

ДОСЛІДЖЕННЯ МІЦНОСТІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ

Із застосуванням аналога δ_c -моделі отримано розв'язок задачі про напружено-деформований стан пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини з поверхневою тріщиною. При цьому додаткові обмеження на пружні параметри матеріалу не накладаються. Досліджено залежність довжини пластичної зони і розкриття поверхневої тріщини від величини навантаження, геометричних параметрів тріщини та оболонки і механічних властивостей матеріалу.

Дослідженню напруженого стану пружно-пластичних оболонок з різним типом тріщин (наскрізних і ненаскрізних) присвячено значну кількість робіт. Основні результати одержано за допомогою δ_c -моделі, яка була застосована при дослідженні ізотропних і ортотропних циліндричних, сферичних оболонок [7–11] з наскрізною, поверхневою і внутрішньою тріщинами, а також ізотропних оболонок довільної кривини [3–5]. У роботі [2] вперше було досліджено ортотропну оболонку довільної кривини з наскрізною тріщиною.

Метою цієї роботи є узагальнення розробленої раніше методики дослідження пружно-пластичних ізотропних оболонок довільної кривини [3–5] на випадок пружно-пластичних ортотропних оболонок.

Постановка задачі. Розглядається пружно-пластична ортотропна оболонка довільної кривини сталої товщини h . Система координат вибрана так, що осі x, y орієнтовані вздовж ліній головних кривин оболонки, а вісь z спрямована по нормалі до неї.

Оболонка послаблена поверхневою тріщиною довжини 2ℓ (рис. 1), орієнтованою уздовж однієї з осей координат. Глибина тріщини стала і дорівнює $D = h - d_1$. Оболонка знаходиться під дією розтягувального зусилля T_2^* і згинального моменту M_2^* .

На берегах тріщини виконуються граничні умови

$$T_2 = \begin{cases} T^\ell - T_2^*, & |x| \leq \ell, \\ T - T_2^*, & \ell \leq |x| \leq \ell + \ell_p, \end{cases} \quad M_2 = \begin{cases} M^\ell - M_2^*, & |x| \leq \ell, \\ M - M_2^*, & \ell \leq |x| \leq \ell + \ell_p, \end{cases} \quad (1)$$

де зусилля $T^\ell = \sigma_\tau d_1$ і момент $M^\ell = -\sigma_\tau d_1 (h - d_1)/2$ діють у прошарку матеріалу під фронтом поверхневої тріщини, а невідомі зусилля T і згинальний момент M задовольняють узагальнену умову пластичності Треска для композитних матеріалів [6]:

$$((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_\tau^2)((\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_\tau^2)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_\tau^2) = 0, \quad (2)$$

де $\sigma_i, i = 1, \dots, 3$, – головні значення тензора напружень, σ_τ – границя текучості матеріалу.

Аналітичний розв'язок для пружно-пластичної пластини із поверхневою тріщиною. Згідно з δ_c -моделлю поверхневу тріщину довжини 2ℓ заміняємо новою фіктивною наскрізною тріщиною завдовжки $2\ell_1$, де $\ell_1 = \ell + \ell_p$, ℓ_p – довжина пластичної зони тріщини.

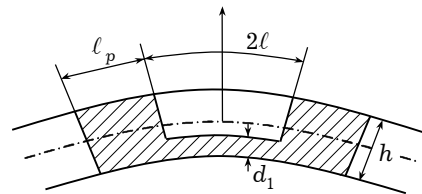


Рис. 1

Далі розглянемо систему, що описує напружений стан пружної ортотропної пластини з тріщиною:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi_i(s)}{s-x} ds = \pi \Phi_i(x), \quad i = 1, 3, \quad (3)$$

де $\Phi_1(x) = T_2(x)$, $\Phi_3(x) = c^2 R_2 M_2(x)$,

$$\Psi_1 = \frac{Eh}{4\ell\chi^2} \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \frac{d[v]}{ds}, \quad \Psi_3 = \frac{D(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}{4\ell\chi^2} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{ds}, \quad (4)$$

$E = \sqrt{E_1 E_2}$, $\chi^2 = \sqrt{E_1/E_2}$, $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$, $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $\mu = 1 - 2(1+\nu)G_{12}/E$, $2a = 2 - \mu + \mu\nu$, $c^4 = 12(1-\nu^2)/R_2^2 h^2$, E_1, E_2 – модулі Юнга; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона; G_{12} – модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки; R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні.

Із граничних умов (1) випливає, що праві частини системи (3) мають розриви першого роду. Тому подамо невідомі функції у вигляді

$$\Psi_1 = g_1 + th, \quad \Psi_3 = g_3 + mh, \quad (5)$$

де $t = T - T^\ell$, $m = c^2 R_2 (M - M^\ell)$, а функція h – аналітичний розв'язок рівняння

$$\int_{-1}^1 \frac{h(s)}{s-x} dt = \pi f(x), \quad (6)$$

тут $f(x) = \begin{cases} -a, & |x| < \tau^*, \\ -a+1, & \tau^* < |x| < 1, \end{cases} \quad |x| \leq 1, \quad \tau^* = \frac{\ell}{\ell_1}$. Сталу a визначаємо з умови існування розв'язку рівняння (6) [1]:

$$a = \frac{2}{\pi} \arccos(\tau^*). \quad (7)$$

Враховуючи (1) і вирази (4), (5) для невідомих функцій, із системи (3) одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), що описує напружено-деформований стан пластини із поверхневою тріщиною:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{g_1(s)}{x-s} ds + \pi a(T - T^\ell) &= \pi(T_2^* - T^\ell), \\ \int_{-1}^1 \frac{g_3(s)}{x-s} ds + \pi c^2 R_2 a(M - M^\ell) &= -\pi c^2 R_2 M^\ell. \end{aligned} \quad (8)$$

Після розв'язання системи СІР (8) отримуємо залежність T і M від a . Підставивши ці залежності в умову пластичності Треска (2), знайдемо значення a .

Однак, враховуючи, що при дії заданого навантаження виникає тільки

напруження $\sigma_{yy} = \frac{T_2^*}{h} + \gamma \frac{12M_2^*}{h^3}$, а $\sigma_{xx} = \tau_{xy} = 0$, то умова пластичності

Треска (2) набуває такого вигляду:

$$\frac{T}{h\sigma_\tau} + \frac{6|M|}{h^2\sigma_\tau} = 1 \quad (9)$$

або в іншому її варіанті – у вигляді пластичного шарніру [7]

$$\left(\frac{T}{h\sigma_\tau}\right)^2 + \frac{4|M|}{h^2\sigma_\tau} = 1. \quad (10)$$

З умови пластичності (9) для сталої a отримаємо вираз

$$a = \frac{\sigma_2^*/\sigma_\tau - t^\ell + 3|m^\ell|}{1 - t^\ell + 3|m^\ell|},$$

де $\sigma_2^* = \frac{T_2^*}{h}$, $t^\ell = \frac{T^\ell}{h\sigma_\tau}$, $m^\ell = \frac{2M^\ell}{h^2\sigma_\tau}$. З умови пластичності (10) формула для визначення a буде такою:

$$a = \frac{t^\ell \left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} - t^\ell \right) + |m^\ell| + \sqrt{\left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} - t^\ell \right)^2 + 2|m^\ell| \frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} \left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} - t^\ell \right) + |m^\ell|^2}}{1 - (t^\ell)^2 + 2|m^\ell|}.$$

При цьому повинна виконуватися додаткова умова $t^\ell < \sigma_2^*/\sigma_\tau$.

Значення $\tau^* = \cos(\pi\alpha/2)$ є розміром пластичної зони для пластини з поверхневою тріщиною. При цьому, якщо тріщина наскрізна ($T^\ell = M^\ell = 0$), одержуємо значення розміру пластичної зони для наскрізної тріщини в пластині, яке наведено в роботах [3, 9].

Аналітичне значення величини розміру пластичної зони поверхневої тріщини в пластині τ^* є нульовим наближенням для оболонки з поверхневою тріщиною.

Розв'язок задачі. Використаємо систему СІР для ортотропної оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною [2]. З урахуванням граничних умов (1) і виразів (4), (5) для невідомих функцій система СІР для поставленої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \mathcal{K}_{1j}(x-s)g_j(s)ds + t \left(\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{11}^r(x-s)h(t)ds + \pi a \right) + \\ + m \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{13}(x-s)h(s)ds = \pi(T_2^* - T^\ell), \\ \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \mathcal{K}_{3j}(x-s)g_j(s)ds + t \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{31}(x-s)h(s)ds + \\ + m \left(\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{33}^r(x-s)h(s)ds + \pi a \right) = -\pi c^2 R_2 M^\ell, \end{aligned} \quad (11)$$

де співвідношення для ядер \mathcal{K}_{ij} наведено в [2].

Систему СІР розв'язуємо методом механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях відрізка інтегрування.

Результати обчислень. Числовий аналіз було проведено для ортотропних оболонок довільної кривини з поздовжньою поверхневою тріщиною.

На прикладі ізотропної сферичної оболонки зроблено порівняння обчисленого відносного розкриття поздовжньої поверхневої тріщини δ^* з отриманим у роботі [7].

На рис. 2 наведено залежність $\delta^*(\tau^*, h-d)$ від відносного навантаження σ_2^*/σ_τ . Штриховими лініями зображено результати, одержані внаслідок розв'язання системи СІР (11) з використанням умови пластичності (9).

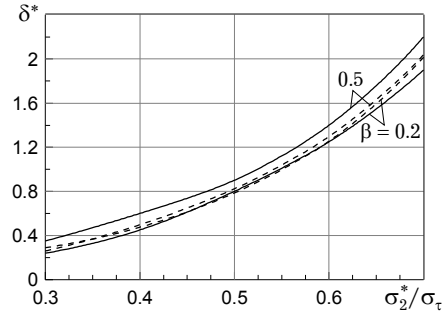


Рис. 2

Суцільними лініями зображено результати, одержані в [7, с. 196, 197]. Розрахунки виконано для $d/h = 1 - d_1/h = 0.7$, $\nu = 0.3$. Криві відповідають значенням $\beta = c\ell_1 = 0.2, 0.5$. Відносне розкриття обчислюється за формулою

$$\delta^*(x, \gamma) = \frac{4\ell\chi^2}{\ell_1} \frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} \left(\sqrt{\frac{a}{1-\mu}} \int_{-1}^x \psi_1(t) dt + \frac{\gamma}{h} \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)} \int_{-1}^x \psi_3(t) dt \right),$$

де $\gamma \in [-h/2 + d_1, h/2]$.

На рис. 3–8 зображено τ^* та $\delta^*(0, h/2)$, при знаходженні яких використовувалася умова пластичності (10). Обчислення виконано для $\sigma_2^*/\sigma_\tau = 0.3$, $R_2/h = 50$.

На рис. 3, 4 зображено залежності τ^* та δ^* від ℓ/R_2 для поверхневої тріщини в псевдосферичній (суцільні лінії) і циліндричній (пунктирні лінії) оболонках. Криві 1 відповідають матеріалу **I** (ізотропний матеріал, $\nu = 0.3$), криві 2 – матеріалу **II** ($E_1 = 14.9 \cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 0.6 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{12} = 0.4 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.31$), криві 3 – матеріалу **III** ($E_1 = 6.25 \cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 2.12 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{12} = 0.9 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.25$).

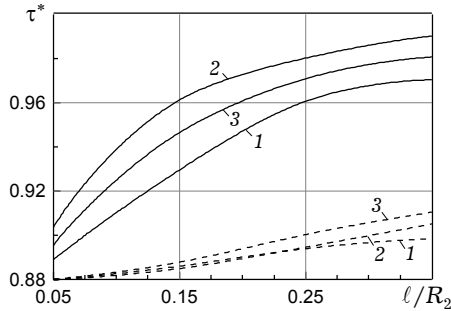


Рис. 3

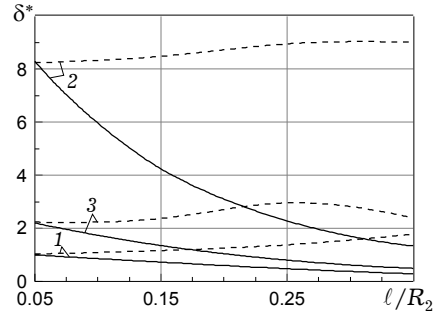


Рис. 4

При обчисленнях кривих, наведених на рис. 3–6, приймали, що $d_1/h = 0.3$.

Залежності τ^* та δ^* від $\lambda = R_2/R_1$ зображено на рис. 5 і рис. 6 відповідно. Криві 1–3 відповідають значенням $\ell/R_2 = 0.1, 0.2, 0.3$.

В ортотропній оболонці було досліджено τ^* (рис. 7) та δ^* (рис. 8) для поверхневої тріщини в залежності від кривини оболонки λ . Криві 1–3 відповідають значенням $d_1/h = 0.1, 0.2, 0.3$, при цьому $\ell/R_2 = 0.2$.

На рис. 5–8 суцільні криві відповідають матеріалу **II**, а штрихові – матеріалу **III**.

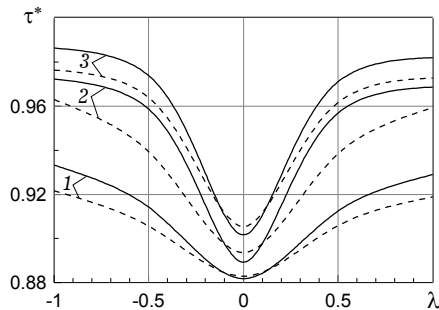


Рис. 5

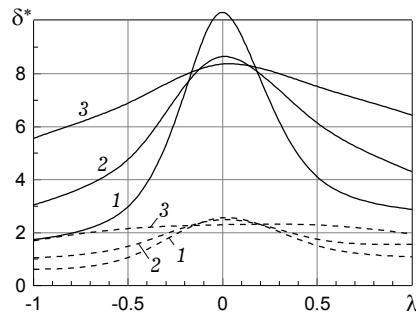


Рис. 6

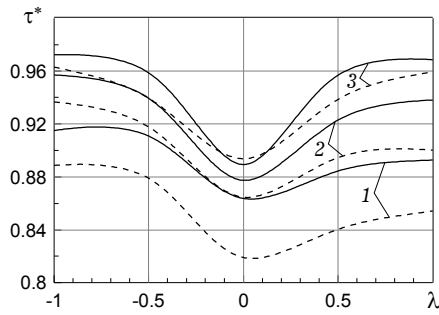


Рис. 7

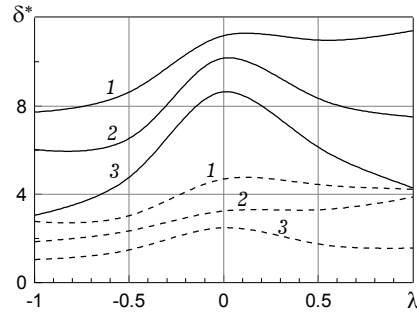


Рис. 8

Висновки:

– при збільшенні довжини тріщини ℓ/R_2 відносний розмір пластичної зони $1 - \tau^*$ монотонно зменшується для оболонок будь-якої кривини та матеріалу. Відносне розкриття тріщини δ^* у сферичних і псевдосферичних оболонках зменшується, а в циліндричних – збільшується зі збільшенням довжини тріщини;

– обидві характеристики $1 - \tau^*$ і δ^* досягають найменшого значення в псевдосферичних оболонках;

– спостерігається значний вплив ортотропії матеріалу: зі збільшенням E_1/E_2 збільшуються τ^* і δ^* .

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 639 с.
2. Довбня Е. Н., Гордиенко Н. Н. Моделирование напряженного состояния упруго-пластической ортотропной оболочки произвольной кривизны со сквозной трещиной // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2007. – Вып. 2(28). – С. 109–113.
3. Довбня Е. Н., Корохина О. А. Исследование напряжённого состояния упруго-пластической изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны, содержащей сквозную трещину // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2005. – Т. 10. – С. 39–42.
4. Довбня Е. Н., Корохина О. А. Методика расчета напряжённого состояния упруго-пластической оболочки произвольной кривизны в рамках δ_c -модели // Мат. моделирование в образовании, науке и промышленности. – Санкт-Петербург, 2005. – С. 28–32.
5. Довбня Е. Н., Корохина О. А. Залежність розміру пластичних зон, що передують поверхневій тріщині у пружно-пластичній оболонці, від глибини тріщини та кривини оболонки // Проблеми обчислюв. механіки і міцності конструкцій. – 2005. – № 7. – С. 14–20.
6. Композиционные материалы / Ред. Л. Браутман, Р. Крок: В 8 т. – Механика композиционных материалов / Ред. Дж. Сендецкий. – Москва: Мир, 1978. – Т. 2. – 564 с.
7. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
8. Николишин М. М. Напряженное состояние упругопластических оболочек с несквозными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 147–151.
9. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 222 с.
10. Осадчук В. А., Николишин Т. М. Застосування аналога δ_c -моделі для дослідження міцності ортотропної циліндричної оболонки з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 3. – С. 59–67.
11. Осадчук В. А., Николишин М. М. Застосування аналога δ_c -моделі для дослідження міцності пружнопластичних оболонок з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – 32, № 3. – С. 5–15.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ

С применением аналога δ_c -модели получено решение задачи о напряженно-деформованном состоянии упруго-пластической ортотропной оболочки произвольной кривизны с поверхностной трещиной. При этом дополнительные ограничения на упругие параметры материала не накладываются. Исследована зависимость длины пластической зоны и раскрытия поверхностной трещины от величины нагружения, геометрических параметров трещины и оболочки, а также механических свойств материала.

STUDY OF STRENGTH OF ELASTOPLASTIC ORTHOTROPIC SHELL OF ARBITRARY CURVATURE WITH SURFACE CRACK

Using the analogue of δ_c -model a solution to the problem on the stress-strain state of elastoplastic orthotropic shell of arbitrary curvature with surface crack is obtained. In this connection the additional constraints on elastic parameters of material are not imposed. The dependence of size of plastic zone and surface crack opening on the value of load, the shell and crack geometric parameters and material mechanical properties is studied.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
16.09.08