

ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛАХ ЗА НАГРІВУ ДЖЕРЕЛАМИ ТА ПОТОКАМИ ТЕПЛА

Наведено алгоритм розрахунку температурних полів в ортотропних тілах складної форми, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь. Для розробки алгоритму крайова задача теплопровідності для ортотропних тіл попередньо зведена до відповідних задач теплопровідності для ізотропних тіл з модифікованими крайовими умовами та джерелами тепла. Проведено дослідження впливу анізотропії на температурні поля в обмеженому та нескінченному тілі з порожниною, які нагріваються джерелами та потоками тепла.

Розглянемо задачу теплопровідності для ортотропного тіла, яке нагрівається шляхом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем і джерелами тепла. Для розв'язування задач теплопровідності для ізотропних тіл ефективним є метод граничних інтегральних рівнянь [3]. У зв'язку із громіздкістю вихідних співвідношень безпосереднє застосування цього методу для анізотропних тіл ускладнюється [3]. У пропонуваній роботі крайова задача теплопровідності для ортотропних тіл попередньо зведена до крайової задачі для ізотропних тіл, розв'язування якої може бути проведено з використанням відомих підходів методу інтегральних рівнянь. Приймемо, що тіло, яке може бути багатозв'язним, займає область D' , обмежену поверхнею S' . Крайова задача теплопровідності має вигляд

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) T' = -W', \quad (x', y', z') \in D', \quad (1)$$

$$q_n - \alpha(T' - T'_c) = 0, \quad (x', y', z') \in S', \quad (2)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коефіцієнти теплопровідності, W' – густина джерел тепла, α – коефіцієнт тепловіддачі, T'_c – температура середовища, що омиває поверхню S' . Тут q_n – потік тепла, який визначається за формулою

$$q_n = -\lambda_1 \frac{\partial T'}{\partial x'} \cos \widehat{n', x'} - \lambda_2 \frac{\partial T'}{\partial y'} \cos \widehat{n', y'} - \lambda_3 \frac{\partial T'}{\partial z'} \cos \widehat{n', z'},$$

$\widehat{n'}$ – зовнішня нормаль до поверхні S' .

Введемо нові змінні $x = \frac{x'}{c_1}$, $y = \frac{y'}{c_2}$, $z = \frac{z'}{c_3}$, де $c_j = \sqrt{a_j}$, $a_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}$, $\lambda = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$, у яких крайова задача (1), (2) набуде вигляду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = -W, \quad (x, y, z) \in D, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \beta(T - T_c) = 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (4)$$

де T, W, T_c – функції T', W', T'_c у нових змінних; $\beta = \frac{\alpha d'}{d}$,

$$d' = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right)^2}, \quad d = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}.$$

Тут $f(x', y', z') = 0$ – рівняння поверхні S' ; $F(x, y, z) = f(c_1 x, c_2 y, c_3 z)$; D і S

– область, яку займає тіло та його границя у змінних x, y, z ; $\frac{\partial T}{\partial n}$ – похідна вздовж зовнішньої нормалі до поверхні S .

Отже, отримано крайову задачу (3), (4), яка за виглядом збігається із задачею стаціонарної теплопровідності для ізотропного тіла. Використаємо для розв'язування задачі (3), (4) метод граничних інтегральних рівнянь [3].

1. Розглянемо обмежене ортотропне тіло. Розв'язок задачі (3) в інтегральній формі має вигляд [2]

$$T(x, y, z) = \int_S \left[\frac{\partial T(x_0, y_0, z_0)}{\partial n_0} G - T \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS + w(x, y, z), \quad (5)$$

де $G = \frac{1}{4\pi R}$, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $w = \frac{1}{\lambda} \int_D W(x_0, y_0, z_0) G dD$.

Інтегрування проводиться за змінною (x_0, y_0, z_0) ; n_0 – зовнішня нормаль до поверхні S . Спрямуємо точку (x, y, z) до поверхні S . Тоді з використанням властивостей потенціалу подвійного шару [2] отримаємо

$$\frac{T(x, y, z)}{2} = \int_S \left[\frac{\partial T}{\partial n_0} G - T \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS + w, \quad (x, y, z) \in S. \quad (6)$$

На підставі умови (4) маємо

$$\frac{\partial T}{\partial n_0} = \frac{\beta}{\lambda} (T_c - T).$$

Підставивши цей вираз у рівність (6), для знаходження температури на границі S отримуємо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2} T(x, y, z) = \int_S T Q ds + f, \quad (x, y, z) \in S, \quad (7)$$

де $Q = -\left(\frac{\beta}{\lambda} G + \frac{\partial G}{\partial n_0}\right)$; $f = \int_S \frac{\beta}{\lambda} T_c G ds + w$.

До розв'язування інтегрального рівняння (7) застосовуємо підходи, розроблені у методі граничних елементів [3, 4]. Зазначимо, що надалі всі розрахунки виконано на основі чисельного розв'язування цього інтегрального рівняння.

Як приклад розглянемо випадок нагріву тіла зосередженим джерелом тепла інтенсивності q , яке розміщене в точці (x'_q, y'_q, z'_q) . Тоді, враховуючи, що $W' = q\delta(x' - x'_q)\delta(y' - y'_q)\delta(z' - z'_q) = q\delta(x - x_q)\delta(y - y_q)\delta(z - z_q)$, отримаємо

$w = \frac{q}{4\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{(x - x_q)(y - y_q)(z - z_q)}}$, де $x_q = \frac{x'_q}{c_1}$, $y_q = \frac{y'_q}{c_2}$, $z_q = \frac{z'_q}{c_3}$.

Дослідимо вплив анізотропії для кулі радіуса R_0 з розміщеним у центрі джерелом тепла, коли температура середовища, яке омиває границю, дорівнює нулеві. Розрахунки температури, віднесеної до величини $C = q/(\lambda R_0)$, в меридіанному перерізі $\theta = 0$ виконано для значення параметра $\gamma = \alpha R_0/\lambda = 0.1$. При обчисленнях прийнято $\lambda_1 = \lambda_2$. На рис. 1 наведено залежності відносної температури T/C від кутової координати φ , яка відраховується від додатної півосі Oz . Кривим 1–5

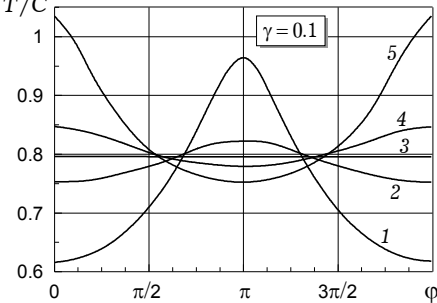


Рис. 1

відповідають значення параметрів $\lambda_3/\lambda_1 = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$. Бачимо, що анізотропія істотно змінює розподіл температури в тілі. При відношенні $\lambda_3/\lambda_1 > 1$ температура на границі є максимальною біля осі Oz та мінімальною в перерізі $z = 0$, а при $\lambda_3/\lambda_1 < 1$ характер розподілу температури протилежний.

Для оцінки точності використаного числового алгоритму наведемо точний розв'язок поставленої задачі для випадку ізотропного тіла. Температура в цьому випадку має вигляд

$$T = \frac{q}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_0} \right),$$

де r – радіальна координата. Звідси отримуємо температуру на границі

$$T = \frac{q}{4\pi\lambda R_0} \frac{1}{\gamma} = \frac{C}{4\pi\gamma}. \quad (8)$$

Розраховане за числовим алгоритмом значення температури, віднесеної до величини C (крива 3 на рис. 1), практично збігається з точним значенням (8), яке при вибраному вище значенні $\gamma = 0.1$ дорівнює 0.7958.

2. Розглянемо нескінченне тіло з порожниною при нагріві зосередженим джерелом тепла. Загальний розв'язок рівняння (3) в цьому випадку також має вигляд (6), у якому диференціювання проводиться по нормалі, яка є зовнішньою відносно тіла (напрявлена в порожнину). Розрахунки виконано для тіла з еліпсоїдальною порожниною з півосями $b = 1.5a$, $c = 2a$, джерело тепла розміщено в точці $(0, 0, 3a)$. На границі порожнини $T_c = 0$. Рівняння границі порожнини описано параметрично: $x = a \cos \theta \sin \varphi$, $y = a \sin \theta \sin \varphi$, $z = b \cos \varphi$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$. На рис. 2 наведено графіки залежностей відносної температури $\frac{T}{C_1}$ на границі порожнини в перерізі $\theta = 0$ від параметра φ при $\gamma_1 = 0.1$

(тут $C_1 = \frac{q}{\lambda a}$, $\gamma_1 = \frac{\alpha a}{\lambda}$). Кривим 1–5 відповідають значення відношення $\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 0.1, 0.5, 1, 2, 4$. Із графіків видно,

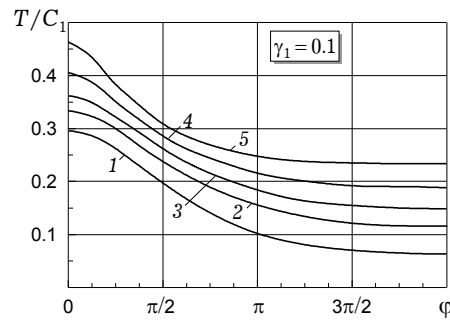


Рис. 2

що температура зростає при зменшенні відношення $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, тобто характер розподілу температури є протилежним до розподілу тепла в обмеженому тілі.

3. Розглянемо випадок, коли на нескінченності температура в тілі з порожниною змінюється за поліноміальним законом. Приймемо, що розподіл температури в суцільному тілі відомий і має вигляд $T = T_\infty$, де T_∞ – гармонічна функція, що є поліномом за змінними (x, y, z) . Температуру в тілі зобразимо у вигляді $T = T_\infty + T_\Delta$, де T_Δ – гармонічна функція, яка загасає на безмежності. Використаємо для T_Δ інтегральну форму розв'язку

$$T_\Delta(x, y, z) = \int_S \left[\frac{\partial T_\Delta}{\partial n_0} G - T_\Delta \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS. \quad (9)$$

Оскільки функція T_∞ є гармонічною у внутрішній відносно поверхні S

області порожнини, то

$$\int_S \left[\frac{\partial T_\infty}{\partial n_0} G - T_\infty \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS = 0, \quad (x, y, z) \in D. \quad (10)$$

Додавши рівності (9), (10), отримаємо інтегральне зображення для температури у вигляді

$$T(x, y, z) = \int_S \left[\frac{\partial T}{\partial n_0} G - T \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS + T_\infty, \quad (x, y, z) \in D. \quad (11)$$

Підставивши рівність (11) у граничну умову (4), отримаємо інтегральне рівняння, аналогічне до (7), у якому $f = \int \frac{\beta}{\lambda} T_c G ds + T_\infty$.

4. Розглянемо випадок, коли анізотропне тіло нагрівається потоком тепла (q_x, q_y, q_z) . Температура в суцільному анізотропному тілі тоді матиме вигляд

$$T' = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{q_x}{a_1} x' + \frac{q_y}{a_2} y' + \frac{q_z}{a_3} z' \right).$$

У змінних x, y, z величина T_∞ буде

$$T_\infty = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{q_x}{c_1} x + \frac{q_y}{c_2} y + \frac{q_z}{c_3} z \right).$$

Розрахунки виконано для розглянутого вище тіла з еліпсоїдальною порожниною, коли потік тепла направлений уздовж осі Oz . Графіки залежності від φ відносної температури T/C_2 на границі порожнини в перерізі $\theta = 0$ при $\gamma_1 = 0.1$ наведено на рис. 3. Кривій 1 відповідає розподіл відносної температури при $\lambda_3/\lambda_1 = 0.1$ і $C_2 = 10q_z a/\lambda$, кривим 2–5 відповідають аналогічні результати розрахунків, виконані при $\lambda_3/\lambda_1 = 0.5, 1.0, 2.0, 10.0$ і $C_2 = q_z a/\lambda$. Бачимо, що температура на границі порожнини при зростанні відношення λ_3/λ_1 зменшується.

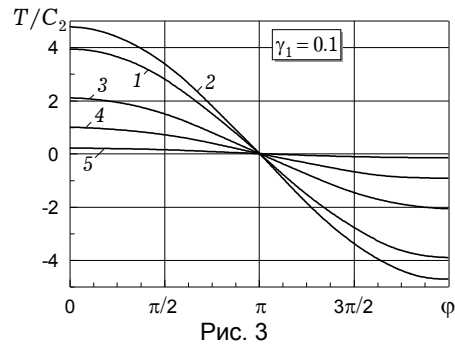


Рис. 3

5. Розглянемо випадок, коли тіло займає область D' , яка є півпростором $z' > 0$ з порожниною. Рівняння теплопровідності у змінних для півпростору матиме вигляд (3), гранична умова на поверхні порожнини – вигляд (4), а умову Ньютона на границі $z = 0$ у змінних x, y, z запишемо так:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \beta_z (T - T_c^z) = 0,$$

де $\beta_z = \alpha_z/c_3$, α_z – коефіцієнт тепловіддачі з граничної площини, T_c^z – температура середовища, що омиває границю $z = 0$ і записана у змінних x, y, z .

Для знаходження температури у півпросторі справджується інтегральне подання (5), в якому $G = G_1$, де [1]

$$G_1 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{\tilde{R}} - 2\gamma A(r, z, z_0) \right], \quad (12)$$

де

$$A(r, z, z_0) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{r^2 + (z + z_0 + \omega)^2}}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad \tilde{R} = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}, \quad \gamma = \frac{\beta_z}{\lambda}.$$

Отже, запропоновано алгоритм розрахунку тривимірних температурних полів в ортотропних тілах складної форми, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь. Показано, що крайова задача теплопровідності для ортотропних тіл зводиться до відповідних задач теплопровідності для ізотропних тіл з модифікованими крайовими умовами та джерелами тепла. Встановлено, що анізотропія істотно впливає на характер і значення температурних полів і в обмеженому, і в нескінченному тілі з порожниною, які нагріваються джерелами та потоками тепла.

1. Максимович В. М., Геворгян В. В., Соляр Т. Я. Визначення стаціонарних і нестаціонарних температур у багатозв'язних просторі та шарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 3. – С. 135–139.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел П. Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 524 с.
4. Beer G., Smith I., Duenster C. The boundary element method with programming. – Wien – New York, 2008. – 494 p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛАХ ПРИ НАГРЕВЕ ИСТОЧНИКАМИ И ПОТОКАМИ ТЕПЛА

Приведен алгоритм расчета температурных полей в ортотропных телах сложной формы, основанный на методе интегральных уравнений. Для разработки алгоритма граничная задача теплопроводности для ортотропных тел предварительно сведена к соответствующим задачам теплопроводности для изотропных тел с модифицированными граничными условиями и источниками тепла. Проведено исследование влияния анизотропии на температурные поля в ограниченном и бесконечном телах с полостью, нагреваемыми источниками и потоками тепла.

DEFINITION OF 3D TEMPERATURE FIELDS IN MULTICONNECTED ORTHOTROPIC BODIES UNDER HEATING BY HEAT SOURCES AND FLUXES

An algorithm of calculation of temperature fields in orthotropic bodies of complex form is presented. The algorithm is based on the integral equation method. To develop the algorithm the heat conduction boundary-value problem for orthotropic bodies has been reduced formerly to the corresponding heat conduction problems for isotropic bodies with modified boundary conditions and heat sources. Influence of anisotropy on temperature fields in the bounded and infinite body with a cavity heated by heat sources and fluxes is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.11.07