

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙ ГАЛУЖЕННЯ І ТОЧОК БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯДРА ЯКИХ АНАЛІТИЧНО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ДВОХ СПЕКТРАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглядаються ітераційні алгоритми знаходження кривих власних значень і їх точок біфуркації нелінійної алгебраїчної двопараметричної спектральної задачі, яка виникає при розв'язуванні задачі синтезу плоских антенних ґраток за заданою амплітудною діаграмою напрямленості. В основі алгоритмів – чисельна процедура обчислення звичайних і частинних похідних детермінанта матриці та алгоритм знаходження усіх власних значень у заданій області зміни спектральних параметрів. Наведено результати чисельних експериментів.

1. Вступ. При дослідженні нелінійних рівнянь вигляду

$$A(\lambda, f) = f,$$

де оператор $A(\lambda, f)$ нелінійно залежить від параметра λ і функції f , застосовують формальний підхід, в основі якого лежить лінеаризація. Застосування цього підходу показує, що точками галуження рівняння можуть бути лише ті значення параметра λ , для яких власним значенням відповідного лінеаризованого рівняння [3]

$$A(\lambda)f = \nu f$$

для операторнозначної функції $A(\lambda)$, $A: \mathbb{C} \rightarrow X(H)$ ($X(H)$ – множина лінійних операторів, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральний параметр), яка нелінійно залежить від параметра λ , ν є одиниця ($\nu = 1$). Якщо лінеаризоване рівняння лінійно залежить від параметра λ , тобто $Af = \lambda f$, то його власні значення будуть точками галуження вихідного рівняння. У загальному ж випадку pojawiaються криві власних значень $\nu(\lambda)$, і тоді точками можливого галуження будуть ті значення параметра λ задачі

$$A(\lambda)f = \nu(\lambda)f,$$

для яких $\nu(\lambda) = 1$.

Застосування вказаного підходу до нелінійного інтегрального оператора, який виникає при розв'язуванні задачі синтезу, зокрема, плоских антенних ґраток за заданою амплітудною діаграмою напрямленості, приводить до нелінійної двопараметричної спектральної задачі

$$T(\lambda, \mu)u = 0 \tag{1}$$

з інтегральним оператором $T(\lambda, \mu)$, ядро якого аналітично залежить від двох параметрів λ і μ .

Суттєва відмінність двопараметричних задач від однопараметричних полягає у тому, що двопараметрична задача може взагалі не мати розв'язків або, навпаки, мати їх як континуальну множину, які у випадку дійсних параметрів є кривими власних значень [10].

Такі задачі є ще недостатньо дослідженими, оскільки є багато відкритих питань, пов'язаних з цією проблемою, таких, наприклад, як існування розв'язків і їх кількість, а також розробка чисельних методів для розв'язування таких спектральних задач для алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь.

У цій роботі запропоновано алгоритм знаходження ліній галуження розв'язків нелінійного інтегрального рівняння, яке виникає у результаті варіаційної постановки задачі синтезу плоскої антенної ґратки за заданою амплітудною діаграмою напрямленості.

2. Алгоритм побудови кривих власних значень. Основною обчислювальною частиною алгоритму, що пропонується, є реалізація способу, запропонованого у [7], для обчислення усіх власних значень нелінійної матричної спектральної задачі

$$\mathbf{T}_n(\lambda, \mu) u_n = 0, \quad (2)$$

які належать деякій заданій області зміни спектрального параметра λ при заданому значенні параметра μ . У задачі (2) $u_n \in \mathbb{R}^n$, а $\mathbf{T}_n(\lambda, \mu)$ – дійсна $(n \times n)$ -матриця, елементи якої нелінійно залежать від параметрів λ і μ . Для того щоб деталізувати, як саме спосіб [7] застосовується до задачі, що розглядається у цій роботі, наведемо потрібні результати з [7].

Отже, замінимо у задачі (2), наприклад, параметр μ виразом $\mu = \alpha\lambda + \beta$ і будемо розглядати відповідну однопараметричну задачу

$$\mathbf{T}_n(\lambda) u_n \equiv \mathbf{T}_n(\lambda, \alpha, \beta) u_n = 0 \quad (3)$$

при заданому фіксованому значенні величин α та β . Тоді, очевидно, власні значення задачі (2) – це нулі функції

$$f(\lambda) \equiv \det \mathbf{T}_n(\lambda) = 0,$$

де $\mathbf{T}_n(\lambda)$ є дійсною $(n \times n)$ -матрицею, елементи якої нелінійно залежать від параметра λ .

Потрібно визначити, скільки нулів функції $f(\lambda)$, а отже, власних значень задачі, знаходиться у деякому заданому інтервалі зміни параметра $\lambda \in [\lambda_{c_k}, \lambda_{d_k}] \subset \mathbb{R}$ та обчислити кожне з них.

В основі алгоритму знаходження кількості нулів і їхніх наближень, які знаходяться у деякій області G , є твердження, що випливає з принципу аргументу аналітичної функції (див., наприклад, [2, с. 140]).

Твердження. *Нехай аналітична функція $f(\lambda)$ має в G , враховуючи кратність, m нулів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ і не має нулів на границі Γ області G . Тоді число t визначається згідно з принципом аргументу*

$$t = s_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \quad (4)$$

та справджуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^m (\lambda_j)^k = s_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5)$$

де

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Таким чином, знаючи s_k , $k = 1, 2, \dots, m$, можна з системи (5) знайти нулі функції $f(\lambda)$, які знаходяться в області G .

Вклавши інтервал $[\lambda_{c_t}, \lambda_{d_t}]$ в область G , наприклад, круг з центром у точці $r_{0_t} = (\lambda_{c_t} + \lambda_{d_t})/2$ та радіусом $\rho_t = (\lambda_{d_t} - \lambda_{c_t})/2$, і застосувавши наведене твердження до аналітичної функції $f(\lambda) = \det \mathbf{T}_n(\lambda)$, можна знайти усі власні значення задачі (3), які належать заданій області G , тобто інтервалу $[\lambda_{c_t}, \lambda_{d_t}]$. Інтеграли у формулах (4) і (6) заміняємо якоюсь наближеною квадратурною формулою, наприклад, прямокутників в N точках на Γ , а оскільки Γ – це коло, то для обчислення величин s_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, отримуємо співвідношення

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\lambda_j)^k \rho_t \exp\left(i \frac{2\pi j}{N}\right) \frac{f'(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}, \quad (7)$$

де $\lambda_j = r_{0_t} + \rho_t \exp\left(i \frac{2\pi j}{N}\right)$. Саму ж систему (5) розв'язуємо за допомогою методу Ньютона, вибираючи початкове наближення на границі Γ області G :

$$\lambda_j^{(0)} = r_{0_t} + \rho_t \exp\left(i \frac{2\pi j}{s_0}\right), \quad j = 1, 2, \dots, s_0. \quad (8)$$

Знайдені власні значення можна уточнити, використавши їх як початкові наближення для методу Ньютона

$$\lambda_{\ell+1} = \lambda_{\ell} - \frac{f(\lambda_{\ell})}{f'(\lambda_{\ell})}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

чи для одного з двосторонніх аналогів методу Ньютона [7], наприклад,

$$\begin{aligned} \lambda_{2\ell+1} &= \lambda_{2\ell} - \frac{f(\lambda_{2\ell})f'(\lambda_{2\ell})}{f'(\lambda_{2\ell})^2 - f(\lambda_{2\ell})f''(\lambda_{2\ell})}, \\ \lambda_{2\ell+2} &= \lambda_{2\ell+1} - \frac{f(\lambda_{2\ell+1})}{f'(\lambda_{2\ell+1})}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Щоб скористатися співвідношеннями (7), (8), (9) або (10), потрібно уміти обчислювати значення функції $f(\lambda)$ і її похідних лише при фіксованих значеннях параметра λ . Це можна зробити за допомогою LU -розкладу матриці $\mathbf{T}_n(\lambda)$, тобто розкладу

$$\mathbf{T}_n(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda), \quad (11)$$

де $\mathbf{L}(\lambda)$ – нижня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами, а $\mathbf{U}(\lambda)$ – верхня трикутна матриця. Тоді

$$f(\lambda) = \det \mathbf{L}(\lambda) \det \mathbf{U}(\lambda) = \prod_{i=1}^n u_{ii}(\lambda).$$

Оскільки елементи квадратної матриці $\mathbf{T}_n(\lambda)$ (а, отже, й $\mathbf{U}(\lambda)$) є диференційовними функціями за λ , то для будь-яких λ отримуємо, що

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda), \\ f''(\lambda) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda) + \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda) \right), \end{aligned}$$

де $v_{ii}(\lambda) = u'_{ii}(\lambda)$, $w_{ii}(\lambda) = v'_{ii}(\lambda)$ є діагональними елементами матриць $\mathbf{V}(\lambda)$ та $\mathbf{W}(\lambda)$ у розкладах

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda) &= \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda), \\ \mathbf{C}(\lambda) &= \mathbf{N}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + 2\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{W}(\lambda), \end{aligned}$$

де $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{T}'_n(\lambda)$, $\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{B}'(\lambda)$, а $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{L}'(\lambda)$, $\mathbf{N}(\lambda) = \mathbf{M}'(\lambda)$.

Звідси випливає, що для обчислення $f(\lambda_{\ell})$, $f'(\lambda_{\ell})$ і $f''(\lambda_{\ell})$ необхідно при фіксованому $\lambda = \lambda_{\ell}$ обчислити

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= \mathbf{L}\mathbf{U}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{M}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{N}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{W}, \end{aligned} \quad (12)$$

звідки

$$f(\lambda_\ell) = \prod_{i=1}^n u_{ii}, \quad f'(\lambda_\ell) = \sum_{k=1}^n v_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii},$$

$$f''(\lambda_\ell) = \sum_{k=1}^n w_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk} \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj} \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right). \quad (13)$$

Елементи матриць з розкладу (12) безпосередньо можуть бути обчислені за допомогою рекурентних формул, наведених у [7].

Отже, нехай відоме наближення λ_ℓ до власного значення. Тоді поправка $\Delta\lambda_\ell = \frac{f(\lambda_\ell)}{f'(\lambda_\ell)}$ для побудови послідовних наближень за методом Ньютона (9) матиме вигляд

$$\Delta\lambda_\ell = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{v_{kk}}{u_{kk}}}, \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

а двосторонній аналог методу Ньютона (10) набуде вигляду

$$\lambda_{2\ell+1} = \lambda_{2\ell} - \frac{\sum_{k=1}^n \frac{v_{kk}}{u_{kk}}}{\sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{v_{kk}}{u_{kk}} \right)^2 - \frac{w_{kk}}{u_{kk}} \right)},$$

$$\lambda_{2\ell+2} = \lambda_{2\ell+1} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\bar{v}_{kk}}{\bar{u}_{kk}}}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де u_{kk}, v_{kk}, w_{kk} – елементи матриць \mathbf{U}, \mathbf{V} та \mathbf{W} у розкладах (12) при фіксованому $\lambda = \lambda_{2\ell}$, а $\bar{u}_{kk}, \bar{v}_{kk}$ – елементи матриць \mathbf{U}, \mathbf{V} у розкладах (12) при фіксованому $\lambda = \lambda_{2\ell+1}$.

Оскільки у співвідношеннях (7) значення функції і її похідної обчислюється лише на границі області G , тобто у заданих точках $\lambda_j, j = 1, \dots, N$, то для їх обчислення використовуємо цей самий алгоритм (12), (13). Тобто для обчислення величин $s_k, k = 0, 1, 2, \dots$, отримуємо співвідношення

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left((\lambda_j)^k \rho_t \exp\left(i \frac{2\pi j}{N} \right) \sum_{r=1}^n \frac{v_{rr}}{u_{rr}} \right), \quad (16)$$

де u_{kk}, v_{kk} – елементи матриць \mathbf{U}, \mathbf{V} у розкладах (12) при фіксованому $\lambda = \lambda_j$.

Отже, алгоритм побудови кривих власних значень двопараметричної спектральної задачі складається з таких кроків.

Алгоритм 1. Побудова кривих власних значень.

К р о к 1. Визначаємо інтервал $\Lambda = [\lambda_c, \lambda_d]$, у якому будемо шукати власні значення задачі (2). Це може бути один інтервал або послідовність інтервалів $\Lambda_t = [\lambda_{c_t}, \lambda_{d_t}]$ таких, що $\Lambda = \bigcup \Lambda_t$. Для цього вкладаємо інтервал Λ_t у круг (область G), задаючи центр круга $r_{0_t} = (\lambda_{c_t} + \lambda_{d_t})/2$ та радіус $\rho_t = (\lambda_{d_t} - \lambda_{c_t})/2$, а також кількість точок розбиття N границі Γ області G , тобто кола.

К р о к 2. Визначаємо значення параметра $\mu = \alpha_k \lambda + \beta_k$, надаючи чергове значення величинам α_k та β_k .

К р о к 3. Використовуючи розклад (12) для комплексних λ , визначаємо кількість власних значень, що знаходяться у вибраній області G , за формулою

$$m = s_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j \exp\left(i \frac{2\pi j}{N}\right) \sum_{r=1}^n \frac{v_{jr}}{u_{jr}},$$

а їхні наближені значення знаходимо розв'язуючи систему рівнянь (5), попередньо обчисливши праві частини системи за формулою (16).

К р о к 4. Використовуючи розклад (12) для дійсних λ , уточнюємо усі власні значення, які потрапляють у вибрану область G , за допомогою методу Ньютона

$$\lambda_{\ell+1} = \lambda_{\ell} - \frac{1}{\sum_{r=1}^n \frac{v_{r\ell}}{u_{r\ell}}}$$

або двостороннього аналогу методу Ньютона (15). За початкові наближення вибираємо наближені значення, отримані на кроці 3.

К р о к 5. Переходимо до кроку 2.

К р о к 6. Якщо потрібно, то коригуємо область G шляхом зміни її центру і/або радіуса та переходимо до кроку 2, інакше – крок 7.

К р о к 7. Кінець.

Застосування модифікації **алгоритму 1** до лінійних двопараметричних задач розглядалося у роботі [9].

Оскільки власні криві задачі (2) є алгебраїчними функціями, то вони можуть мати алгебраїчні особливості. Зокрема, якщо дві власні криві $\mu_i(\lambda)$, $\mu_j(\lambda)$, $i \neq j$, перетинаються в точці $(\lambda^b, \mu^b) \equiv \mu_i(\lambda^b) = \mu_j(\lambda^b)$, то таку точку (λ^b, μ^b) називають *точкою біфуркації* кривих $\mu_i(\lambda)$, $\mu_j(\lambda)$. Їх можна отримати (можливо, їхні грубі оцінки) як результат роботи **алгоритму 1** знаходження усіх кривих власних значень, які потрапляють в інтервал зміни спектральних параметрів або безпосередньо їх знайти (уточнити) за допомогою алгоритму, який пропонується далі.

3. Алгоритм знаходження точок біфуркації кривих власних значень. В основі алгоритму знаходження точок біфуркації кривих власних значень задачі (2) лежить критерій достатності існування таких точок, який відомий давно (див., наприклад, [4]) і полягає у наступному:

точка (λ^b, μ^b) є точкою біфуркації рівняння

$$f(\lambda, \mu) \equiv \det \mathbf{T}_n(\lambda, \mu) = 0, \quad (17)$$

якщо виконуються умови $\left. \frac{\partial f(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^b} = 0$, $\left. \frac{\partial f(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu^b} = 0$, причому

$f(\lambda^b, \mu^b) = 0$, тобто точки біфуркації – це розв'язки системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} [f(\lambda, \mu)]'_{\lambda} &\equiv [\det \mathbf{T}_n(\lambda, \mu)]'_{\lambda} = 0, \\ [f(\lambda, \mu)]'_{\mu} &\equiv [\det \mathbf{T}_n(\lambda, \mu)]'_{\mu} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

що задовольняють рівняння (17). Але такий критерій рідко використовувався, оскільки вимагає обчислення похідних від детермінанта матриці.

Узагальнивши запропонований у [7] алгоритм обчислення похідних від детермінанта матриці, цей критерій можна ефективно використати для обчислення точок біфуркації рівняння (17).

У цій роботі подібно, як у роботі [8], пропонуємо ітераційний процес, який дозволяє для обчислення розв'язку (λ, μ) системи (18) застосувати метод Ньютона, не розкриваючи детермінантів у (18). Це означає, що ліва частина системи (18) у явному вигляді не задається, а пропонується алгоритм знаходження значення функцій $[f(\lambda, \mu)]'_\lambda$ та $[f(\lambda, \mu)]'_\mu$, а також елементів матриці других похідних системи (18) при фіксованих значеннях параметрів λ і μ .

Отже, маючи деяке наближення (λ_m, μ_m) до розв'язку системи (18), ітераційний процес методу Ньютона запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1} &= \lambda_m + \Delta\lambda_m, \\ \mu_{m+1} &= \mu_m + \Delta\mu_m,\end{aligned}\tag{19}$$

де відхилення $\Delta\lambda_k$ та $\Delta\mu_k$ є розв'язками системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}[f(\lambda_m, \mu_m)]''_{\lambda\lambda} \Delta\lambda_m + [f(\lambda_m, \mu_m)]''_{\lambda\mu} \Delta\mu_m &= -[f(\lambda_m, \mu_m)]'_\lambda, \\ [f(\lambda_m, \mu_m)]''_{\mu\lambda} \Delta\lambda_m + [f(\lambda_m, \mu_m)]''_{\mu\mu} \Delta\mu_m &= -[f(\lambda_m, \mu_m)]'_\mu.\end{aligned}\tag{20}$$

Надалі будемо вважати, що детермінант матриці других похідних системи (20), елементи якої обчислюються у точці (λ_m, μ_m) , є відмінним від нуля.

Таким чином, на кожному кроці ітераційного процесу потрібно обчислювати значення функції $f(\lambda, \mu) = \det \mathbf{T}_n(\lambda, \mu)$ і її частинних похідних (першої та другої) лише при фіксованих значеннях параметрів λ і μ . Це можна зробити знову ж таки, як і для функції однієї змінної, за допомогою LU -розкладу матриці $\mathbf{D}(\lambda, \mu) \equiv \mathbf{T}_n(\lambda, \mu)$, тобто розкладу

$$\mathbf{D}(\lambda, \mu) = \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu),$$

де $\mathbf{L}(\lambda, \mu)$ – нижня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами, а $\mathbf{U}(\lambda, \mu)$ – верхня трикутна матриця. Тоді

$$f(\lambda, \mu) = \det \mathbf{L}(\lambda, \mu) \det \mathbf{U}(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^n u_{ii}(\lambda, \mu).\tag{21}$$

Оскільки елементи матриці $\mathbf{D}(\lambda, \mu)$ (а, отже, й $\mathbf{U}(\lambda, \mu)$) є диференційовними функціями за λ та μ , то частинні похідні функції двох змінних (21) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}f'_\lambda(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n v_{kk}^1(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu), \\ f'_\mu(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n v_{kk}^2(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu), \\ f''_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{1,1}(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n v_{kk}^1(\lambda, \mu) \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^1(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda, \mu) \right), \\ f''_{\mu\mu}(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{2,2}(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n v_{kk}^2(\lambda, \mu) \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^2(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda, \mu) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\lambda\mu}''(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{1,2}(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n v_{kk}^1(\lambda, \mu) \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^2(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda, \mu) \right), \\
f_{\mu\lambda}''(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{2,1}(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda, \mu) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n v_{kk}^2(\lambda, \mu) \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^1(\lambda, \mu) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda, \mu) \right),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
v_{ii}^1(\lambda, \mu) &= [u_{ii}(\lambda, \mu)]_{\lambda}' , & v_{ii}^2(\lambda, \mu) &= [u_{ii}(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & w_{ii}^{1,1}(\lambda, \mu) &= [v_{ii}^1(\lambda, \mu)]_{\lambda}' , \\
w_{ii}^{2,2}(\lambda, \mu) &= [v_{ii}^2(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & w_{ii}^{1,2}(\lambda, \mu) &= [v_{ii}^1(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & w_{ii}^{2,1}(\lambda, \mu) &= [v_{ii}^2(\lambda, \mu)]_{\lambda}'
\end{aligned}$$

– діагональні елементи матриць $\mathbf{V}^1(\lambda, \mu)$, $\mathbf{V}^2(\lambda, \mu)$, $\mathbf{W}^{1,1}(\lambda, \mu)$, $\mathbf{W}^{2,2}(\lambda, \mu)$, $\mathbf{W}^{1,2}(\lambda, \mu)$ та $\mathbf{W}^{2,1}(\lambda, \mu)$ у розкладах

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\lambda}' &\equiv \mathbf{B}^1(\lambda, \mu) = \mathbf{M}^1(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{V}^1(\lambda, \mu), \\
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\mu}' &\equiv \mathbf{B}^2(\lambda, \mu) = \mathbf{M}^2(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{V}^2(\lambda, \mu), \\
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\lambda\lambda}'' &\equiv \mathbf{C}^{1,1}(\lambda, \mu) = \\
&= \mathbf{N}^{1,1}(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + 2\mathbf{M}^1(\lambda, \mu)\mathbf{V}^1(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{W}^{1,1}(\lambda, \mu), \\
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\mu\mu}'' &\equiv \mathbf{C}^{2,2}(\lambda, \mu) = \\
&= \mathbf{N}^{2,2}(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + 2\mathbf{M}^2(\lambda, \mu)\mathbf{V}^2(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{W}^{2,2}(\lambda, \mu), \\
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\lambda\mu}'' &\equiv \mathbf{C}^{1,2}(\lambda, \mu) = \mathbf{N}^{1,2}(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + \mathbf{M}^1(\lambda, \mu)\mathbf{V}^2(\lambda, \mu) + \\
&\quad + \mathbf{M}^2(\lambda, \mu)\mathbf{V}^1(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{W}^{1,2}(\lambda, \mu), \\
[\mathbf{D}(\lambda, \mu)]_{\mu\lambda}'' &\equiv \mathbf{C}^{2,1}(\lambda, \mu) = \mathbf{N}^{2,1}(\lambda, \mu)\mathbf{U}(\lambda, \mu) + \mathbf{M}^2(\lambda, \mu)\mathbf{V}^1(\lambda, \mu) + \\
&\quad + \mathbf{M}^1(\lambda, \mu)\mathbf{V}^2(\lambda, \mu) + \mathbf{L}(\lambda, \mu)\mathbf{W}^{2,1}(\lambda, \mu),
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^1(\lambda, \mu) &= [\mathbf{L}(\lambda, \mu)]_{\lambda}' , & \mathbf{M}^2(\lambda, \mu) &= [\mathbf{L}(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & \mathbf{N}^{1,1}(\lambda, \mu) &= [\mathbf{M}^1(\lambda, \mu)]_{\lambda}' , \\
\mathbf{N}^{2,2}(\lambda, \mu) &= [\mathbf{M}^2(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & \mathbf{N}^{1,2}(\lambda, \mu) &= [\mathbf{M}^1(\lambda, \mu)]_{\mu}' , & \mathbf{N}^{2,1}(\lambda, \mu) &= [\mathbf{M}^2(\lambda, \mu)]_{\lambda}' .
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що для обчислення $f_{\lambda}'(\lambda_m, \mu_m)$, $f_{\mu}'(\lambda_m, \mu_m)$, $f_{\lambda\lambda}''(\lambda_m, \mu_m)$, $f_{\mu\mu}''(\lambda_m, \mu_m)$, $f_{\lambda\mu}''(\lambda_m, \mu_m)$ та $f_{\mu\lambda}''(\lambda_m, \mu_m)$ необхідно при фіксованих $\lambda = \lambda_m$ і $\mu = \mu_m$ обчислити

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{L}\mathbf{U}, \\
\mathbf{B}^1 &= \mathbf{M}^1\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V}^1, \\
\mathbf{B}^2 &= \mathbf{M}^2\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V}^2, \\
\mathbf{C}^{1,1} &= \mathbf{N}^{1,1}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}^1\mathbf{V}^1 + \mathbf{L}\mathbf{W}^{1,1}, \\
\mathbf{C}^{2,2} &= \mathbf{N}^{2,2}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}^2\mathbf{V}^2 + \mathbf{L}\mathbf{W}^{2,2}, \\
\mathbf{C}^{1,2} &= \mathbf{N}^{1,2}\mathbf{U} + \mathbf{M}^1\mathbf{V}^2 + \mathbf{M}^2\mathbf{V}^1 + \mathbf{L}\mathbf{W}^{1,2}, \\
\mathbf{C}^{2,1} &= \mathbf{N}^{2,1}\mathbf{U} + \mathbf{M}^2\mathbf{V}^1 + \mathbf{M}^1\mathbf{V}^2 + \mathbf{L}\mathbf{W}^{2,1},
\end{aligned} \tag{22}$$

звідки

$$\begin{aligned}
f'_\lambda(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n v_{kk}^1 \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}, & f'_\mu(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n v_{kk}^2 \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}, \\
f''_{\lambda\lambda}(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{1,1} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk}^1 \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^1 \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right), \\
f''_{\mu\mu}(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{2,2} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk}^2 \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^2 \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right), \\
f''_{\lambda\mu}(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{1,2} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk}^1 \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^2 \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right), \\
f''_{\mu\lambda}(\lambda_m, \mu_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk}^{2,1} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk}^2 \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}^1 \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right). \quad (23)
\end{aligned}$$

Елементи матриць з розкладу (22) безпосередньо можуть бути обчислені за допомогою відповідним чином модифікованих рекурентних формул, наведених у [7].

Отже, алгоритм знаходження точок біфуркації кривих власних значень двопараметричної спектральної задачі складається з таких кроків.

Алгоритм 2. Обчислення точок біфуркації.

К р о к 1. Задаємо точність обчислень: за параметрами – ε_p та за функцією $f(\lambda, \mu) - \varepsilon_f$.

К р о к 2. Задаємо початкове наближення точки біфуркації (λ_0, μ_0) .

К р о к 3. for $m = 0, 1, 2, \dots$, до досягнення точності **do**

К р о к 4. Обчислюємо матриці $\mathbf{D}, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \mathbf{C}^{1,1}, \mathbf{C}^{2,2}, \mathbf{C}^{1,2}, \mathbf{C}^{2,1}$.

К р о к 5. Обчислюємо $f'_\lambda(\lambda_m, \mu_m), f'_\mu(\lambda_m, \mu_m), f''_{\lambda\lambda}(\lambda_m, \mu_m), f''_{\mu\mu}(\lambda_m, \mu_m), f''_{\lambda\mu}(\lambda_m, \mu_m), f''_{\mu\lambda}(\lambda_m, \mu_m)$ за допомогою (22), (23).

К р о к 6. За обчисленими коефіцієнтами будуємо матрицю системи (20) і розв'язуємо її відносно $\Delta\lambda_m, \Delta\mu_m$.

К р о к 7. Обчислюємо наступне наближення до λ і μ за формулою (19).

К р о к 8. end for m .

К р о к 9. if $|f(\lambda_m, \mu_m)| \leq \varepsilon_f$ **then go to** **к р о к 11.**

К р о к 10. else Задаємо інше початкове наближення точки біфуркації (λ_0, μ_0) і **go to** **к р о к 3.**

К р о к 11. Кінець.

4. Варіаційна постановка задачі синтезу плоскої антенної ґратки.

Розглянемо прямокутну антенну ґратку з $N = N_1 \times N_2 = (2M_1 + 1)(2M_2 + 1)$ елементів, площа якої співпадає з площиною XOY декартової системи координат і геометричним центром у початку координат. Тоді функція, яка описує діаграму напрямленості (ДН) ґратки (множник плоскої ґратки), має вигляд (див., наприклад, [1, с. 105]).

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} I_{nm} e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)}, \quad (24)$$

де I_{nm} – комплексні струми на випромінювачах; $\xi_1 = \sin \vartheta \cos \phi / \sin \alpha_1$, $\xi_2 = \sin \vartheta \sin \phi / \sin \alpha_2$ – узагальнені координати; ϑ, ϕ – кутові координати

сферичної системи координат (R, ϑ, φ) , центр якої співпадає з центром декартової системи координат XOY ; $c_1 = kd_1 \sin \alpha_1$, $c_2 = kd_2 \sin \alpha_2$ – основні параметри ґратки; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; d_1, d_2 – віддалі між сусідніми елементами по осях OX та OY відповідно; α_1, α_2 – кути, які визначають область $\Omega : \{|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1\}$, у якій задана необхідна амплітудна ДН $F(\xi_1, \xi_2)$. Зазначимо, що функція $f(\xi_1, \xi_2)$ є періодичною з періодом $2\pi/c_1$ за змінною ξ_1 і з періодом $2\pi/c_2$ за змінною ξ_2 . Позначимо через R_2 область, яка відповідає одному періоду $R_2 : \{|\xi_1| \leq \pi/c_1, |\xi_2| \leq \pi/c_2\}$ і вважаємо, що необхідна амплітудна діаграма напрямленості $F(\xi_1, \xi_2)$ задана у деякій області $\Omega \subset R_2$ і описується функцією, яка є неперервною та невід'ємною в області Ω і тотожно дорівнює нулеві за її межами.

Задача синтезу полягає у тому, що потрібно знайти такі струми I_{nm} на випромінювачах, щоб створювана ними діаграма напрямленості найкращим чином наближалася за модулем до заданої $F(\xi_1, \xi_2)$. З цією метою розглянемо варіаційну постановку задачі, тобто задачу синтезу сформулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma(I) = \iint_{\Omega} [F(\xi_1, \xi_2) - |f(\xi_1, \xi_2)|]^2 d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{R_2 \setminus \Omega} |f(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2. \quad (25)$$

З необхідної умови мінімуму функціонала $\sigma(I)$ отримуємо нелінійну систему рівнянь для оптимальних струмів

$$I_{nm} = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} F(\xi_1, \xi_2) e^{-i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)} \times \\ \times \exp \left\{ i \arg \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} I_{nm} e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)} \right\} d\xi_1 d\xi_2, \\ n = -M_1, \dots, M_1, \quad m = -M_2, \dots, M_2, \quad (26)$$

або еквівалентне до (26) рівняння для оптимальної діаграми

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} F(\xi_1, \xi_2) \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) e^{i \arg f(\xi'_1, \xi'_2)} d\xi'_1 d\xi'_2, \quad (27)$$

де

$$\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} e^{i[c_1 n(\xi_1 - \xi'_1) + c_2 m(\xi_2 - \xi'_2)]} = \\ = \frac{\sin N_1 \frac{c_1}{2} (\xi_1 - \xi'_1)}{\sin \frac{c_1}{2} (\xi_1 - \xi'_1)} \cdot \frac{\sin N_2 \frac{c_2}{2} (\xi_2 - \xi'_2)}{\sin \frac{c_2}{2} (\xi_2 - \xi'_2)} \quad (28)$$

– ядро, яке суттєво залежить від координат розміщення елементів ґратки. Воно є виродженим і дійсним.

Еквівалентність рівнянь (27) і (26) означає, що між розв'язками цих рівнянь існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному розв'язку рівняння (27) відповідає розв'язок рівняння (26), і навпаки. Це означає, що якщо I_{nm} , $n = -M_1, \dots, M_1$, $m = -M_2, \dots, M_2$, – розв'язок рівняння (26), то відповідний йому розв'язок рівняння (27) визначається за формулою (24), а якщо ж $f(\xi_1, \xi_2)$ є розв'язком рівняння (27), то відповідний йому розв'язок рівняння (26) визначається за допомогою співвідношення

$$I_{nm} = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} F(\xi_1, \xi_2) e^{i[\arg f(\xi_1, \xi_2) - (c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)]} d\xi_1 d\xi_2.$$

Оскільки рівняння (27) і (26) є нелінійними рівняннями (типу Гаммерштейна), то вони можуть мати неєдині розв'язки, кількість і властивості яких залежать від кількості елементів ґратки і їх розміщення, а також від властивостей заданої амплітудної діаграми напрямленості $F(\xi_1, \xi_2)$.

Легко перекоонатися, що одним із можливих розв'язків рівняння (27) (назвемо його тривіальним) є розв'язок

$$f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \iint_{\Omega} F(\xi'_1, \xi'_2) \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) d\xi'_1 d\xi'_2. \quad (29)$$

Він відповідає діаграмам з фазовим центром ($\arg f(\xi_1, \xi_2) \equiv 0$) і існує для будь-яких $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$.

Числові експерименти синтезу діаграм напрямленості для різних значень параметрів c_1 та c_2 показують, що з ростом параметрів c_1 та c_2 існують і інші розв'язки, які відгалузилися від тривіального розв'язку $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ і вони є більш ефективними у розумінні значень функціонала (25) від 0% до $\approx 25\%$. Зокрема, для заданої діаграми напрямленості $F(\xi_1, \xi_2) = 1$, значення функціонала (25), які він набуває на оптимальному розв'язку $f(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ для різних значень основних параметрів c_1 та c_2 ($\sigma_1(I) = 0.739543$ відповідає $c_1 = c_2 = 0.57$, $\sigma_2(I) = 0.719989$ - $c_1 = c_2 = 0.60$, $\sigma_3(I) = 0.644291$ - $c_1 = c_2 = 0.65$, $\sigma_4(I) = 0.559552$ - $c_1 = c_2 = 0.70$, $\sigma_5(I) = 0.493709$ - $c_1 = c_2 = 0.75$), є меншим від значень функціонала (25) на тривіальному розв'язку $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ при тих самих значеннях параметрів c_1 та c_2 ($\sigma_1^0(I) = 0.739769$, $\sigma_2^0(I) = 0.741211$, $\sigma_3^0(I) = 0.734128$, $\sigma_4^0(I) = 0.707903$, $\sigma_5^0(I) = 0.661929$) відповідно на 0.03%, 2.86%, 12.24%, 20.95% та 25.41%.

Отже, цікавим є саме нетривіальний розв'язок, який відгалужується від $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ зі зростанням параметрів c_1 та c_2 .

5. Задача знаходження ліній галуження. Точками можливого галуження розв'язків інтегрального рівняння (27) є такі значення дійсних фізичних параметрів $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, при яких лінійне однорідне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) &= T(c_1, c_2)u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) \equiv \\ &\equiv \iint_{\Omega} F(\xi'_1, \xi'_2) \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \frac{u(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}{f_0(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)} d\xi'_1 d\xi'_2, \quad (30) \end{aligned}$$

отримане лінеаризацією рівняння (27), має відмінні від тотожного нуля розв'язки [3].

Оскільки параметри c_1 та c_2 відіграють роль спектральних, то фактично отримано узагальнену двопараметричну задачу на власні значення

$$(T(c_1, c_2) - I)u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = 0. \quad (31)$$

Легко перекоонатися, що при довільних скінченних значеннях c_1, c_2 функція $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ є власною функцією рівняння (30). Звідси випливає, що оператор $T(c_1, c_2)$ має спектр, що співпадає з першим квадрантом площини \mathbb{R}^2 .

Задача полягає у знаходженні такої множини значень дійсних параметрів c_1, c_2 задачі (31), у яких появляються розв'язки, відмінні від тривіального $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$.

Зазначимо, що у частковому випадку, коли можна відокремити змінні у функції $F(\xi_1, \xi_2)$, тобто $F(\xi_1, \xi_2)$ подати у вигляді $F(\xi_1, \xi_2) = F_1(\xi_1) \cdot F_2(\xi_2)$, рівняння (30) за умови, що і функцію $u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ можна подати у вигляді $u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = u_1(\xi_1, c_1) \cdot u_2(\xi_2, c_2)$, розпадеться на два незалежних однопараметричних (але нелінійних за параметром) рівняння, тобто

$$u_j(\xi_j, c_j) = T_j(c_j)u_j(\xi_j, c_j), \quad j = 1, 2,$$

з операторами

$$T_j(c_j)u_j(\xi_j, c_j) = \int_{-1}^1 \frac{F_j(\xi_j)}{f_0(\xi_j, c_j)} \frac{\sin N_j \frac{c_j}{2}(\xi_j - \xi'_j)}{\sin \frac{c_j}{2}(\xi_j - \xi'_j)} u_j(\xi'_j, c_j) d\xi'_j, \quad j = 1, 2.$$

Для розв'язування таких рівнянь можна застосувати, наприклад, алгоритми, розроблені в [7]. У цій роботі пропонуємо чисельні алгоритми розв'язування більш складної задачі, коли змінні не відокремлюються.

Спочатку покажемо, що ядро $\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$ в області $\Omega : \{|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1\}$ при довільних $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$ є додатним ядром інтегрального оператора

$$Af(\xi_1, \xi_2) = \iint_{\Omega} \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) f(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2.$$

З цієї метою розглянемо скалярний добуток

$$(Af, f) = \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) f(\xi'_1, \xi'_2) \overline{f(\xi_1, \xi_2)} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Підставивши замість $\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$ вираз (28), отримаємо

$$\begin{aligned} (Af, f) &= \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \left(\sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} e^{i[n c_1 (\xi_1 - \xi'_1) + m c_2 (\xi_2 - \xi'_2)]} \right) \times \\ &\quad \times f(\xi'_1, \xi'_2) \overline{f(\xi_1, \xi_2)} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \left\{ \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} f(\xi'_1, \xi'_2) e^{-i(n c_1 \xi'_1 + m c_2 \xi'_2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{f(\xi_1, \xi_2)} e^{i(n c_1 \xi_1 + m c_2 \xi_2)} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \right\} = \\ &= \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \left\| \iint_{\Omega} f(\xi'_1, \xi'_2) e^{-i(n c_1 \xi'_1 + m c_2 \xi'_2)} d\xi'_1 d\xi'_2 \right\|^2 = \\ &= \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} |I_{nm}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що остання нерівність перетворюється у рівність лише при $I_{nm} = 0$, $n = -M_1, \dots, M_1$, $m = -M_2, \dots, M_2$. Звідси випливає, що ядро $\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$ є додатним, а додатний оператор A залишає інваріантним конус \mathbf{K} неперервних на Ω невід'ємних функцій ($A\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$) [6, с. 45]. Внаслідок цього з урахуванням (29) отримуємо, що $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) -$

додатна на Ω функція. Врахувавши це, зведемо оператор (30) до самоспряженого вигляду стандартним чином. Вводячи нову функцію

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \sqrt{w(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)} u(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2), \quad (32)$$

де $w(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = F(\xi_1, \xi_2)/f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$, отримуємо інтегральне рівняння

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \iint_{\Omega} \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \varphi(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \quad (33)$$

з симетричним ядром

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) &= \\ &= \mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \sqrt{w(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) w(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}. \end{aligned}$$

Оскільки при довільних значеннях $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ функція $f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ є власною функцією рівняння (30), то з урахуванням (32) власною функцією рівняння (33) при довільних $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$ буде функція

$$\varphi_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \sqrt{F(\xi_1, \xi_2) f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)},$$

яка відповідає спектру оператора (33), що співпадає з першим квадрантом площини \mathbb{R}^2 .

Для знаходження відмінних від $\varphi_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ розв'язків виключимо цю функцію з ядра $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$, тоді рівняння (33) зведеться до інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) &= \tilde{T}(c_1, c_2) \varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) \equiv \\ &\equiv \iint_{\Omega} E(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \varphi(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \end{aligned} \quad (34)$$

з симетричним ядром

$$\begin{aligned} E(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) &= \sqrt{w(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) w(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)} \times \\ &\times \left[\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) - \frac{f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) f_0(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}{\|\varphi_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)\|^2} \right]. \end{aligned}$$

Згідно з лемою Шмідта [3, с. 132] функція $\varphi_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$ уже не буде власною функцією рівняння (34). Тобто зі спектра оператора (34) виключили континуальну множину власних значень, яка співпадає з першим квадрантом площини \mathbb{R}^2 і відповідає функції $\varphi_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)$.

Використовуючи властивість виродженості ядра $\mathcal{K}(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$, зведемо рівняння (34) згідно з [5] до еквівалентної системи алгебраїчних рівнянь.

Скориставшись формулою (28), запишемо ядро $E(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)$ у вигляді

$$\begin{aligned} E(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) &= \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \mathcal{K}_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) \cdot \mathcal{K}_{nm}^2(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) - \\ &- \left(\sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \mathcal{K}_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) q_{nm}^1 \right) \times \\ &\times \left(\sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \mathcal{K}_{nm}^2(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) q_{nm}^2 \right), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) &= \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2\pi} \sqrt{\frac{F(\xi_1, \xi_2)}{f_0(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2)}} \cdot e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)}, \\ \mathcal{K}_{nm}^2(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) &= \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2\pi} \sqrt{\frac{F(\xi'_1, \xi'_2)}{f_0(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2)}} \cdot e^{-i(c_1 n \xi'_1 + c_2 m \xi'_2)}, \\ q_{nm}^1 &= \iint_{\Omega} F(\xi'_1, \xi'_2) e^{-i(c_1 n \xi'_1 + c_2 m \xi'_2)} d\xi'_1 d\xi'_2, \\ q_{nm}^2 &= \iint_{\Omega} F(\xi_1, \xi_2) e^{i(c_1 n \xi_1 + c_2 m \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

Тоді рівняння (34) набуде вигляду

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} a_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) b_{nm},$$

де

$$\begin{aligned}b_{nm} &= \iint_{\Omega} \mathcal{K}_{nm}^2(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) \varphi(\xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) d\xi'_1 d\xi'_2, \\ a_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) &= \mathcal{K}_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{s=-M_1}^{M_1} \sum_{t=-M_2}^{M_2} \mathcal{K}_{st}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) q_{st}^1 \right) q_{nm}^2, \\ \gamma &= \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} q_{nm}^1 q_{nm}^2,\end{aligned}$$

а невідомі коефіцієнти b_{nm} визначаються як розв'язки однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$b_{k\ell} = \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2}^{M_2} \alpha_{nm}^{(k\ell)}(c_1, c_2) b_{nm}, \quad k = -M_1, \dots, M_1, \quad \ell = -M_2, \dots, M_2,$$

де

$$\begin{aligned}\alpha_{nm}^{(k\ell)}(c_1, c_2) &= \iint_{\Omega} a_{k\ell}^2(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) a_{nm}^1(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ a_{nm}^2(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) &= \mathcal{K}_{nm}^2(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{s=-M_1}^{M_1} \sum_{t=-M_2}^{M_2} \mathcal{K}_{st}^2(\xi_1, \xi_2, c_1, c_2) q_{st}^2 \right) q_{nm}^1.\end{aligned}$$

Отже, отримано еквівалентну до (31) матричну нелінійну за спектральними параметрами двопараметричну спектральну задачу

$$\mathbf{T}_N(\lambda, \mu) \mathbf{b}_N \equiv (\mathbf{A}_N(\lambda, \mu) - \mathbf{I}_N) \mathbf{b}_N = 0, \quad (35)$$

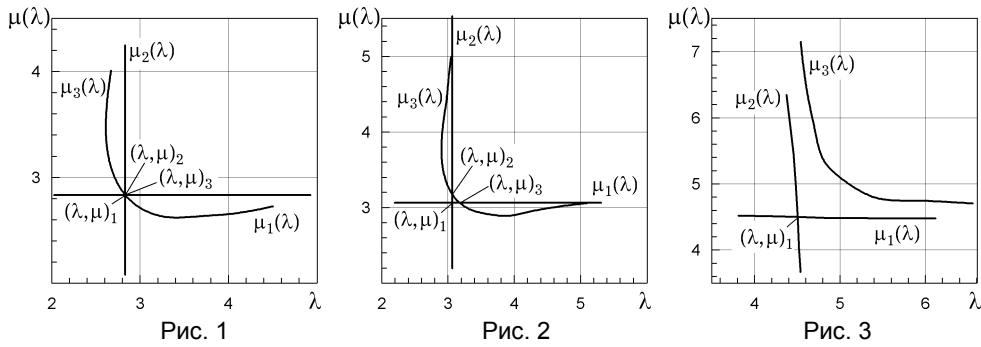
де $\lambda = c_1$, $\mu = c_2$, \mathbf{I}_N – одинична матриця порядку N , $\mathbf{b}_N \in \mathbb{R}^N$.

Отже, задача знаходження ліній галуження рівняння (27) зводиться до знаходження кривих власних значень нелінійної двопараметричної спектральної задачі (35).

6. Аналіз числових результатів. Використовуючи *алгоритм 1* побудови кривих власних значень двопараметричної спектральної задачі, для трьох заданих діаграм напрямленості

$$F(\xi_1, \xi_2) = 1, \quad F(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)/2}, \quad F(\xi_1, \xi_2) = \cos \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right)$$

знайдено криві власних значень задачі (35), які наведено відповідно на рис. 1–3.



Це дає підстави зробити такі висновки.

- Отримано усі дійсні розв'язки (криві власних значень) задачі (35), які потрапляють в інтервал зміни параметрів λ, μ .

- Для діаграм $F(\xi_1, \xi_2)$, у яких відокремлюються змінні, отримано ще один розв'язок, зокрема для $F(\xi_1, \xi_2) = 1$ – це розв'язок $\mu_3(\lambda)$ на рис. 1, що відповідає синтезованим діаграмам $f(\xi_1, \xi_2)$, у яких змінні не відокремлюються.

- Для діаграм $F(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)/2}$ та $F(\xi_1, \xi_2) = \cos \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right)$, у яких змінні не відокремлюються, отримано розв'язки $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$, які, як вважалося, існують тільки для діаграм $F(\xi_1, \xi_2)$, у яких змінні відокремлюються.

Із застосуванням **алгоритму 2** проведено низку чисельних експериментів для знаходження точки біфуркації кривих власних значень рівняння (35) для випадків, коли у функції $F(\xi_1, \xi_2)$, яка описує діаграму напрямленості антени, змінні відокремлюються і не відокремлюються.

У табл. 1 наведено точки біфуркації для трьох заданих діаграм $F(\xi_1, \xi_2)$, коли змінні відокремлюються і трьох заданих діаграм, коли змінні не відокремлюються. Для трьох перших діаграм наведено також точки біфуркації, які можуть бути отримані іншими методами за умови, що й у функції $f(\xi_1, \xi_2)$ змінні відокремлюються.

Таблиця 1

$F(\xi_1, \xi_2)$	Точки біфуркації $(\lambda_b, \mu_b)_i$	Точки біфуркації, отримані іншим методом
$\text{const} \equiv 1$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (\lambda_b, \mu_b)_2 = (\lambda_b, \mu_b)_3 = (2.832715, 2.832715)$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (2.832715, 2.832715)$
$\cos \frac{\pi \xi_1}{2} \cdot \cos \frac{\pi \xi_2}{2}$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (\lambda_b, \mu_b)_2 = (\lambda_b, \mu_b)_3 = (4.207065, 4.207065)$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (4.207065, 4.207065)$
$ \sin \pi \xi_1 \cdot \sin \pi \xi_2 $	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (\lambda_b, \mu_b)_2 = (\lambda_b, \mu_b)_3 = (2.855425, 2.855425)$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (2.855425, 2.855425)$
$\sqrt{1 - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)}$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (3.064250, 3.064250)$ $(\lambda_b, \mu_b)_2 = (3.064250, 3.186696)$ $(\lambda_b, \mu_b)_3 = (3.186696, 3.064250)$	–
$1 - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (3.302395, 3.302395)$ $(\lambda_b, \mu_b)_2 = (3.302395, 3.565660)$ $(\lambda_b, \mu_b)_3 = (3.565660, 3.302395)$	–
$\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$	$(\lambda_b, \mu_b)_1 = (4.503957, 4.503957)$	–

Зауважимо, що точки біфуркації (принаймні їхні грубі оцінки) можна отримати також і графічно з рис. 1–3, а для їх уточнення застосувати **алгоритм 2**.

1. Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1969. – 239 с.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат. – Т. 1. – 1933. – 368 с.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
6. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. П., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
7. Подлевский Б. М. О некоторых двусторонних аналогах метода Ньютона решения нелинейной спектральной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 11. – С. 1819–1829.
8. Подлевский Б. М. О применении метода Ньютона к нахождению собственных значений некоторых двухпараметрических (многопараметрических) спектральных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – **48**, № 12. – С. 2107–2112.
9. Подлевський Б. М., Хлобистов В. В. Про один підхід до знаходження кривих власних значень лінійних двопараметричних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 86–93.
10. Collatz L. Multiparametric eigenvalue problems in inner-product spaces // J. Comput. System Sci. – 1968. – **2**, No. 4. – P. 333–341.

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К НАХОЖДЕНИЮ ЛИНИЙ
ВЕТВЛЕНИЯ И ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЯДРА КОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ
ЗАВИСЯТ ОТ ДВУХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

Рассматриваются итерационные алгоритмы нахождения кривых собственных значений и их точек бифуркации нелинейной алгебраической двухпараметрической спектральной задачи, которая возникает при решении задачи синтеза плоских антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности. В основе алгоритмов – численная процедура вычисления обычных и частных производных детерминанта матрицы и алгоритм нахождения всех собственных значений в заданной области изменения спектральных параметров. Приведены результаты численных экспериментов.

**ON ONE APPROACH TO FINDING THE BRANCHING LINES
AND BIFURCATION POINTS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR
INTEGRAL EQUATIONS THE KERNELS OF WHICH ANALYTICALLY
DEPEND ON TWO SPECTRAL PARAMETERS**

The iterative algorithms of finding the eigenvalue curves and their bifurcation points of nonlinear algebraic two-parameter spectral problem are considered. This problem arises at solution of the synthesis problem of the antennas array according to the given amplitude directivity pattern. In the basis of algorithms are the numerical procedure of calculation of ordinary and partial derivatives of the matrix determinant and the algorithm of finding all eigenvalues in the given region of spectral parameters change. The outcomes of numerical experiments are given.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.06.09