УДК 539.3

Т. В. Шопа

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Розглядається задача про власні коливання шарнірно опертої трансверсально-ізотропної циліндричної панелі з круговим отвором. Деформування оболонки описується модифікованими рівняннями теорії оболонок Тимошенка. Числовий розв'язок задачі побудовано непрямим методом граничних інтегральних рівнянь, що ґрунтується на послідовнісному зображенні функцій Ґріна.

1. Вступ. Задачі про коливання оболонок різної геометричної форми, оболонок з отворами, вирізами та включеннями мають широке застосування в інженерній практиці. Цим зумовлена значна кількість публікацій стосовно розробки методів розрахунку і дослідження власних і вимушених коливань пластин і оболонок. Метод скінченних елементів застосовували при розв'язуванні задач про визначення коливань анізотропних оболонок у працях [3, 8]. Коливанням багатошарових тонкостінних конструкцій присвячені роботи [14] і [18], де для дослідження коливань суцільних композитних оболонок використано дев'ятивузловий метод скінченних елементів, який ґрунтується на теорії Сандерса першого порядку наближення деформацій. У роботі [17] досліджувався вплив поєднання розтягу і згину композитних оболонок на власні частоти коливань з використанням рівняння руху типу Доннела в поєднанні з методом Гальоркіна. Для визначення частот власних коливань ламінованих оболонок у [15] на основі рівнянь руху, які ґрунтуються на першій апроксимації класичної теорії Лява, використано загальний метод квадратур для диференціальних рівнянь. У роботі [21] досліджувались вільні коливання ламінованої оболонки з перехресними шарами. Нелінійна динамічна поведінка довгої циліндричної пружної оболонки з використанням принципу Гамільтона вивчалась у [9]. Метод колокацій зі сплайн-функціями застосовано в роботі [20] для розрахунку вільних коливань циліндричної шаруватої оболонки. Для вивчення вільних коливань композитних циліндричних оболонок у [10] застосовано уточнений аналітичний метод з використанням еквівалентних кривин для наближення кривини серединної поверхні, а також еквівалентних трансверсальних зсувних жорсткостей для наближення поворотів в трансверсальній площині перерізу. Коливання і демпфування багатошарових композитних оболонок досліджували у [7].

Наявність отворів в оболонках значно ускладнює розв'язування крайових задач. Аналіз коливання ламінованих оболонок і пластин з отвором і без нього з урахуванням умов демпфування виконано в [4, 5], а задачу про оптимальний вибір шарів оболонки для максимального підвищення власної частоти розв'язано в [6]. Коливання підкріпленої квадратної панелі з симетричними квадратними отворами досліджено у роботі [16], а в [11, 13] – напруження і динамічну поведінку циліндричних оболонок з еліптичним і прямокутним отворами. Методом Релея – Рітца розраховано частоти власних коливань оболонки з круговим отвором і проведено порівняння результатів з експериментальними даними [19]. Вплив радіуса отвору, радіуса кривини оболонки та товщини ламінованого покриття на частоти коливань ламінованої циліндричної оболонки з круговим отвором вивчено в [12].

У цій роботі досліджено частоти власних коливань циліндричної трансверсально-ізотропної панелі з круговим отвором за наявності різних крайових умов на контурі отвору та шарнірного опирання на краях. Використано модифіковану модель Тимошенка згину оболонки за нехтування жорсткими поворотами навколо нормалі до серединної поверхні, що обґрунтовано у роботі [2] для випадку поперечних коливань тонкостінних елементів. Розв'язок відповідної крайової задачі базується на побудові функції Ґріна у вигляді границь послідовностей узагальнених частинних сум тригонометричних рядів. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, які розв'язано методом колокацій.

Постановка задачі та побудова ключових рівнянь. Розглянемо задачу про усталені коливання трансверсально-ізотропної циліндричної панелі з круговим отвором радіуса R_0. Зовнішні краї панелі шарнірно оперті. Вісь α_1 напрямлена вздовж довжини панелі, $\alpha_2 = R\varphi$ – колова координата, φ – центральний кут. Математична модель, що описує напружено-деформований стан, базується на рівняннях теорії оболонок Тимошенка [1, 2]:

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i, \qquad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3,$$

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} - k_i Q_i = -q_i, \qquad i = 1,2, \tag{1}$$

$$M_{ii} = D\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j}\right), \qquad M_{ij} = M_{ji} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$N_{ii} = B\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + \nu k_j) w\right), \quad N_{ij} = N_{ji} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$Q_i = \Lambda\left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i\right), \qquad i,j = 1,2, \qquad i \ne j, \tag{2}$$

де $D = 2h^3 E/[3(1-\nu^2)]$, $B = 2hE/(1-\nu^2)$; $\Lambda = 2hG'$; E, G', ν – пружні сталі матеріалу; $k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{1}{R}$; $2h$ і R – товщина та радіус серединної поверхні оболонки; ρ – густина матеріалу; γ_1, γ_2, w, u_1, u_2 – кути повороту нормалі до серединної поверхні, прогин і переміщення; Q_i, M_{ij}, N_{ij} – внутрішні зусилля; q_i, m_i – зовнішнє навантаження.

Переміщення довільної точки оболонки знаходимо за формулами

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + \gamma_i(\alpha_1,\alpha_2)\alpha_3, \quad i = 1,2, \quad u_3 = w. \tag{3}$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль уздовж деякої гладкої кривої C з одиничним нормальним і тангенціальним векторами $\{n_1(\alpha_1,\alpha_2),\ n_2(\alpha_1,\alpha_2)\}$, $\{\tau_1(\alpha_1,\alpha_2),\ \tau_2(\alpha_1,\alpha_2)\}$, $(\tau_1 = -n_2,\ \tau_2 = -n_1)$ визначаємо за формулами

$$u_n = -\left(n_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right), \qquad u_\tau = -\left(\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$\gamma_n = -\left(n_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right), \qquad \gamma_\tau = -\left(\tau_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$M_n = M_{11} n_1^2 + 2M_{12} n_1 n_2 + M_{22} n_2^2,$$

$$N_n = N_{11} n_1^2 + 2N_{12} n_1 n_2 + N_{22} n_2^2, \qquad Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2. \tag{4}$$

Крайові умови при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \ell_1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = k\pi$, що відповідають шарнірному опиранню, такі:

$$w = 0, \qquad M_n = 0, \qquad N_n = 0, \qquad u_\tau = 0, \qquad \gamma_\tau = 0. \tag{5}$$

Розглянемо два типи крайових умов на контурі отвору:

а) задаються переміщення, кути повороту та прогин на контурі, які змінюються за гармонічним законом за часовою координатою:

$$u_n = u_0 \sin(\theta_0 t), \qquad \gamma_n = \gamma_0 \sin(\theta_0 t), \qquad w = w_0 \sin(\theta_0 t); \tag{6}$$

б) задаються розподілені зусилля та моменти:

$$Q_n = Q_0 \sin(\theta_0 t), \qquad M_n = M_0 \sin(\theta_0 t), \qquad N_n = N_0 \sin(\theta_0 t), \tag{7}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$; $\{n_1(\xi), n_2(\xi)\}$ – одиничний нормальний вектор до лінії L, w_0, Q_0, M_0 – амплітуди прогину, перерізувальної сили та моменту. Такий тип межових умов відповідає випадку усталених коливань оболонки, тобто всі силові і кінематичні характеристики змінюватимуться також за гармонічним законом.

Приймаючи нехтовно малими повороти елемента оболонки навколо нормалі до серединної поверхні [2], введемо у вирази для величин M_{12}, M_{21}, N_{12}, N_{21} допоміжні функції H, T (реакції на повороти) та малі параметри $\beta_1 = 1/D$, $\beta_2 = 1/B$:

$$M_{12} = 2D\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + H, \qquad M_{21} = 2D\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - H,$$

$$N_{12} = 2B\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + T, \qquad N_{21} = 2B\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - T,$$

$$\beta_2 T = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \qquad \beta_1 H = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}. \tag{8}$$

Система рівнянь (1), (2) з урахуванням залежностей (8) при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ – модифікована модель Тимошенка деформування оболонки. Рівняння (8) тоді набувають вигляду $\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = 0$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = 0$, а це дозволяє ввести потенціали кутів повороту і осьових переміщень

$$\gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}, \quad u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2), \quad u = u(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Після перетворення співвідношення (2) з урахуванням залежностей (9) і підстановки їх у рівняння системи (1) одержимо таку систему рівнянь:

$$L_{11}(u) + L_{12}(w) + L_{13}(\gamma) = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$L_{21}(u) + L_{22}(w) + L_{23}(\gamma) - \frac{2h\rho}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{B} q_3,$$

$$L_{31}(u) + L_{32}(w) + L_{33}(\gamma) = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2}\right), \tag{10}$$

де

$$L_{11} = -\left(\Delta\Delta - \frac{\Lambda}{B}\Delta_3\right), \quad L_{12} = L_{21} = \nu\Delta_2 + \left(1 + \frac{\Lambda}{B}\right)\Delta_1, \quad L_{13} = L_{31} = -\frac{\Lambda}{B}\Delta_1,$$

$$L_{22} = \frac{\Lambda}{B}\Delta + \frac{2h{\theta_0}^2}{B} - \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right),$$

$$L_{32} = L_{23} = -\frac{\Lambda}{B}\Delta, \qquad L_{33} = -\frac{D}{B}\Delta\Delta + \frac{\Lambda}{B}\Delta,$$

$$\Delta_1 = k_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}, \qquad \Delta_2 = k_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2},$$

$$\Delta_3 = k_1^2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_2^2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}.$$

Отже, для визначення невідомих функцій маємо систему рівнянь (10) і граничні умови (5), (6) або (5), (7).

Отримана математична модель подається не п'ятьма рівняннями, а трьома. Це суттєво економить комп'ютерні ресурси при числових розрахунках, а похибка обчислень виявляється невеликою [2].

Узагальнений метод Фур'є і метод граничних елементів розв'язування крайової задачі. Для побудови розв'язку сформульованих задач використаємо непрямий метод граничних елементів. Вважаємо, що в квадраті $\Pi^r = \{\alpha(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1 - \alpha_1^r| \le \varepsilon,\ |\alpha_2 - \alpha_2^r| \le \varepsilon\}$ оболонка навантажена зусиллями, розподіленими симетрично відносно його осей симетрії (паралельних до сторін). Рівнодійні цих зусиль − нормальна сила, момент та осьова сила $T_1^r \sin(\theta_0 t)$, $T_2^r \sin(\theta_0 t)$, $T_3^r \sin(\theta_0 t)$ змінюються за гармонічним законом із частотою θ_0. При цьому рівнодійний момент орієнтований за напрямком одиничного вектора $\{n_1^r, n_2^r\}$. Для моделювання цієї дії використаємо δ-подібні функції [2]:

$$q_3 = T_2^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\theta_0 t),$$

$$m_i = T_3^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\theta_0 t),$$

$$q_i = T_1^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r)\delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r)\sin(\theta_0 t), \tag{11}$$

де

$$\delta_{\varepsilon i}(\xi_i, \xi_i^r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{|\xi_i - \xi_i^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi_i - \xi_i^r| \le \varepsilon, \\ 0, & |\xi_i - \xi_i^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

$g(\xi)$ − спадна гладка функція, $0 \le \xi \le 1$, $g(1) = 0$, $\int_0^1 g(\xi)\,d\xi = 1$.

Розв'язок системи рівнянь (10), що задовольняє умови (5), шукаємо у вигляді, який дає змогу автоматично задовольнити умови шарнірного опирання на границі панелі:

$$\begin{Bmatrix} u_\varepsilon(\alpha, \alpha^r) \\ \gamma_\varepsilon(\alpha, \alpha^r) \\ w_\varepsilon(\alpha, \alpha^r) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ w_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha)\sin(\theta_0 t), \tag{12}$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2)$, $\lambda_n = \lambda_{1k} = \dfrac{k\pi}{\ell}$, $\lambda_n = \lambda_{2m} = \dfrac{m}{R}$.

Зобразивши δ-подібні функції у формулах (11) у вигляді

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon)\sin(\lambda_k \xi^r)\sin(\lambda_k \xi)$$

або

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{\ell}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon)\cos(\lambda_k \xi^r)\cos(\lambda_k \xi)\right],$$

де $\varphi(\lambda_k, \varepsilon) = \int_0^1 g(s)\cos(\lambda_k \varepsilon s)\,ds$, $\lambda_k = \lambda_{1k}$ або λ_{2m}, і, підставивши їх у (10), отримаємо систему алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів ключових функцій:

$$\{L_{ij}^{km}\}\begin{Bmatrix} u_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ w_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \end{Bmatrix} = \frac{1}{B} C_{km}(\varepsilon)[\Theta_{km}(\alpha^r)]\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^2 \\ T_3^r \end{Bmatrix},$$

де

$$[\Theta_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} \end{bmatrix},$$

$$L_{11}^{km} = -\left(\Delta_{km}\Delta_{km} + \frac{\Lambda}{B}\Delta_{km}^{(3)}\right), \quad L_{12}^{km} = L_{21}^{km} = -\left(\nu\Delta_{km}^{(2)} + \left(1 + \frac{\Lambda}{B}\right)\Delta_{km}^{(1)}\right),$$

$$L_{13}^{km} = L_{31}^{km} = \frac{\Lambda}{B}\Delta_{km}^{(1)}, \quad L_{22}^{km} = -\left(\frac{\Lambda}{B}\Delta_{km} + \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right)\right) - \frac{2h\theta_0^2}{B},$$

$$L_{23}^{km} = L_{32}^{km} = \frac{\Lambda}{B}\Delta_{km}, \quad L_{33}^{km} = -\frac{D}{B}\left(\Delta_{km}\Delta_{km} + \frac{\Lambda}{D}\Delta_{km}\right),$$

$$\Delta_{km} = \lambda_{1k}^2 + \lambda_{2m}^2, \quad \Delta_{km}^{(1)} = k_1\lambda_{1k}^2 + k_2\lambda_{2m}^2,$$

$$\Delta_{km}^{(2)} = k_2\lambda_{1k}^2 + k_1\lambda_{2m}^2, \quad \Delta_{km}^{(3)} = k_1^2\lambda_{1k}^2 + k_2^2\lambda_{2m}^2.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{Bmatrix} u_{km}^{\varepsilon}(\alpha^r) \\ w_{km}^{\varepsilon}(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^{\varepsilon}(\alpha^r) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{B} C_{km}(\varepsilon)[U_{km}][\Theta_{km}(\alpha^r)]\{T^r\}. \tag{13}$$

Тут

$$[U_{km}] = \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \\ \gamma_{1km} & \gamma_{2km} & \gamma_{3km} \end{bmatrix}, \qquad \{T^r\} = \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^2 \\ T_3^r \end{Bmatrix},$$

$$u_{1km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{22}^{km}L_{33}^{km} - L_{23}^{km}L_{32}^{km}), \quad u_{2km} = -\frac{1}{\Omega_0}(L_{32}^{km}L_{13}^{km} - L_{12}^{km}L_{33}^{km}),$$

$$u_{3km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{12}^{km}L_{23}^{km} - L_{13}^{km}L_{22}^{km}), \quad w_{1km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{23}^{km}L_{31}^{km} - L_{21}^{km}L_{33}^{km}),$$

$$w_{2km} = -\frac{1}{\Omega_0}(L_{11}^{km}L_{33}^{km} - L_{13}^{km}L_{31}^{km}), \quad w_{3km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{21}^{km}L_{13}^{km} - L_{11}^{km}L_{23}^{km}),$$

$$\gamma_{1km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{21}^{km}L_{32}^{km} - L_{22}^{km}L_{31}^{km}), \quad \gamma_{2km} = -\frac{1}{\Omega_0}(L_{11}^{km}L_{22}^{km} - L_{12}^{km}L_{21}^{km}),$$

$$\gamma_{3km} = \frac{1}{\Omega_0}(L_{13}^{km}L_{31}^{km} - L_{11}^{km}L_{32}^{km}), \quad C_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{\ell^2}\varphi_1(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi_2(\lambda_{2m}\varepsilon),$$

$$\Omega_0 = \det\|L_{ij}\|.$$

Подвійні ряди в (13) рівномірно збігаються при $\varepsilon \neq 0$, тому можна зробити граничний перехід при $\varepsilon \to 0$. Наприклад, якщо $g(s) = 2(1-s)$, то $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = [\sin(\lambda_k\varepsilon/2)/(\lambda_k\varepsilon/2)]^2$, тому з огляду на оцінку $|\varphi(\lambda_k\varepsilon)| = O(1/k^2)$ ряди в (12) рівномірно збігаються. Якщо у виразах (13) перейти до границі, коли $\varepsilon \to 0$, то одержимо функції Ґріна крайових задачі (10), (5), (6) або (10), (5), (7) [2].

Розглянемо задачу про навантаження шарнірно опертої панелі невідомими силами та моментами $T_1(\xi)\sin\theta_0 t$, $T_2(\xi)\sin\theta_0 t$, $T_3(\xi)\sin\theta_0 t$, розподіленими уздовж лінії L. Узагальнений розв'язок задачі подамо у вигляді інтегральних зображень:

$$w(\alpha,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[w_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+w_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,w_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\Phi_{km}(\alpha)d\ell(\xi)\sin(\theta_0 t),$$

$$u(\alpha,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[u_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+u_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,u_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\Phi_{km}(\alpha)d\ell(\xi)\sin(\theta_0 t),$$

$$\gamma(\alpha,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[\gamma_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+\gamma_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,\gamma_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\Phi_{km}(\alpha)d\ell(\xi)\sin(\theta_0 t). \qquad (14)$$

У випадку крайових умов (6), підставивши рівності (14) у формулу (6) і зробивши граничний перехід при $\alpha\to\alpha_0$, $\alpha_0\in L$, отримаємо систему трьох інтегральних рівнянь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[w_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+w_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,w_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\Phi_{km}(\alpha)d\ell(\xi)=w_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[u_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+u_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,u_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}d\ell(\xi)=u_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[\gamma_{1km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+\gamma_{2km}\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,\gamma_{3km}\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}d\ell(\xi)=\gamma_0. \qquad (15)$$

У випадку крайових умов (7), підставивши рівності (14) у вирази (4) для зусиль, а потім у формулу (7), отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2}T_1(\xi)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[Q_{1km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,Q_{2km}(\alpha)\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+Q_{3km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]d\ell(\xi)=Q_0,$$

$$\frac{1}{2}T_2(\xi)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[M_{1km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,M_{2km}(\alpha)\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+M_{3km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]d\ell(\xi)=M_0,$$

$$\frac{1}{2}T_3(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{B}C_{km}(\varepsilon)\left[N_{1km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_1(\xi)+\right.$$

$$\left.+\,N_{2km}(\alpha)\Phi_{km}(\xi)T_2(\xi)+N_{3km}(\alpha)\frac{\partial\Phi_{km}(\xi)}{\partial n}T_3(\xi)\right]d\ell(\xi)=N_0, \qquad (16)$$

де

$$Q_{ikm}(\alpha) = \Lambda\big((-\gamma_{ikm} + w_{ikm} + k_1 u_{ikm})n_1\lambda_{1k}\Phi_{1km}(\alpha) +$$
$$+ (-\gamma_{ikm} + w_{ikm} + k_2 u_{ikm})n_2\lambda_{2m}\Phi_{2km}(\alpha)\big),$$
$$N_{ikm}(\alpha) = B\Big[u_{ikm}\Phi_{4km}(\alpha) + w_{ikm}\big(n_1^2(k_1 + \nu k_2) + n_2^2(k_2 + \nu k_1)\big)\Phi_{km}(\alpha)\Big],$$
$$M_{ikm}(\alpha) = D\gamma_{ikm}\Phi_{4km}(\alpha), \qquad i = 1,3,$$
$$\Phi_{1km}(\alpha) = \frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial\alpha_1}, \quad \Phi_{2km}(\alpha) = \frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial\alpha_2}, \quad \Phi_{3km}(\alpha) = \frac{\partial^2\Phi_{km}(\alpha)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$
$$\Phi_{4km}(\alpha) = \Phi_{km}(\alpha)\big(n_1^2(\lambda_{1k}^2 + \nu\lambda_{2m}^2) + n_2^2(\lambda_{2m}^2 + \nu\lambda_{1k}^2)\big) -$$
$$- 2(1-\nu)n_1 n_2 \lambda_{1k}\lambda_{2m}\Phi_{3km}(\alpha).$$

Наближений розв'язок систем рівнянь (15) і (16) шукаємо методом колокацій. Лінію L апроксимуємо ламаною лінією L^*, складеною з прямолінійних відрізків L^r, $r = 1,\ldots,N$, уздовж кожного з яких невідомі густини набувають значень $T_1(\xi) = T_1^r\delta_\varepsilon(\xi,\xi^r)$, $T_2(\xi) = T_2^r\delta_\varepsilon(\xi,\xi^r)$, $T_3(\xi) = T_3^r\delta_\varepsilon(\xi,\xi^r)$. Відрізок L^r задаємо довжиною $2\ell^r$, середньою точкою $\xi^r(\xi_1^r,\xi_2^r)$ і напрямним одиничним вектором $\{\tau_1^r,\tau_2^r\} = \{\tau_1(\xi^r),\tau_2(\xi^r)\}$. Границі сум тригонометричних рядів, коли $\varepsilon \to 0$, у системах (15) і (16) наближаємо відповідними частинними сумами порядку K і M для достатньо малого $\varepsilon \neq 0$.

Обчисливши інтеграли у системі інтегральних рівнянь (15) з урахуванням зроблених припущень і мінімізувавши нев'язку розв'язку в контрольних точках $\alpha^q(\alpha_1^q;\alpha_2^q)$, $q = 1,\ldots,N$, які є серединами відрізків L^q, замість системи інтегральних рівнянь отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} u_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & u_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & u_3^r(\alpha^q,\varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha^q,\varepsilon) \\ w_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & w_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & w_3^r(\alpha^q,\varepsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \gamma_0 \\ w_0\end{Bmatrix}, \quad q = 1,\ldots,N, \qquad (17)$$

де

$$u_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)u_{ikm}\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n}\frac{\partial\Phi(\alpha^q)}{\partial n},$$
$$u_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)u_{2km}\Phi(\alpha^r)\frac{\partial\Phi(\alpha^q)}{\partial n},$$
$$\gamma_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{ikm}\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n}\frac{\partial\Phi(\alpha^q)}{\partial n},$$
$$\gamma_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{2km}\Phi(\alpha^r)\frac{\partial\Phi(\alpha^q)}{\partial n},$$
$$w_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)w_{ikm}\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n}\Phi(\alpha^q),$$
$$w_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon)w_{2km}\Phi(\alpha^r)\Phi(\alpha^q), \qquad i = 1,3.$$

Подібно систему інтегральних рівнянь (16) зведемо до системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} Q_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & Q_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & Q_3^r(\alpha^q,\varepsilon) \\ M_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & M_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & M_3^r(\alpha^q,\varepsilon) \\ N_1^r(\alpha^q,\varepsilon) & N_2^r(\alpha^q,\varepsilon) & N_3^r(\alpha^q,\varepsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ N_0\end{Bmatrix}, \qquad q = 1,\ldots,N, \qquad (18)$$

де

$$Q_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) Q_{ikm}(\alpha^q)\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n},$$

$$Q_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) Q_{2km}(\alpha^q)\Phi(\alpha^r),$$

$$M_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) M_{ikm}(\alpha^q)\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n},$$

$$M_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) M_{2km}(\alpha^q)\Phi(\alpha^r),$$

$$N_i^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) N_{ikm}(\alpha^q)\frac{\partial\Phi(\alpha^r)}{\partial n},$$

$$N_2^r(\alpha^q,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} C_{km}(\varepsilon) N_{2km}(\alpha^q)\Phi(\alpha^r), \qquad i = 1,3.$$

Дискретні аналоги інтегральних виразів для прогину панелі та нормальних до кривої L компонент кута повороту, перерізувальної сили та моменту одержимо з формул (14) і (4) у вигляді

$$\begin{Bmatrix} w(\alpha,t) \\ \gamma_n(\alpha,t) \\ u_n(\alpha,t)\end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} w_1^r(\alpha,\varepsilon) & w_2^r(\alpha,\varepsilon) & w_3^r(\alpha,\varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha,\varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha,\varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha,\varepsilon) \\ u_1^r(\alpha,\varepsilon) & u_2^r(\alpha,\varepsilon) & u_3^r(\alpha,\varepsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r\end{Bmatrix}\sin(\theta_0 t),$$

$$\begin{Bmatrix} Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \\ N_n(\alpha,t)\end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} Q_1^r(\alpha,\varepsilon) & Q_2^r(\alpha,\varepsilon) & Q_3^r(\alpha,\varepsilon) \\ M_1^r(\alpha,\varepsilon) & M_2^r(\alpha,\varepsilon) & M_3^r(\alpha,\varepsilon) \\ N_1^r(\alpha,\varepsilon) & N_2^r(\alpha,\varepsilon) & N_3^r(\alpha,\varepsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r\end{Bmatrix}\sin(\theta_0 t). \qquad (19)$$

Таким чином, за знайденими з (17) і (18) значеннями параметрів T_i^k характеристики напружено-деформованого стану шукаємо за формулами (19). Частоти власних коливань панелі знаходимо з умов існування нетривіального розв’язку однорідної системи рівнянь (17) або (18).

Числові результати. У табл. 1 для випадку граничних умов типу (7) наведено залежність зведених частот $\bar{\theta} = \sqrt{2\rho h\theta_0^2 / D}$ власних коливань трансверсально-ізотропної панелі від відносного радіуса $\bar{R} = R_0/R$ отвору для різних значень відношення G'/G. Обчислення проведено при таких вхідних даних: $\ell = 1$ м; $R/\ell = 1/\pi$; $\varepsilon/\ell = 0.005$; $h/\ell = 0.025$; $E/E^* = 1$; $E^* = 10^5$ кг/м²; $K = M = 400$; $G = E/(2(1+\nu))$.

Таблиця 1

$\bar{R}$ \ G'/G	0.2	1	5
0	55.91	56.14	56.43
0.1	52.05	56.07	56.44
0.2	51.79	56.07	56.42
0.3	51.38	56.03	56.52
0.4	51.09	55.97	56.50

При обчисленні власних частот для різних значень радіуса отвору брали різну кількість точок колокацій (від 20 до 44), оскільки відрізки розбиття повинні мати приблизно однакову довжину для того, щоб точність обчислень була однаковою для різних значень радіуса отвору. Вибір параметрів ґрунтувався на дослідженнях, виконаних у роботі [2].

4. Висновки. Встановлено, що зі збільшенням відношення G'/G частоти власних коливань оболонки менше реагують на наявність отвору. Основна частота власних коливань у випадку крайових умов типу (7) є меншою від основної частоти оболонки без отвору, а зі збільшенням радіуса спадає.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Бурак, Я. Й., Рудавський Ю. А., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с.
3. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472 с.
4. *Biscos A. S., Springer G. S.* Analysis of free damped vibration of laminated composite plates and shells // Int. J. Solids and Struct. – 1989. – **25**. – P. 129–149.
5. *Biscos A. S., Springer G. S.* Vibration characteristics of composite panels with cutout // AIAA Journal. – 1989. – **27**, No. 8. – P. 1116–1122.
6. *Hu H.-T., Tsai J.-Y.* Maximization of the fundamental frequencies of laminated cylindrical shells with respect to fiber orientation // J. Sound and Vibr. – 1999. – **225.** – P. 723–740.
7. *Hufenbach W., Holste C., Kroll L.* Vibration and damping behaviour of multi-layered composite cylindrical shells // Composite Struct. – 2002. – **58**. – P. 165–174.
8. *Lakshminarayana H. V., Dwarakanath K.* Free vibration characteristics of cylindrical shells made of composite materials // J. Sound and Vibr. – 1992. – **154**. – P. 431–439.
9. *Moussaoui F., Benamar R., White R. G.* The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic shells. Part II: A new approach for free transverse constrained vibration of cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 2002. – **255**. – P. 931–963.
10. *Narisava T.* A study on refined analytical method for free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells using equivalent curvatures // JSME Int. J. – 2002. – **45**. – P. 32–39.
11. *Otercus E., Madenci E., Nemeth N.* Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout // Materials and Struct. – 2007. – **2.** – P. 695–727.
12. *Poore A. L., Barut A., Madenci E.* Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout // J. Sound and Vibr. – 2008. – **312**, No. 1–2. – P. 55–73.
13. *Ramamurti V., Pattabiraman J.* Dynamic behaviour of a cylindrical shell with a cutout // J. Sound and Vibr. – 1977. – **52**, No. 2. – P. 193–200.
14. *Ramesh T. C., Ganesan N.* A finite element based on a discrete layer theory for the free vibration analysis of cylindrical shells // Computer and Struct. – 1992. – **43**. –P. 137–143.
15. *Shu C., Du H.* Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM // Composite. Part B. – 1997. – **28B**. – P. 267–274.
16. *Sivasubramonian B., Rao G. V., Krishnan A.* Free vibration of longitudinally stiffened curved panels with cutout // J. Sound and Vibr. – 1999. – **226**, No. 1. – P. 41–55.
17. *Soldatos K. P.* On the buckling and vibration of antisymmetric angle-ply laminated circular cylindrical shells // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – **21**. – P. 217–222.
18. *Sun G., Benne P. N., Williams F. W.* An investigation of fundamental frequencies of laminated circular cylinders given by shear deformable finite elements // J. Sound and Vibr. – 1997. – **205**. – P. 265–273.
19. *Toda S., Komatsu K.* Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts // J. Sound and Vibr. – 1977. – **52**, No. 4. – P. 497–510.
20. *Viswanathan K. K., Navaneethakrishnan P. V.* Free vibration study of layered cylindrical shells by collocation with splines // J. Sound and Vibr. – 2003. – **260**. – P. 807–827.
21. *Zang X. M.* Vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical shells using the wave propagation approach // Appl. Acoustics. – 2001. – **62**. – P. 1221–1228.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассматривается задача о собственных колебаниях цилиндрической шарнирно опертой трансверсально-изотропной панели с круговым отверстием. Исследования базируются на модифицированных уравнениях теории оболочек Тимошенко. Численное решение этой задачи построено непрямым методом граничных интегральных уравнений, который базируется на последовательностном изображении функций Грина.

INVESTIGATION OF FREQUENCIES OF NATURAL VIBRATIONS OF TRANSVERSALLY-ISOTROPIC CYLINDRICAL PANEL WITH CIRCULAR HOLE

The problem on natural vibrations of the hinged supported cylindrical transversally-isotropic panel with circular hole is considered. Investigations are based on the modified equations of Tymoshenko shell theory. Numerical solution of the problem is found by the indirect method of boundary integral equations based on the sequential approach to constructing Green's functions.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
14.08.08