

## ВЗАЄМОДІЯ ГАРМОНІЧНОЇ ХВИЛІ КРУЧЕННЯ З КІЛЬЦЕПОДІБНИМИ ДЕФЕКТАМИ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ

*Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в ізотропному пружному тілі навколо кільцеподібних дефектів (тріщина або тонке жорстке включення) внаслідок дії гармонічної хвилі кручення. Метод розв'язування ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівняння крутильних коливань і полягає у зведенні вихідних крайових задач до інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків кутового переміщення або дотичного напруження.*

Розрахунки на міцність конструкцій з урахуванням наявності в них тріщин або тонких включень вимагають використання критеріїв, які встановлюють граничну рівновагу тіл, що містять вказані дефекти. Один із найпоширеніших таких критеріїв базується на аналізі напруженого стану в околі дефекту за допомогою коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Але теоретичне визначення КІН вимагає розв'язання відповідних крайових задач теорії пружності. Причому ці задачі суттєво ускладнюються в умовах динамічного, зокрема стаціонарного навантаження. Найбільш поширений на сьогоднішній день метод розв'язування таких задач базується на зведенні їх до інтегральних рівнянь [14, 15]. Але в цих та інших роботах з цього напрямку майже відсутні випадки, коли область розташування дефекту є неоднорозв'язною. Розв'язки подібних задач досить рідко зустрічаються навіть у статичній постановці. Так, розв'язки деяких задач статичної механіки тіл з кільцевими тріщинами можна знайти в [1, 5, 9, 10, 12, 13]. Найбільш загальною задачею граничної рівноваги тіла з неоднорозв'язною тріщиною розглянута в [9, 12], де для розв'язання запропоновано метод граничних інтегральних рівнянь. Що стосується динамічних задач для тіл з неоднорозв'язними дефектами, то вони практично не розглядалися навіть у стаціонарній постановці. Нижче пропонується розв'язання осесиметричної задачі про визначення концентрації напружень навколо кільцеподібного дефекту (тріщини або тонкого жорсткого включення) в умовах взаємодії з хвилями кручення.

**Постановка задачі.** Нехай необмежене пружне тіло містить тонку неоднорідність (дефект). Це може бути тріщина у формі кругового кільця, яке у циліндричній системі координат, пов'язаній з його центром, визначається співвідношеннями  $z = 0$ ,  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (див. рис. 1), або це може бути тонке товщини  $h \leq a$  жорстке включення, середина поверхня якого збігається з вказаним вище кільцем.

У тілі в умовах осевої симетрії (вісь симетрії збігається з віссю  $Oz$ ) відбуваються крутильні коливання внаслідок поширення хвилі кручення. Ця хвиля викликає кутове переміщення і дотичні напруження, які визначаються за формулами [6]

$$w_0 = \frac{A}{\beta r_0} J_1(\beta r) e^{i\sigma z}, \quad \tau_{\theta z}^0 = \frac{AG}{\beta b} i\sigma J_1(\beta r) e^{i\sigma z}, \quad \tau_{\theta r}^0 = -\frac{AG}{\beta r_0} J_2(\beta r) e^{i\sigma z},$$

$$\beta = \sqrt{\alpha_2^2 - \sigma^2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}. \quad (1)$$

Тут  $G$  і  $\rho$  – модуль зсуву і густина тіла;  $\omega$  – частота коливань;  $\alpha_2$ ,  $\sigma$  – хвильові сталі. Множник  $e^{-i\omega t}$ , який визначає залежність від часу, тут і надалі пропускаємо.

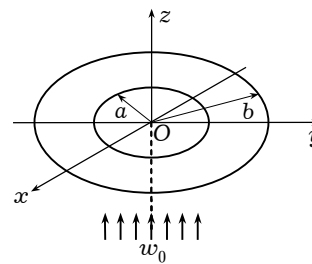


Рис. 1

Оскільки в матриці відбувається тільки осесиметрична деформація кручення, то відмінним від нуля є тільки кутове переміщення  $w$ . Це переміщення і відповідні компоненти тензора напружень подамо у вигляді

$$w = w_0 + w_1, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^0 + \tau_{\theta z}^1, \quad \tau_{\theta r} = \tau_{\theta r}^0 + \tau_{\theta r}^1, \quad (2)$$

де  $w_1$ ,  $\tau_{\theta z}^1$ ,  $\tau_{\theta r}^1$  – переміщення і напруження в тілі, які є результатом дифракції хвилі (1), що падає на дефекти, і які мають бути визначені в результаті розв'язання. Кутове переміщення  $w_1$  в умовах гармонічних коливань та осьової симетрії задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \alpha_2^2 w_1 = 0. \quad (3)$$

Граничні умови для цього рівняння формулюються в залежності від типу дефекту. Якщо розглядаємо тріщину, то на її поверхні переміщення має розрив, стрибок якого позначимо через

$$\langle w_1 \rangle = w_1(r, +0) - w_1(r, -0) = \chi_2(r), \quad a \leq r \leq b. \quad (4)$$

При цьому з умови змикання тріщини випливає рівність

$$\chi_2(a) = \chi_2(b) = 0. \quad (5)$$

Саму поверхню тріщини вважаємо вільною від напружень, що забезпечується рівністю

$$\tau_{\theta z}^1(r, \pm 0) = -\tau_{\theta z}^0(r, 0), \quad a \leq r \leq b. \quad (6)$$

У випадку включення, з огляду на його малу товщину, відповідні граничні умови формулюються на його серединній поверхні. Нехай між тілом і включенням виконуються умови повного зчеплення. Тоді на поверхні включення дотичне напруження, викликане хвилями, відбитими від включення, має розрив. Для його стрибка введемо позначення

$$\langle \tau_{\theta z}^1 \rangle = \tau_{\theta z}^1(r, +0) - \tau_{\theta z}^1(r, -0) = \chi_1(r), \quad a \leq r \leq b. \quad (7)$$

Для кутового переміщення на поверхні включення виконується рівність

$$w_1(r, \pm 0) = \theta_0 r - w_0(r, 0), \quad a \leq r \leq b. \quad (8)$$

У рівності (8) через  $\theta_0$  позначено невідомий кут повороту включення під дією хвилі. Він визначається з рівняння руху включення як жорсткого тіла і яке у випадку гармонічних коливань запишемо у вигляді

$$2\pi \int_{-a}^a \eta^2 \chi_1(\eta) d\eta = -\theta_0 \omega^2 I_0, \quad I_0 = \frac{\rho_0 \pi h (b^4 - a^4)}{2}, \quad (9)$$

де  $I_0$  – момент інерції включення, а  $\rho_0$  – густина включення.

**Розв'язування задачі у випадку тріщини.** Метод розв'язування, який пропонуємо, полягає в тому, що переміщення відбитої хвилі подаємо у вигляді розривного розв'язку рівняння (3) зі стрибком (4). Таке подання має вигляд [4]

$$w_1(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_a^b \eta \chi_2(\eta) G_2^1(\eta, r, z) d\eta, \quad (10)$$

де

$$G_2^1(\eta, r, z) = - \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2} |z|}}{2\sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2}} J_1(\lambda \eta) J_1(\lambda r) d\lambda.$$

Формула (10) дозволяє знаходити переміщення у будь-якій точці тіла за умови, що відоме розкриття тріщини  $\chi_2(\eta)$ . Для його визначення необхідно

використати граничну умову (6). Попередньо знайдемо дотичні напруження, які входять в цю умову:

$$\tau_{0z}^1(r, z) = G \int_a^b \eta \bar{\chi}_2(\eta) G_2^{10}(\eta, r, z) d\eta, \quad (11)$$

де

$$G_2^{10}(\eta, r, z) = - \int_0^\infty \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2}|z|} J_0(\lambda \eta) J_1(\lambda r) d\lambda.$$

При виведенні формули (11) було здійснено інтегрування частинами за змінною  $\eta$  з урахуванням (5) і введено позначення

$$\bar{\chi}_2(\eta) = \frac{1}{\eta} (\eta \chi_2(\eta))'. \quad (12)$$

Підставивши тепер (11) в умову (6), отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_c^1 x \varphi(x) F(x, y) dx = \frac{q_0(y)}{G}, \quad y \in [c, 1], \quad (13)$$

де

$$q_0(y) = \frac{iA\sigma G}{\beta b} J_1(\beta b y) e^{i\sigma z}.$$

При виведенні цього рівняння в (11) введено позначення

$$\eta = bx, \quad r = by, \quad \lambda = u\alpha_2, \quad \varphi(x) = \bar{\chi}_2(bx), \quad c = \frac{a}{b}, \quad b\alpha_2 = \alpha_0. \quad (14)$$

Ядро  $F(x, y)$  інтегрального рівняння (13) виражається інтегралом

$$F(x, y) = \int_0^\infty D_{01}(u, x, y) du, \quad x, y \in [c, 1], \quad c > 0, \quad (15)$$

де

$$D_{01}(u, x, y) = \frac{\alpha_0^2}{2} \sqrt{u^2 - 1} J_0(\alpha_0 u x) J_1(\alpha_0 u y).$$

Інтеграл у формулі (15) розбіжний і його слід розуміти в узагальненому сенсі. Для надання йому цього сенсу необхідно дослідити асимптотику підінтегральної функції при  $u \rightarrow +\infty$ . За допомогою системи комп'ютерної математики Maple [7] знайдено

$$D_{01}(u, x, y) = \frac{\alpha_0}{2\pi\sqrt{xy}} \left[ \sum_{k=0}^3 b_k^-(x, y) \cdot \sin\left(\alpha_0 u z^- + \frac{\pi k}{2}\right) \cdot (\alpha_0 u)^{-k} + \sum_{k=0}^3 b_k^+(x, y) \cos\left(\alpha_0 u z^+ + \frac{\pi k}{2}\right) \cdot (\alpha_0 u)^{-k} + O((\alpha_0 u)^{-4}) \right], \quad (16)$$

$$z^\pm = x \pm y,$$

де

$$b_0^-(x, y) = b_0^+(x, y) = -1, \quad b_1^\pm(x, y) = \mp \frac{3x \mp y}{8xy},$$

$$b_2^\pm(x, y) = -\frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{9y^2 - 15x^2 \mp 6xy}{128x^2y^2},$$

$$b_3^\pm(x, y) = \frac{75y^3 \mp 105x^3 - 15x^2y \mp 27xy^2}{1024x^3y^3} + \frac{\alpha_0^2}{2} b_1^\pm(x, y).$$

Нехай  $A$  – достатньо велике число:  $A > \max(1, \alpha_0^{-1})$ . Запишемо інтеграл з формули (15) у вигляді

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_\infty(x, y), \\
F_1(x, y) &= -i \frac{\alpha_0^2}{2} \int_0^1 \sqrt{1-u^2} J_0(\alpha_0 u x) J_1(\alpha_0 u y) du, \\
F_2(x, y) &= \int_1^A D_{01}(u, x, y) du, \\
F_\infty(x, y) &= \int_A^{+\infty} D_{01}(u, x, y) du. \tag{17}
\end{aligned}$$

В останньому з цих інтегралів підінтегральну функцію наблизимо за допомогою асимптотичного розвинення (16) і значення розбіжних інтегралів, які при цьому виникають, знайдемо за допомогою теорії Фур'є перетворень від узагальнених функцій. Використовуючи відомі формули з [8], запишемо

$$\begin{aligned}
\int_A^{+\infty} \sin(\alpha_0 u z) du &= \frac{1}{\alpha_0 z} + s_0(z), & s_0(z) &= \frac{\cos(A\alpha_0 z) - 1}{z}, \\
\int_A^{+\infty} \cos(\alpha_0 u z) du &= \frac{1}{2\alpha_0} \delta(z) + c_0(z), & c_0(z) &= -\frac{\sin(A\alpha_0 z)}{z}, \\
\int_A^{+\infty} \frac{\cos(\alpha_0 u z)}{u} du &= -\ln|z| + c_1(z), & c_1(z) &= \ln|z| - \text{ci}(A\alpha_0|z|). \tag{18}
\end{aligned}$$

Інші інтеграли (з розвинення (16))

$$s_k(z) = \int_A^{+\infty} \frac{\sin(\alpha_0 u z)}{u^k} du, \quad c_k(z) = \int_A^{+\infty} \frac{\cos(\alpha_0 u z)}{u^k} du, \quad k = 2, 3,$$

визначають вже неперервні функції. За допомогою (18) для останнього з інтегралів (17) отримуємо

$$\begin{aligned}
F_\infty(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} \left[ -\frac{1}{z^-} - b_1^-(x, y) \ln|z^-| + F_3(x, y) \right], \\
F_3(x, y) &= b_0^- s_0(z^-) + b_1^- c_1(z^-) - b_2^- s_2(z^-) - b_3^- c_3(z^-) + b_0^+ c_0(z^+) - \\
&\quad - b_1^+ s_1(z^+) - b_2^+ c_2(z^+) + b_3^+ c_3(z^+).
\end{aligned}$$

Остаточо інтегральне рівняння (13) перетворюється до вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_c^1 \varphi(x) \left[ -\frac{1}{x-y} - b_1^-(x, y) \ln|x-y| + R(x, y) \right] dx = \frac{q_0(y)}{G}, \tag{19}$$

де

$$R(x, y) = 2\pi\sqrt{xy} (F_1(x, y) + F_2(x, y)) + F_3(x, y).$$

До рівняння (19) необхідно ще додати умову

$$\int_c^1 x\varphi(x) dx = 0, \tag{20}$$

яка впливає з умови змикання тріщини (5) з урахуванням позначення (12).

Чисельне розв'язування (19) з умовою (20) зручніше виконувати на проміжку  $[-1, 1]$ . Для цього перейдемо до нових змінних за формулами

$$\begin{aligned}
x &= \gamma(\tau + c_0), & y &= \gamma(\zeta + c_0), & \gamma &= \frac{1-c}{2}, \\
c_0 &= \frac{1+c}{1-c}, & q(\tau) &= \varphi(\gamma(\tau + c_0)), \tag{21}
\end{aligned}$$

і замість рівняння (19) з умовою (20) отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\tau+c_0}{\zeta+c_0}} q(\tau) \left[ -\frac{1}{\tau-\zeta} - b_0(\tau, \zeta) \ln|\tau-\zeta| + S(\tau, \zeta) \right] d\tau = f(\zeta), \quad -1 \leq \zeta \leq 1,$$

$$\int_{-1}^1 (\tau+c_0) q(\tau) d\tau = 0. \quad (22)$$

У рівнянні (22) позначено

$$S(\tau, \zeta) = -b_0(\tau, \zeta) \ln \gamma + \gamma R(\gamma(\tau+c_0), \gamma(\zeta+c_0)),$$

$$f(\zeta) = \frac{q_0(b\gamma(\tau+c_0))}{G}, \quad b_0(\tau, \zeta) = \frac{3\tau + \zeta + 4c_0}{8(\tau+c_0)(\zeta+c_0)}.$$

Розв'язок рівняння (22) розшукуємо у вигляді

$$q(\tau) = \frac{g(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad (23)$$

і будемо методом механічних квадратур [2, 11]. Це дозволяє наблизити (22) такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^n \frac{a_m}{2\pi} \sqrt{\frac{\tau_m+c_0}{\zeta_k+c_0}} g_m \left[ -\frac{1}{\tau_m-\zeta_k} - b_0(\tau_m, \zeta_k) C_{km} + S(\tau_m, \zeta_k) \right] = f(\zeta_k),$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sum_{m=1}^n a_m (\tau_m + c_0) g_m = 0.$$

Тут

$$a_m = \frac{\pi}{n}, \quad \tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad g_m = g(\tau_m), \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\zeta_k = \cos \frac{\pi k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (24)$$

Величини  $C_{km}$  – коефіцієнти квадратурної формули для інтеграла з логарифмічною особливістю [11]:

$$C_{km} = -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \cos \frac{jk\pi}{n}}{j}.$$

Після розв'язання системи (24) невідому функцію  $g(\tau)$  наближаємо інтерполяційним многочленом

$$g(\tau) \approx g_{n-1}(\tau), \quad g_{n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_m \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau-\tau_m)}, \quad (25)$$

де  $T_n(\tau)$  – многочлен Чебишева.

Для механіки руйнування найбільшу цікавість становлять коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які у розглядуваному випадку визначаються формулами

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow a-0} \tau_{\theta z}(r, 0) \cdot \sqrt{a-r}, \quad K_2 = \lim_{r \rightarrow b+0} \tau_{\theta z}(r, 0) \cdot \sqrt{r-b}. \quad (26)$$

З формули (11) для напружень навколо кромки тріщини впливає наступна асимптотична формула:

$$\tau_{\theta z}(b\gamma(\zeta+c_0), 0) = -\frac{G}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \sqrt{\frac{\tau+c_0}{\zeta+c_0}} \frac{d\tau}{\tau-\zeta} + O(1),$$

$$\zeta \rightarrow -1-0, \quad \zeta \rightarrow 1+0.$$

Після наближення підінтегральної функції за допомогою інтерполяційного многочлена вигляду (25) і обчислення інтегралів з останньої формули маємо

$$\tau_{0z} = \frac{G}{2\sqrt{\zeta + c_0}\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sum_{m=1}^n g_m \frac{\sqrt{\tau_m + c_0} T_n(\zeta)}{T'_n(\tau_m)(\tau_m - \zeta)} + O(1),$$

$$\zeta \rightarrow -1 - 0, \quad \zeta \rightarrow 1 + 0. \quad (27)$$

Підставивши (27) у (26) і здійснивши граничний перехід, після перетворень отримуємо такі формули для обчислення значень КІН навколо кільцевої тріщини:

$$k_1 = \frac{K_1}{G\sqrt{b}} = \frac{\gamma(-1)^n}{2n\sqrt{2c}} \sum_{m=1}^n (-1)^m g_m \sqrt{\tau_m + c_0} \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2},$$

$$k_2 = \frac{K_2}{G\sqrt{b}} = \frac{\gamma}{2n\sqrt{2}} \sum_{m=1}^n (-1)^m g_m \sqrt{\tau_m + c_0} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2}. \quad (28)$$

**Розв'язування задачі для випадку включення.** Якщо дефектом є включення, то переміщення розривної хвилі слід шукати у вигляді розв'язку рівняння (3) зі стрибком (7). Такий розривний розв'язок має вигляд [4]

$$w_1(r, z) = \int_a^b \eta \frac{\chi_1(\eta)}{G} G_2^1(\eta, r, z) d\eta. \quad (29)$$

Для визначення невідомого стрибка дотичного напруження внаслідок реалізації граничної умови (8) отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_c^1 x \varphi(x) F(x, y) dx = \theta_0 y + q_0(y). \quad (30)$$

У рівнянні (30) використано позначення (14) і введено функції

$$\varphi(x) = \frac{\chi_1(bx)}{G}, \quad q_0(y) = -\frac{\alpha}{\alpha_0 \beta_0} J_1(\alpha_0 \beta_0 y),$$

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} D_{11}(u, x, y) du,$$

$$D_{11}(u, x, y) = -\frac{u J_1(\alpha_0 u x) J_1(\alpha_0 u y)}{2\sqrt{u^2 - 1}}. \quad (31)$$

Для визначення сингулярної складової ядра  $F(x, y)$  попередньо інтеграл, який його визначає, записуємо у вигляді (17), де

$$F_1(x, y) = \frac{i\alpha_0^2}{2} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} J_1(\alpha_0 u x) J_1(\alpha_0 u y) du,$$

$$F_2(x, y) = \int_1^A D_{11}(u, x, y) du, \quad F_\infty(x, y) = \int_A^{+\infty} D_{11}(u, x, y) du.$$

Для  $D_{11}(u, x, y)$  отримуємо асимптотичне розвинення, аналогічне до (16):

$$D_{11}(u, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} \left[ \sum_{k=0}^3 \frac{d_k^-(x, y)}{(\alpha_0 u)^{k+1}} \cos\left(\alpha_0 u z^- + \frac{\pi k}{2}\right) + \sum_{k=0}^3 \frac{d_k^+(x, y)}{(\alpha_0 u)^{k+1}} \sin(\alpha_0 u z^+) \sin\left(\alpha_0 u z^+ + \frac{\pi k}{2}\right) + O((\alpha_0 u)^{-5}) \right],$$

$$z^\pm = x \pm y. \quad (32)$$

В результаті наближення підінтегральної функції в інтегралі по нескінченному проміжку за формулою (32) знаходимо

$$F_\infty(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} \left[ \ln|z^-| + F_3(x, y) \right],$$

де  $F_3(x, y)$  – неперервна та обмежена при  $c \leq x, y \leq 1$  функція, яка має

вигляд комбінації функцій  $c_k(z^\pm)$ ,  $s_k(z^\pm)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . За допомогою останньої формули інтегральне рівняння (30) перетворюємо до вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_c^1 \varphi(x) \sqrt{\frac{x}{y}} [\ln|x-y| + R(x,y)] dx = \theta_0 y + q_0(y), \quad y \in [c, 1].$$

Це рівняння для чисельного розв'язування після введення нових змінних і позначень (21) записуємо для проміжку  $[-1, 1]$ :

$$\frac{\gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\tau + c_0}{\zeta + c_0}} q(\tau) [\ln|\tau - \zeta| + S(\tau, \zeta)] d\tau = \theta_0 \gamma (\zeta + c_0) + f(\zeta), \quad (33)$$

де

$$S(\tau, \zeta) = \ln \gamma + R(\gamma(\tau + c_0), \gamma(\zeta + c_0)), \quad f(\zeta) = q_0(\gamma(\zeta + c_0)).$$

До рівняння (33) необхідно додати рівність (9) для визначення невідомого кута повороту включення, яку в нових позначеннях запишемо як

$$\theta_0 = -\beta_2 \int_{-1}^1 (\tau + c_0)^2 q(\tau) d\tau, \quad \beta_2 = \frac{4\gamma^3}{x_0^2(1-c^4)\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{h}{b}. \quad (34)$$

Розв'язок рівняння (33) теж розшукуємо у вигляді (23) і будуємо методом механічних квадратур. Внаслідок цього рівняння (33), (34) замінюємо такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m g_m \sqrt{\frac{\tau_m + c_0}{\eta_k + c_0}} [C_{km} + S(\tau_m, \eta_k)] &= \theta_0 \gamma (\eta_k + c_0) + f(\eta_k), \\ k &= 1, 2, \dots, m, \\ \theta_0 &= -\beta_2 \sum_{m=1}^n a_m g_m (\tau_m + c_0)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Тут

$$\begin{aligned} \eta_k &= \cos \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ C_{km} &= -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{j\pi(2m+1)}{2n} \cos \frac{jk\pi}{n+1}}{j}. \end{aligned}$$

Після розв'язання системи (35) невідомі функції наближаємо інтерполяційним многочленом (25).

Для оцінки концентрації напружень навколо кромки кільцевого включення введемо до розгляду коефіцієнти при особливості стрибка напружень

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{r-a} \chi_1(r), \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow b-0} \sqrt{b-r} \chi_1(r), \end{aligned}$$

які далі називатимемо КІН для включення. З урахуванням перепозначень (14), (21) запишемо

$$\begin{aligned} K_1 &= G \lim_{\zeta \rightarrow -1+0} \sqrt{b\gamma(\zeta + c_0) - a} q(\zeta), \\ K_2 &= G \lim_{\zeta \rightarrow -1-0} \sqrt{b - b\gamma(\zeta + c_0)} q(\zeta). \end{aligned}$$

Підставивши в останні формули (23) і (25) та виконавши перетворення, остаточно знаходимо

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{K_1}{G\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m g_m \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}, \\ k_2 &= \frac{K_2}{G\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m g_m \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

**Результати чисельного аналізу та висновки.** За допомогою отриманих формул (27) і (36) проведено комп'ютерне дослідження залежності КІН для тріщини і включення при різних значеннях відношення  $c = \frac{a}{b}$  зовнішнього та внутрішнього радіусів. Результати розрахунків показано у вигляді графіків на рис. 2–5. Числовий аналіз показав, що при дії хвилі кручення для дефектів обох типів найбільша концентрація напружень спостерігається при значеннях відношення  $g_0 = \frac{\sigma}{\alpha_2}$  хвильових сталих, близьких до одиниці. Тому графіки наведено для  $g_0 = 0.95$ . Криві відповідають значенням відношення радіусів дефектів  $c = \frac{a}{b} = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ .

На рис. 2 показано графіки залежності від безрозмірного хвильового числа  $\alpha_0$  КІН  $|k_1|$  на внутрішній границі тріщини ( $r = a$ ), на рис. 3 – навколо зовнішньої,  $|k_2|$ . Аналіз графіків дозволяє зробити висновок, що КІН на внутрішньому колі при зростанні його радіуса спочатку збільшується, а потім починає спадати. Що стосується КІН біля зовнішнього кола, то при малих радіусах внутрішнього кола ( $c = 0.1$ ) його графік у низькочастотній зоні співпадає з відомими результатами для дископодібної тріщини [6]. При зростанні радіуса внутрішнього кола значення КІН мають тенденцію до спадання. Характерною особливістю усіх графіків є існування максимумів абсолютних значень КІН, причому частоти, при яких вони спостерігаються, збільшуються при зростанні внутрішнього радіуса.

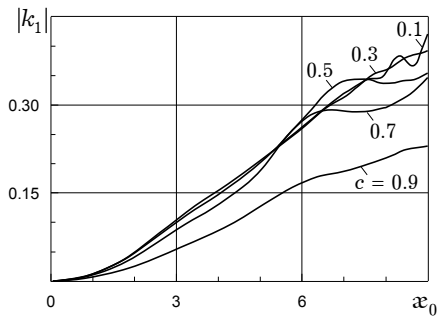


Рис. 2

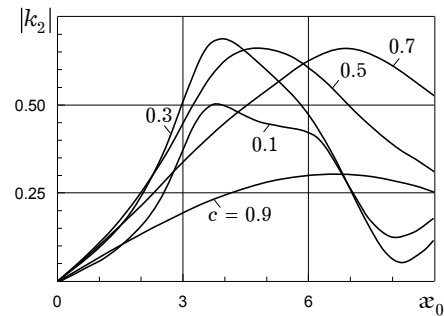


Рис. 3

Графіки на рис. 4, рис. 5 ілюструють частотні залежності КІН навколо внутрішнього і зовнішнього кіл, що обмежують кільцеподібне включення. Значення КІН навколо внутрішнього кола при зростанні його радіуса спочатку збільшуються, а потім починають спадати. КІН навколо зовнішнього кола для малого внутрішнього радіуса збігається зі значеннями, що відповідають дископодібному включенню [3], а далі при його зростанні спадають.

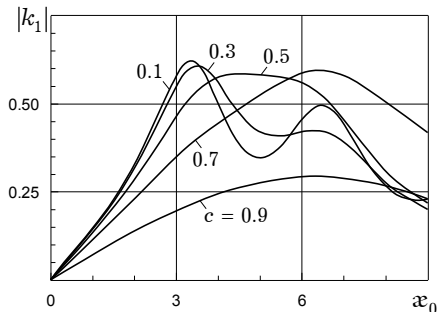


Рис. 4

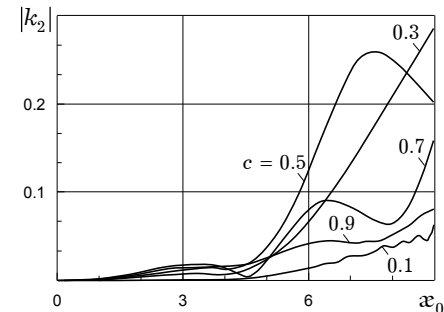


Рис. 5



1. Александров В. М., Сметанин В. И., Соболев В. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Наука, 1993. – 234 с.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – Москва: Наука, 1989. – 344 с.
3. Вахонина Л. В., Попов В. Г. Крутильные колебания пространства с тонким жестким круговым включением // Теория и практика процессов. Измельчение, расцепление, смешение и уплотнение. – 2001. – Вып. 8. – С. 31–38.
4. Вахонина Л. В., Попов В. Г. Крутильные колебания пространства с тонким жестким круговым отслоившимся включением // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 175–180.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Растяжение упругого пространства ослабленного кольцевой трещиной // Прикл. механика. – 1965. – 1, № 10. – С. 61–64.
6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
7. Дьяконов В. П. Maple 9 в математике, физике и образовании. – Москва: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.
8. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Москва: Мир, 1978. – 518 с.
9. Кит Г. С., Хай М. В. О решении задач теории упругости для тела с плоской трещиной, занимающей двухсвязную область // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 3. – С. 58–61.
10. Морозов Е. М., Никишиков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – Москва: ЛКИ, 2008. – 256 с.
11. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
12. Хай М. В., Стасюк Б. М. Про визначення напружень в околі плоских неоднорозв'язних тріщин, що знаходяться в полі зсувних зусиль // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 70–74.
13. Шишканова С. Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 5. – С. 9–15.
14. Boström A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation // Appl. Mech. Rev. – 2003. – 56, No. 4. – P. 383–405.
15. Chen Y. Z. Integral equation methods for multiple crack problems and related topics // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60, No. 4. – P. 172–194.

#### **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ С КОЛЬЦЕПОДОБНЫМИ ДЕФЕКТАМИ В УПРУГОМ ТЕЛЕ**

*Решена задача об определении напряженного состояния в изотропном упругом теле около кольцеподобных дефектов (трещина или тонкое жесткое включение) в результате действия гармонической волны кручения. Метод решения основан на использовании разрывных решений уравнения крутильных колебаний и состоит в сведении исходных краевых задач к интегральным уравнениям относительно неизвестных скачков углового перемещения или касательного напряжения.*

#### **INTERACTION OF HARMONIC TORSION WAVE WITH RING-SHAPED DEFECTS IN ELASTIC BODY**

*The problem about determination of the stress state in the isotropic elastic body near the ring-shaped defects (crack or thin rigid inclusion) as a result of the harmonic torsion wave is solved. The method of solution is based on the use of discontinuous solutions of equation of torsional oscillations and consists in the reduction of the obtained boundary problems to the integral equations for the unknown jumps of angular displacement or tangential stress.*

Одес. нац. морська акад., Одеса

Одержано  
01.12.08