УДК 539.30

І. Б. Прокопович

ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЙ СТАНУ ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА ВІД МІРИ ПОВОРОТУ

Показано, що міри деформації та початкові значення векторних і тензорних параметрів стану поділяються на суб'єктивні необертові та об'єктивні обертові. Відповідно поділяються й подання функцій стану, з яких лише об'єктивні явно не залежить від міри повороту осей матеріалу. Побудовано формули зведення безобертових диференціалів функцій стану до виразів через тензори безмежно малих деформації і повороту. На цій підставі отримано об'єктивні подання для тензора напружень через похідні від потенціалу стану анізотропного матеріалу. Результати стосуються нелінійної механіки тіл з початковими напруженнями.

Питання залежності функцій стану деформівного тіла від його обертання докладно не розглядають, тому що вважається, що зв'язки між параметрами стану не залежать від міри повороту. Тому й за параметр напружено-деформованого стану приймають ті чи інші симетричні тензорні міри деформації, незалежні від міри повороту. Проте, з іншого боку, тензорні й векторні параметри стану, включно з тензорами деформації, а також параметри анізотропії матеріалу залежать від обертання. Загальноприйнято вважати, що із застосуванням симетричних тензорів деформації ця проблема вирішується сама собою. Дійсно, в лінійній теорії, коли ґрадієнт поля переміщень, а, отже, і деформації, і повороти покладають малими, то впливом поворотів на значення тензорних функцій стану можна знехтувати. Інша річ, коли йдеться про нелінійні кінематичні ефекти, зокрема про неоднорідне поле поворотів, зумовлене таким же полем деформацій. Тоді у функціях стану необхідно враховувати залежність тензорних параметрів від обертання.

У деяких монографіях з нелінійної механіки [4, 7] описано дослідження особливостей залежності від міри повороту для співвідношення пружності (вираз для напружень через міру чи тензор деформації). Отримані висновки нібито доводять загальновідомі твердження класичної нелінійної теорії пружності щодо застосування мір деформації (наприклад, [1–3, 5, 8, 9]), проте їх доведення хибне, оскільки ґрунтується на певній «індиферентності», за термінологією роботи [4], співвідношення пружності від системи відліку. Насправді ж функції стану, зрештою, як і будь-які закони природи, ніяк не залежать від суб'єктивно вибраних спостерігачем координат[1]. Розуміння цього факту лежить в основі понять вектора та тензора як об'єктивних направлених об'єктів, незалежних від координат, і відображено правилами перетворення компонент тензора. Так чи інакше, для потреб задач про взаємодію зв'язаних полів у початково напруженому тілі необхідно дослідити залежність від обертання не лише для співвідношення пружності, а й для довільних тензорних функцій стану.

Об'єктивні та суб'єктивні функції стану. Із введенням фізичних понять вектора та тензора математичні величини поділяють на об'єктивні, фізичні, та суб'єктивні. Перші це – скаляри, вектори й тензори, а другі – довільно вибрані спостерігачами базиси та компоненти векторів і тензорів у цих базисах. Наприклад, у виразах

[1] Це твердження легко довести від супротивного на простому прикладі. Нехай p і ρ – дві повязані фізичні величини. Припустимо, що зв'язок між ними також залежить від радіус-вектора $\mathbf{r}$ та часу t: $p = f(\rho, \mathbf{r}, t)$. Оскільки функції $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ і $p = p(\mathbf{r}, t)$ описують поля цих величин, то $\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \wedge p = p(\mathbf{r}, t) = f(\rho, \mathbf{r}, t) \;\Rightarrow\; p = f(\rho) \wedge p(\mathbf{r}, t) = f(\rho(\mathbf{r}, t))$, що й треба було довести.

$$\mathbf{X} = \sum X_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_{x-1} \ell_x} \mathbf{i}_{\ell_1} \mathbf{i}_{\ell_2} \ldots \mathbf{i}_{\ell_{x-1}} \mathbf{i}_{\ell_x} ,$$

$$\mathbf{Y} = \sum Y_{m_1 m_2 \ldots m_{y-1} m_y} \mathbf{i}_{m_1} \mathbf{i}_{m_2} \ldots \mathbf{i}_{m_{y-1}} \mathbf{i}_{m_y}$$

зліва – тензори рангів x та y, а справа – їх суб'єктивні поліадні подання, записані через довільно вибраний базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ та компоненти $X_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_{x-1} \ell_x}$ і $Y_{m_1 m_2 \ldots m_{y-1} m_y}$. Враховуючи цей поділ математичних величин, доведемо, що зв'язки між об'єктивними величинами не залежать від їх спільного обертання. Насамперед зауважимо, що обертання є взаємним: якщо один вектор повертається відносно іншого, то цей останній також повертається відносно першого. Звідси випливає, що всі об'єктивні напрямки – обертові. Тому всі необертові, фіксовані напрямки – суб'єктивні. А функції, що пов'язують між собою об'єктивні величини, не залежать від векторних і тензорних констант, тобто такі функції – обертовні [6]. Їх вигляд не залежить від спільного повороту змінних, що й треба було довести. Анізотропне значення обертовної функції повертається разом зі спільним поворотом її змінних (іншими словами – обертовні функції є безумовно ізотропними). Отже, всі об'єктивні функції також ізотропні, оскільки не залежать від анізотропних тензорних констант.

Для наочності розглянемо функцію $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, значення якої є тензором рангу g. У випадку спільного обертання змінних функції маємо [6]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{X}} \triangleleft \mathbf{R}_x^*, \hat{\mathbf{Y}} \triangleleft \mathbf{R}_y^*) = \hat{\mathbf{G}} \triangleleft \mathbf{R}_g^* = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}) \triangleleft \mathbf{R}_g^* . \tag{1}$$

Тут і далі збережено позначення з роботи [6], зокрема, шапочкою «$\hat{}$» позначено фіксовані відлікові значення тензорів перед поворотом. Трикутна «стрілка», ліва «$\triangleleft$» чи права «$\triangleright$», означає згортку, порядок якої дорівнює рангу тензора, на який вона вказує. Тензор $\mathbf{R}_q^*$ – узагальнений ортогональний тензор довільного парного рангу $2q \geq 0$, який характеризує поворот довільного тензора рангу q [6]. Оскільки відлікові значення тензорів сталі, то вони суб'єктивні. Відповідно змінний тензор $\mathbf{R}_q^*$ також є суб'єктивним (його значення залежить від вибору відлікових значень $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}$). Тому у формулах (1) лише перший вираз є об'єктивною функцією, тоді як три останні вирази – суб'єктивні функції, тому що залежать від суб'єктивних величин. Формули (1) показують, що об'єктивну функцію можна подати як функцію, залежну також і від суб'єктивних величин.

Об'єктивні та суб'єктивні міри деформації. Зміна довжини та напрямку лінійних розмірів безмежно малого матеріального елемента визначається невиродженим тензором другого рангу [3–5, 7, 8]:

$$d\mathbf{r} = d\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}} \cdot d\hat{\mathbf{r}}_0 . \tag{2}$$

Тут $d\hat{\mathbf{r}}_0$ і $d\mathbf{r}$ – відповідно стала початкова та змінна поточна (актуальна) величина певного безмежно малого лінійного розміру (віддалі між двома безмежно близькими «матеріальними» точками), тензор $\mathbf{F}$ інколи називають ґрадієнтом деформації [8], а його транспоненту $\mathbf{F}^{\mathsf{T}}$ – ґрадієнтом місця [4], оскільки вони виражаються через ґрадієнт вектора зміщення чи радіуса-вектора. Загалом функції стану деформівних матеріалів залежать від тензора $\mathbf{F}$. Застосовуючи теорему Коші про полярний розклад невиродженого тензора другого рангу, тензор $\mathbf{F}$ розкладають на згортку додатного симетричного тензора $\mathbf{U}$ або $\mathbf{V}$ та ортогонального $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} . \tag{3}$$

Симетричні тензори характеризують деформацію лінійних розмірів, їх квадрати $\mathbf{B} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}$ та $\mathbf{C} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{U}$ називають мірами деформації [1–5, 7, 8]. Тензор $\mathbf{R}$ характеризує поворот матеріальних елементів. Вектори $d\hat{\mathbf{r}}_0$ сталі, а, отже, суб'єктивні, відповідно – суб'єктивним є тензор $\mathbf{R}$. Оскільки

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R} \equiv \mathbf{U} : \mathbf{R}_2, \tag{4}$$

то лише один тензор із пари тензорів $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ є об'єктивним. Оскільки всі напрямки $d\hat{\mathbf{r}}_0$ – суб'єктивні, то суб'єктивними є і напрямки, спрямовані вздовж головних осей тензора $\mathbf{U}$, тому він суб'єктивний. Відповідно тензор $\mathbf{V}$ – об'єктивний.

Обертовий початковий стан та об'єктивні функції стану. Формули (3) подають зміну лінійних розмірів у вигляді двох суперпозицій. Перша з них – це деформація $d\hat{\mathbf{r}} = d\hat{\mathbf{r}}_0\cdot\mathbf{U}$ з наступним поворотом $d\mathbf{r} \equiv d\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{R}$, а друга – поворот $d\mathbf{r}_0 \equiv d\hat{\mathbf{r}}_0\cdot\mathbf{R}$ з наступною деформацією $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{V}$. Тут $d\mathbf{r}_0$ відповідає обертовому недеформованому стану, а $d\hat{\mathbf{r}}$ – деформованому необертовому. Перший із них об'єктивний, другий – суб'єктивний. Таким чином, на відміну від сталого початкового стану, пов'язаного з поточним через суб'єктивний тензор $\mathbf{F}$, обертовий початковий стан пов'язаний з поточним через об'єктивний тензор $\mathbf{V}$. Обертовий початковий стан характеризується обертовими початковими значеннями параметрів стану та анізотропії. Наприклад, якщо $\hat{\mathbf{P}}_0$, $\hat{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{P}, \mathbf{Q}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}}$ – фіксовані початкові значення деяких параметрів стану[2] $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ тензорів рангів p і q *відповідно,* а сталий тензор $\hat{\boldsymbol{\Xi}}_0$ рангу ζ характеризує анізотропію у фіксованому початковому стані, *то об'єктивному початковому стану відповідають такі обертові параметри:*

$$\mathbf{P}_0 = \hat{\mathbf{P}}_0 \lhd \mathbf{R}_p, \qquad \mathbf{Q}_0 = \hat{\mathbf{Q}}_0 \lhd \mathbf{R}_q, \qquad \boldsymbol{\Xi}_0 = \hat{\boldsymbol{\Xi}}_0 \lhd \mathbf{R}_\zeta. \tag{5}$$

Встановивши об'єктивний початковий стан, можемо записати об'єктивне подання функції стану деформівного матеріалу. Така функція залежить від характеристик початкового стану (тут – тензорів (5)), від поточних значень параметрів стану (тут – тензорів $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$) та об'єктивних тензорів деформації $\mathbf{V}$ чи $\mathbf{B}$ (або обернених до них). Надалі розглянемо як достатньо загальний приклад таку функцію стану рангу s:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{V},\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\Xi}_0) = \mathbf{S}(\mathbf{B},\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\Xi}_0). \tag{6}$$

Суб'єктивні подання функції стану. Враховуючи рівності (4) і (5), зведемо подання (6) до функції, що залежить від суб'єктивних величин – параметрів стану $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \lhd \mathbf{R}_p^{\mathsf{T}}$, $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \lhd \mathbf{R}_q^{\mathsf{T}}$, міри деформації $\mathbf{U}$ (або $\mathbf{C}$) та міри повороту $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{U},\hat{\mathbf{P}},\hat{\mathbf{Q}},\hat{\mathbf{P}}_0,\hat{\mathbf{Q}}_0,\hat{\boldsymbol{\Xi}}_0) \lhd \mathbf{R}_s = \mathbf{S}(\mathbf{C},\hat{\mathbf{P}},\hat{\mathbf{Q}},\hat{\mathbf{P}}_0,\hat{\mathbf{Q}}_0,\hat{\boldsymbol{\Xi}}_0) \lhd \mathbf{R}_s. \tag{7}$$

Таке подання зручне для побудови безобертового диференціала функції стану [6]:

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{S}(\mathbf{V},\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0,\boldsymbol{\Xi}_0) = \left[d\mathbf{S}(\mathbf{U},\hat{\mathbf{P}},\hat{\mathbf{Q}},\hat{\mathbf{P}}_0,\hat{\mathbf{Q}}_0,\hat{\boldsymbol{\Xi}}_0)\right] \lhd \mathbf{R}_s. \tag{8}$$

Тут справа всі величини з нижнім індексом «0» є сталими, тому у диференціалі справа ними можна знехтувати. Підставляючи у подання (7) та (8) вирази мір деформації через тензори $\mathbf{F}$ та $\mathbf{R}$: $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{F}$, $\mathbf{U} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{F}^{\mathsf{T}}$ або $\mathbf{B} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{F}$, $\mathbf{C} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathsf{T}}$, отримаємо різні подання для функції стану, залежні від тензора $\mathbf{F}$. Зрозуміло, що вони також суб'єктивні.

---

[2] Зокрема, це можуть бути теплові, електричні та магнітні параметри внутрішньої енергії і їх градієнти [2, 4, 5, 7, 8].

Диференціали мір деформації та повороту. Для безпосереднього застосування отриманих формул необхідно записати вирази для диференціалів функцій стану через накладене поле безмежно малих зміщень $\delta\mathbf{w}$, ґрадієнт якого дорівнює відносному приросту $\delta\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{F} = \nabla\mathbf{w}$. Симетрична частина приросту $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym}\delta\boldsymbol{\eta}$ є тензором безмежно малої деформації, а кососиметрична $\delta\boldsymbol{\omega} = \operatorname{asym}\delta\boldsymbol{\eta}$ – безмежно малий кут повороту осей деформації елементів, співвісних з головними напрямками тензора $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ [1, 3, 4, 7–9]. Виходячи з відомих виразів для диференціалів мір деформації [4]:

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot d\mathbf{F} = \delta\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\cdot\delta\boldsymbol{\omega} - \delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{B}, \tag{9}$$

$$d\mathbf{C} = d\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathsf{T}} + \mathbf{F}\cdot d\mathbf{F}^{\mathsf{T}} = 2\mathbf{F}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{F}^{\mathsf{T}}, \tag{10}$$

на основі формули $\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{B} = d\mathbf{C} : \mathbf{R}_2$ отримаємо вирази для безобертового та обертового диференціалів міри $\mathbf{B}$:

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{B} = 2\mathbf{V}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{V}, \qquad d_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{B} = \delta\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} - 2\mathbf{V}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{V}. \tag{11}$$

Проте цього недостатньо для побудови диференціалів функцій стану, потрібно мати такі ж вирази для диференціалів $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$. Щоб отримати їх, скористаємося виразом для приросту ортогонального тензора [4]:

$$d\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} - 2(\mathbf{F}^{\mathsf{T}})^{-1}\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i+\lambda_j)^{-1}\mathbf{n}_i\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\,.$$

Тут $\mathbf{n}_i$ – права трійка одиничних головних напрямків тензора $\mathbf{V}$, а λ_i – відповідні власні значення, головні відносні видовження. З виразу випливає, що

$$\delta\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{R}^{-1}\cdot d\mathbf{R} = \underline{\delta\boldsymbol{\omega}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}}}, \tag{12}$$

де

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \sum_{i,j=1}^{3}(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i+\lambda_j)^{-1}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j = -\boldsymbol{\Omega} :: \mathbf{I}_4 = -\mathbf{I}_2 : \boldsymbol{\Omega} : \mathbf{I}_2 =$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{V}\right) -}$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}(\lambda_i-\lambda_j)^3[\lambda_i\lambda_j(\lambda_i+\lambda_j)]^{-1}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j}} \tag{13}$$

– кососиметричний тензор четвертого рангу. Оскільки $V_k \approx 1$ для твердих матеріалів, то двічі підкреслені члени у формулах (12) і (13) несуттєві порівняно з підкресленими однією лінією. Якщо тензори $\mathbf{V}$ та $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ співвісні (тобто $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{3}\delta\varepsilon_k\mathbf{n}_k\mathbf{n}_k$), то $\delta\boldsymbol{\rho} = \delta\boldsymbol{\omega}$. Коли ж додаткова зсувна деформація $\operatorname{Dev}\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ не співвісна з такою ж накопиченою $\operatorname{Dev}\mathbf{V}$, то $\delta\boldsymbol{\rho} \neq \delta\boldsymbol{\omega}$, тоді як в рамках лінійної теорії ці повороти тотожні.

Враховуючи, що $\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{V} = d\mathbf{U} : \mathbf{R}_2$, і з огляду на (3) отримаємо

$$d\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} - \delta\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{V},$$

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot(\delta\boldsymbol{\eta} - \delta\boldsymbol{\rho}) \quad\Rightarrow\quad \delta\boldsymbol{\rho} = \delta\boldsymbol{\eta} - \mathbf{V}^{-1}\cdot\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{V}. \tag{14}$$

Тоді, враховуючи (12) і (13), отримаємо вираз для безобертового диференціала:

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{V} = \mathbf{W} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &\equiv \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i\lambda_j(\lambda_i + \lambda_j)^{-1}(\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i) = \\ &= \underline{\frac{1}{8}\left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_2\right) : \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2\cdot\mathbf{V}\right) : \left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_2\right)} - \\ &\quad \underline{\underline{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}(\lambda_i - \lambda_j)^2(\lambda_i + \lambda_j)^{-1}(\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\mathbf{n}_j\mathbf{n}_i)}}\end{aligned} \tag{16}$$

– повністю симетричний тензор четвертого рангу такий, що $\mathbf{I}_k \overset{(k)}{\circ} \mathbf{W} = \mathbf{W} \overset{(k)}{\circ} \mathbf{I}_k$, $k = 2, 3, 4$. Знову ж таки, для твердих матеріалів можна знехтувати двічі підкресленими членами.

Диференціали функцій стану. Враховуючи формули (9)–(16), запишемо диференціал об'єктивного подання функції стану (7):

$$d\mathbf{S} = -\mathbf{S} \lhd \boldsymbol{\Xi}_{s+1} : (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{S}_{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{S}_{,\mathbf{P}} \rhd \partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P} + \mathbf{S}_{,\mathbf{Q}} \rhd \partial_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{Q}\,, \tag{17}$$

де

$$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv 2\mathbf{S}_{,\mathbf{B}} : \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{V}\right) = \mathbf{S}_{,\mathbf{V}} : \mathbf{W} = 2\mathbf{S}_{,\mathbf{C}} : \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{F}\right) \tag{18}$$

– об'єктивна деформаційна похідна. Зокрема, якщо Φ – питома внутрішня енергія (віднесена до одиниці маси), а ρ – густина матеріалу, то $\mathbf{T} = \rho\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор напружень (тензор істинних напружень, тензор Коші) [1–5, 7, 8]. Отже, за формулою (18) отримуємо такі диференціальні вирази для напружень:

$$\mathbf{T} = \rho\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\rho\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}}\cdot\mathbf{V} = \rho\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{V}} : \mathbf{W} = 2\rho\mathbf{F}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{C}}\cdot\mathbf{F}\,. \tag{19}$$

З усіх цих виразів у літературі наводять лише останній, оскільки об'єктивні міри $\mathbf{V}$ та $\mathbf{B}$ вважають непридатними для функцій стану анізотропних матеріалів. Насправді ж формули (7), (8) показують, що і об'єктивні, і суб'єктивні міри можна застосовувати до будь-яких матеріалів. Інша річ, що для цього потрібно правильно записувати диференціали функцій стану. Якщо всі базисні тензорні параметри стану, крім міри деформації $\mathbf{V}$, набувають ізотропних значень, то похідна $\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}}$ співвісна з тензорами $\mathbf{V}, \mathbf{B}$ і $\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}}$ (див. [1, 3–5, 7, 8]). Тоді перше з рівнянь (19) зводиться до відомої формули $\mathbf{T} = 2\rho\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}} = 2\rho\boldsymbol{\Phi}_{,\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B}$ з курсу нелінійної пружності ізотропного тіла [3–5, 7, 8].

Висновки. Отже, міри чи тензори деформації, що обертаються разом з матеріальними елементами тіла, належать до об'єктивних параметрів стану. Натомість, необертові міри та тензори деформації є суб'єктивними. Міру повороту можна вилучити з подання функції стану лише застосуванням об'єктивних параметрів, у тому числі обертових значень початкового стану. Це частково спростовує поширене уявлення, що застосування будь-яких мір деформації дає змогу вилучити міру повороту з функцій стану. Будь-які відомі параметри «великої» деформації можна застосовувати для подання довільної функції стану без огляду на матеріал тіла, всупереч поширеному твердженню, що для функцій стану анізотропних матеріалів обертові міри застосовувати не можна. Інша річ, що, застосовуючи такі міри, необхідно застосовувати відповідний апарат диференціювання обертовних тензорних функцій [6].

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
2. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Акустоэлектромагнитоупругость – Киев: Наук. думка, 1988. – 284 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 3.)
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – Москва: Высш. шк., 1983. – 399 с.
4. *Лурье И.А.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
5. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
6. *Прокопович І. Б.* Диференціювання тензорних функцій стану тіла з урахуванням обертання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 99–104.
7. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. – Москва: Мир, 1985. – 560 с.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
9. *Черных К. Ф.* Нелинейная упругость (теория и приложения). – Санкт-Петербург: Соло, 2004. – 420 с.
10. *Holzapfel G. A.* Nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering. – Chichester: J. Wiley & Sons, 2000. – 440 p.

О ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА ОТ МЕРЫ ПОВОРОТА

Показано что, меры деформации и начальные значения векторных и тензорных параметров состояния делятся на субъективные невращаемые и объективные вращаемые. Соответственно делятся и представления функций состояния, из них только объективные не зависят явно от меры поворота осей материала. Построены формулы сведения безвращательных дифференциалов функций состояния к выражениям через тензоры бесконечно малых деформаций и вращения. На этом основании получены объективные представления для тензора напряжений через потенциал состояния анизотропного материала. Результаты относятся к нелинейной механике тел с начальными напряжениями.

ABOUT DEFORMABLE SOLID STATE FUNCTION DEPENDENCE ON ROTATION MEASURE

It is shown that the strain measure tensors and initial values of vector and tensorial state parameters are divided into objective rotational and subjective one which do not rotate. Several presentations of any state function are divided correspondingly. Only objective ones do not explicitly depend on the rotation measure of material axis. The formulae for reduction of non-rotational differentials into expressions in terms of tensor of the infinitesimal deformation and rotation are constructed. For this reason, the objective representations of the stress tensor in terms of the state potential derivatives are obtained for anisotropic material. The results concern the nonlinear mechanics of initially stressed solids.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.06.08