Introduction of the stress trajectories element method for stress analysis in tectonic plates // Geophys. Research Abstracts. – 2007. – Vol. 9, 08179. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU2007-A-08179, European Geosciences Union 2007.

8. Jo Michisuke, Taguchi Masato, Suzuki Hideto, Automatic plotting of principal stress trajectories by direction function contouring // Trans. Japan Soc. Mech. Eng. A. – 2002. – **68**, No. 667. – P. 385–390.
9. Petrucci G., Restivo G. Automated stress separation along stress trajectories // Exper. Mech. – 2007. – **47**, No. 6. – P. 733–743.
10. Ramsay J. G., Lisle R. G. The techniques of modern structural geology // Applications of continuum mechanics in structural geology. – Elsevier, 2000. – Vol. 3. – P. 701–1061.
11. Thamm F. The role of the stress trajectories as an aid in the choice of the suitable shape of load-bearing structural element of engines and structure // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. (Techn. Univ. of Budapest). – 2000. – **44**, No. 1. – P. 171–183.
12. Weertman J. Stress trajectories for mode I and mode II cracks // Int. J. Fract. – 2006. – **137**, No. 1. – P. 251–259.

ЭРМИТОВЫ СПЛАЙНЫ В КАЧЕСТВЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Предложен конечноэлементный подход с использованием эрмитовых сплайнов для сведения задачи построения траекторий напряжений к нахождению двух потенциальных функций, которые удовлетворяют условиям интерполяции первых производных в узлах регулярной сетки. Эффективность такого подхода продемонстрирована на тестовых задачах, выяснены особенности расчетных соотношений.

HERMITIAN SPLINES AS BASIS FUNCTIONS FOR FINITE ELEMENTS METHOD TO CONSTRUCT STRESS TRAJECTORIES

The finite-element approach using Hermitian splines to construct stress trajectories is proposed. The problem is reduced to finding two potential functions which satisfy conditions of interpolation of the first order derivatives in the nodes of a regular mesh. Efficiency of such approach is shown on the test problems, the calculation features are elucidated.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
18.11.08