УДК 518: 517.948

С. М. Шахно

ЗБІЖНІСТЬ НЕТОЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ПРИ УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВАХ ЛІПШИЦЯ

Досліджено збіжність неточних методів хорд і Стеффенсена для розв'язування систем нелінійних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку. Розглядаються методи з контролем відносної нев'язки. Результати легко забезпечують оцінку кулі збіжності для неточних методів. Для часткових випадків результати співпадають з відомими.

1. Вступ. Нехай задано рівняння

$$F(x) = 0\,, \tag{1}$$

де $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – нелінійний оператор. Для методу Стеффенсена вважатимемо, що справджується подання

$$F(x) = x - \varphi(x) = 0\,, \tag{2}$$

де φ – нелінійний оператор у просторі $\mathbb{R}^n$.

Нехай x, y – дві фіксовані точки з $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Обмежений лінійний оператор, позначений через $F(x,y)$, який діє з $D \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, називатимемо поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y, якщо виконується рівність [7]

$$F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y)\,. \tag{3}$$

Будемо вважати, що існує похідна Фреше оператора $F(x)$ в D, причому $F(x,x) = F'(x)$.

Неточний ітераційний процес для розв'язування систем нелінійних рівнянь має загальний вигляд

$$B_k\Delta_k = -F(x_k) + r_k\,, \qquad \text{де} \qquad \frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \le \eta_k\,,$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta_k\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots\,, \tag{4}$$

де x_0, x_{-1} – початкові значення, B_k – невироджена матриця і η_k – послідовність прискорювальних множників таких, що $0 \le \eta_k \le 1$. Цей процес є неточним методом Ньютона, якщо $B_k = F'(x)$, неточним методом хорд, якщо $B_k = F(x_k, x_{k-1})$, і неточним методом Стеффенсена, якщо $B_k = F(x_k, \varphi(x_k))$, де через $F(x,y) = I - \varphi(x,y)$ позначено поділену різницю першого порядку оператора $F(x) = x - \varphi(x)$, а I – одиничний оператор. Метод Стеффенсена збігається з методом хорд [2, 7, 12], якщо тільки на кожному кроці за вихідні наближення вибирати величини $x_k, \varphi(x_k)$.

Зауважимо, що неточні методи включають в себе клас ітераційних методів, в яких ітераційний метод використовує наближений розв'язок лінійних систем методів (4).

Для неточних різницевих методів властивості локальної збіжності і порядку збіжності можна характеризувати в термінах прискорювальних множників η_k. Позначимо через $\|\cdot\|$ деяку векторну норму в $\mathbb{R}^n$ і підпорядковану матричну норму в $\mathbb{R}^{n\times n}$. У [9] показано, що при звичайних умовах для методу Ньютона і сталих η_k, менших від 1, послідовність $\{x_k\}$ лінійно збігається до розв'язку x^* рівняння (1) у нормі $\|y\|_* = \left\|F'(x^*)y\right\|$. Проте ці результати залежать від норми і оскільки $\|\cdot\|_*$ є необчислювана, то їх важко застосувати. Тому далі зусилля вчених були сфокусовані на аналізі контролю залишкової нев'язки $\dfrac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \le \eta_k$ і на її впливі на властивості збіжності. Б. Моріні [11] розглянув неточні методи, коли контроль зваженої (масштабованої) відносної нев'язки виконувався на кожній ітерації. Їхня ітераційна форма є такою:

$$B_k\Delta_k = -F(x_k) + r_k\,, \qquad \text{де} \qquad \frac{\|P_k r_k\|}{\|P_k F(x_k)\|} \le \theta_k\,,$$
$$x_{k+1} = x_k + \Delta_k\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots\,, \tag{5}$$

де P_k – оборотна матриця для кожного k. Якщо $P_k = I$ для кожного k, то (5) зводиться до (4). Зауважимо, що нев'язки у цій формі використовуються в ітераційних методах Ньютона із застосуванням передумов і P_k змінюється з індексом k, якщо B_k обчислено. Але також звертаємо увагу, що результати, отримані в [11], не дають можливості ясно побачити, наскільки великим є радіус кулі збіжності.

Метод хорд досліджували за умов Ліпшиця для поділених різниць автори робіт [7, 12]. Теоретичні дослідження методу Стеффенсена для скалярного випадку проведені А. М. Островським [3]. На банаховий простір цей метод узагальнив С. Ю. Ульм [4]. При цьому виявляється, що при виконанні природних умов узагальнений метод Стеффенсена (без використання похідних від оператора) має квадратичний порядок збіжності, як і метод Ньютона [1]. Метод Стеффенсена для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі досліджувався авторами [2, 4] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора $F(x)$ задовольняють умову Ліпшиця з невід'ємною сталою L. У роботі [6] розглянуто деяке узагальнення методу Стеффенсена, однак дослідження проведено при доволі жорстких обмеженнях на оператор $F(x)$, зокрема, вимагається обмеженість норми другої похідної Фреше від F.

У праці [13] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. Автором у [12] запропоновано аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і при цих умовах досліджено збіжність методу хорд. У праці [5] вивчалась збіжність методу Стеффенсена для операторних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для перших поділених різниць нелінійного оператора $F(x)$. Неточний метод Ньютона досліджувався у [8–11, 14]. Зокрема, в праці [8] проведено дослідження неточного методу Ньютона при узагальнених умовах Ліпшиця для оператора похідної першого порядку.

У цій праці розглядаємо неточні різницеві методи при узагальнених умовах Ліпшиця, де здійснюється контроль зваженої відносної нев'язки на кожній ітерації. Отримані результати мають силу при широко використовуваних гіпотезах на F і співпадають з теорією методів хорд і Стеффенсена у випадку зникнення нев'язки, тобто при $\theta_k = 0$, для кожного k. Результати також дають можливість встановити, наскільки великим є радіус кулі збіжності.

2. Допоміжні леми. Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту, а через $\overline{B(x_0, r)} = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ – замкнуту кулі радіуса r з центром у точці x_0.

Умову на оператор $F(x,y)$ поділеної різниці

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le L(\|x-u\|+\|y-v\|) \qquad \forall\ x,y,u,v \in D \tag{6}$$

називатимемо умовою Ліпшиця в області D зі сталою L.

Якщо виконується умова

$$\|F(x,y)-F'(x_0)\| \le L(\|x-x_0\|+\|y-x_0\|) \qquad \forall\ x,y \in B(x_0,r), \tag{7}$$

то назвемо її центральною умовою Ліпшиця у кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Крім цього, L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (6) і (7) будуть замінені відповідно на

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)\,du \qquad \forall\ x,y,u,v \in D \tag{8}$$

та

$$\|F(x,y)-F'(x_0)\| \le \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u)\,du \qquad \forall\ x,\ y \in B(x_0,r). \tag{9}$$

Умови Ліпшиця (8) і (9) називатимемо узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

Надалі будемо припускати неперервність оператора $F(x)$ чи $\varphi(x)$ у потрібній області.

Використовуючи теорему Банаха [1], отримуємо такий результат.

Лема 1. *Припустимо, що існує* $F'(x^*)^{-1}$, F *має поділені різниці* $F(x,y)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця з* L *в середньому*:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}F(x,y)-I\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du \qquad \forall\ x,\ y \in B(x^*,\alpha r), \tag{10}$$

де L *– додатна інтегровна функція,* $\rho(x)=\left\|x-x^*\right\|$. *Нехай* r *задовольняє умову*

$$\int_0^{2r} L(u)\,du \le 1. \tag{11}$$

Тоді поділена різниця $F(x,y)$ *оборотна в цій кулі і*

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\right\| \le \left(1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Справді, з тотожності

$$F(x,y)^{-1}F'(x^*)=\left[I-\left(I-F'(x^*)^{-1}F(x,y)\right)\right]^{-1},$$

враховуючи (10) і (11), за теоремою Банаха отримаємо

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\right\| \le \frac{1}{1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du}. \qquad \Diamond$$

Лема 2. *Нехай* $h(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t L(u)\,du$, $0 \le t \le r$, *де* $L(u)$ *– додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на* $[0,\ r]$. *Тоді* $h(t)$ *є монотонно неспадною відносно* t.

Д о в е д е н н я. Справді, при монотонності L маємо

$$\left(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\right)L(u)\,du = \left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)L(u)\,du \ge$$

$$\ge L(t_1)\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)du =$$

$$= L(t_1)\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\right) = 0\,, \qquad 0 < t_1 < t_2\,.$$

Отже, $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du$ є монотонно неспадною відносно t. ◊

3. Збіжність неточних різницевих методів з контролем зваженої нев'язки. Вивчимо збіжність неточних методу хорд та методу Стеффенсена відповідно при $B_k = F(x_k, x_{k-1})$ і $B_k = F(x_k, \varphi(x_k))$ для кожного k. Радіус області збіжності і порядок збіжності методу хорд встановлює така теорема.

Теорема 1. *Нехай F − нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D простору $\mathbb{R}^n$ зі значеннями у просторі $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

(***i***) *$F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in B(x^*, r) \subset D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотною;*

(***ii***) *F має поділені різниці в $B(x^*, r)$, які задовольняють умову Ліпшиця з L в середньому:*

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x^*, x^*) - F(x, y)\right)\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du\,, \tag{12}$$

де $x, y \in B(x^*, r)$, $\rho(y) = \left\|y - x^*\right\|$ і функція L є неспадною;

(***iii***) *покладемо*

$$B_k = F(x_k, x_{k-1})\,,$$

$$v_k = \theta_k \left\|\left(P_k F(x_k, x_{k-1})\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\left(P_k F(x_k, x_{k-1})\right)\right\| = \theta_k \operatorname{cond}\left(P_k F(x_k, x_{k-1})\right),$$

де $v_k \le v < 1$.

Нехай $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{(1+v)\int_0^r L(u)\,du + v}{1 - \int_0^{2r} L(u)\,du} \le 1\,. \tag{13}$$

Тоді неточний метод хорд збігається для всіх x_{-1}, $x_0 \in B(x^*, r)$ і

$$\left\|x_{n+1} - x^*\right\| \le$$

$$\le \left(\frac{\int_0^{\rho(x_{-1})} L(u)\,du}{\rho(x_{-1})\left(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)\,du\right)}\rho(x_{k-1}) + \frac{\left(1 + \int_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)\,du}\right)\rho(x_k)\,,$$

(14)

де

$$q = \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{-1})} L(u)\,du + \left(1 + \int\limits_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} L(u)\,du} < 1, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_0, x_{-1} \in B(x^*, r)$, де r задовольняє (13), тоді q, визначене за (15), буде меншим ніж 1. Дійсно, при монотонності L за лемою 2 маємо, що $\frac{1}{t}\int\limits_0^t L(u)\,du$ є неспадною відносно t. Тому

$$q = \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{-1})} L(u)\,du}{\rho(x_{-1})\left(1 - \int\limits_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} L(u)\,du\right)}\rho(x_{-1}) + \frac{\left(1 + \int\limits_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)\,du} <$$

$$< \frac{\int\limits_0^r L(u)\,du}{1 - \int\limits_0^{2r} L(u)\,du} + \frac{\left(1 + \int\limits_0^r L(u)\,du\right)v}{1 - \int\limits_0^{2r} L(u)\,du} \le 1. \tag{16}$$

Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то згідно з (5) маємо

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x_k) + F(x_k, x_{k-1})^{-1}r_k =$$

$$= -F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x^*, x^*)F(x^*, x^*)^{-1}\big[F(x_k, x^*) -$$

$$- F(x_k, x_{k-1})\big](x_k - x^*) + F(x_k, x_{k-1})^{-1}P_k^{-1}P_k r_k.$$

Тоді з огляду на лему 1 і умови (12) отримаємо

$$\left\|x_{k+1} - x^*\right\| \le \left\|F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x^*, x^*)\right\| \times$$

$$\times \left\|F(x^*, x^*)^{-1}\big[F(x_k, x^*) - F(x_k, x_{k-1})\big]\right\| \cdot \left\|x_k - x^*\right\| +$$

$$+ \theta_k \left\|(P_k F(x_k, x_{k-1}))^{-1}\right\| \cdot \left\|P_k F_k\right\| \le \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)\,du}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)\,du}\rho(x_k) +$$

$$+ \theta_k \left\|(P_k F(x_k, x_{k-1}))^{-1}\right\| \cdot \left\|P_k F(x_k, x_{k-1})F(x_k, x_{k-1})^{-1}F(x_k)\right\| \le$$

$$\le \left(\frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)\,du}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)\,du} + \frac{\left(1 + \int\limits_0^{\rho(x_k)} L(u)\,du\right)v_k}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)\,du}\right)\rho(x_k).$$

Поклавши у цій нерівності $k = 0$, отримаємо

$$\left\|x_1 - x^*\right\| \le q\left\|x_0 - x^*\right\| < \left\|x_0 - x^*\right\|.$$

Отже, $x_1 \in B(x^*, r)$. Це показує, що (5) можна повторити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією всі $x_k \in B(x^*, r)$ і $\rho(x_k) = \left\| x_k - x^* \right\|$ монотонно спадає. Далі, для всіх $k = 0, 1, \ldots$ маємо

$$\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \frac{\rho(x_{k-1}) \int\limits_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)\,du}{\rho(x_{k-1})\left(1 - \int\limits_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)\,du\right)} \cdot \rho(x_k) +$$

$$+ \frac{\left(1 + \int\limits_0^{\rho(x_k)} L(u)\,du\right) v_k}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_k)+\rho(x_{k-1})} L(u)\,du} \cdot \rho(x_k) \le$$

$$\le \left(\frac{\int\limits_0^{\rho(x_{-1})} L(u)\,du}{\rho(x_{-1})\left(1 - \int\limits_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)\,du\right)} \rho(x_{k-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(1 + \int\limits_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right) v}{1 - \int\limits_0^{\rho(x_0)+\rho(x_{-1})} L(u)\,du} \right) \rho(x_k).$$

Таким чином, отримали (14). ◊

Нехай рівняння (1) має вигляд

$$F(x) = x - \varphi(x) = 0, \tag{17}$$

де $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – нелінійний оператор.

Доведемо тепер збіжність неточного методу Стеффенсена для розв'язування рівняння (17), сформулювавши спочатку відповідну лему.

Лема 3. *Припустимо, що існує* $F'(x^*)^{-1}$, F *має поділені різниці* $F(x, y) = I - \varphi(x, y)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця з* L *в середньому*:

$$\left\| F'(x^*)^{-1} F(x, y) - I \right\| \le \int\limits_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du \qquad \forall\, x, y \in B(x^*, \alpha r) \tag{18}$$

і

$$\|\varphi(x, y)\| \le M, \tag{19}$$

де $y = \varphi(x)$, L – *додатна інтегровна функція*, $\alpha = \max\{1, M\}$, $\rho(x) = \left\| x - x^* \right\|$. *Нехай* r *задовольняє умову*

$$\int\limits_0^{(1+M)r} L(u)\,du \le 1.$$

Тоді $F(x, y)$ *оборотна в цій кулі та*

$$\left\| F(x, y)^{-1} F'(x^*) \right\| \le \left(1 - \int\limits_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Справді, з тотожності

$$F(x,y)^{-1}F'(x^*) = \left[I - \left(I - F'(x^*)^{-1}F(x,y)\right)\right]^{-1},$$

враховуючи (18) і (19), за теоремою Банаха отримаємо

$$\left\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\right\| \le \frac{1}{1 - \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du}. \qquad \Diamond$$

Теорема 2. *Нехай* $F(x) = x - \varphi(x)$ *− нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області* D *простору* $\mathbb{R}^n$ *зі значеннями у просторі* $\mathbb{R}^n$. *Припустимо, що*:

(***i***) $F(x) = 0$ *має розв'язок* $x^* \in B(x^*, r) \subset D$, *у якому існує похідна Фреше* $F'(x^*)$ *і вона є оборотною;*

(***ii***) *для всіх* x, y *із сфери* $B(x^*, \alpha r) \subset D$ *оператор* F *має поділені різниці* $F(x,y) = I - \varphi(x,y)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця з* L *в середньому*:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F(x^*,x^*) - F(x,y)\right)\right\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)\,du \tag{20}$$

і

$$\left\|\varphi(x,x^*)\right\| \le M, \tag{21}$$

де $\alpha = \max\{1; M\}$, $\rho(x) = \left\|x - x^*\right\|$ *і* L *− неспадна.*

(***iii***) *покладемо*

$$B_k = F\left(x_k, \varphi(x_k)\right),$$

$$v_k = \theta_k \left\|\left(P_k F(x_k, \varphi(x_k))\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\left(P_k F(x_k, \varphi(x_k))\right)\right\| = \theta_k \operatorname{cond}\left(P_k F(x_k, \varphi(x_k))\right),$$

де $v_k \le v < 1$.

Нехай $r > 0$ *задовольняє нерівність*

$$\frac{\int_0^{Mr} L(u)\,du}{1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du} + \frac{\left(1 + \int_0^{r} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du} \le 1. \tag{22}$$

Тоді неточний метод Стеффенсена (5) *збігається для всіх* $x_0 \in B(x^*, r)$ *і*

$$\left\|x_{n+1} - x_*\right\| \le$$

$$\le \left(\frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du}{\rho\left(\varphi(x_0)\right)\left(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du\right)}\rho\left(\varphi(x_k)\right) + \frac{\left(1 + \int_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du}\right)\rho(x_k), \tag{23}$$

де

$$q = \frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du}{1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du} + \frac{\left(1 + \int_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du} < 1. \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_0 \in B(x^*, r)$, де r задовольняє (22), тоді q, визначене за (24), буде меншим від 1. Справді, при монотонності L за лемою 2 функція $\frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du$ є неспадною відносно t. Далі одержимо

$$q = \frac{\rho(\varphi(x_0)) \int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du}{\rho(\varphi(x_0))\left(1 - \int_0^{\rho(\varphi(x_0))+\rho(x_0)} L(u)\,du\right)} + \frac{\left(1 + \int_0^{\rho(x_0)} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(u)\,du} \le$$

$$\le \frac{\rho(\varphi(x_0)) \int_0^{Mr} L(u)\,du}{Mr\left(1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du\right)} + \frac{\left(1 + \int_0^{r} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du} \le$$

$$\le \frac{Mr \int_0^{Mr} L(u)\,du}{Mr\left(1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du\right)} + \frac{\left(1 + \int_0^{r} L(u)\,du\right)v}{1 - \int_0^{(1+M)r} L(u)\,du} \le 1\,.$$

Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то згідно з (5) маємо

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x_k) + F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} r_k =$$

$$= -\left[F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x^*, x^*)\right] F(x^*, x^*)^{-1} \left[F(x_k, x^*) -\right.$$

$$\left. - F(x_k, \varphi(x_k))\right](x_k - x^*) + F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} P_k^{-1} P_k r_k\,.$$

Тоді, використовуючи лему 3 та умови (20) і (21), отримаємо

$$\left\|x_{k+1} - x^*\right\| \le \left\|F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x^*, x^*)\right\| \times$$

$$\times \left\|F(x^*, x^*)^{-1}\left[F(x_k, x^*) - F(x_k, \varphi(x_k))\right]\right\| \times$$

$$\times \left\|x_k - x^*\right\| + \theta_k \left\|(P_k F(x_k, \varphi(x_k)))^{-1}\right\| \times$$

$$\times \left\|P_k F(x_k, \varphi(x_k)) F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x_k)\right\| \le$$

$$\le \left(\frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_k))} L(u)\,du}{1 - \int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))} L(u)\,du} + \frac{\left(1 + \int_0^{\rho(x_k)} L(u)\,du\right)v_k}{1 - \int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))} L(u)\,du} \right) \rho(x_k)$$

і

$$\left\|\varphi(x_k) - x^*\right\| = \left\|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\right\| \le \left\|\varphi(x_k, x^*)\right\| \left\|x_k - x^*\right\| \le M \left\|x_k - x^*\right\|.$$

Поклавши у цих оцінках $k = 0$, дістанемо

$$\left\|x_1 - x^*\right\| \le q \left\|x_0 - x^*\right\| < \left\|x_0 - x^*\right\| \le \alpha \left\|x_0 - x^*\right\|,$$

$$\left\|\varphi(x_1) - x^*\right\| \le M \left\|x_1 - x^*\right\| < M \left\|x_0 - x^*\right\| \le \alpha \left\|x_0 - x^*\right\|.$$

Отже, x_1 і $\varphi(x_1)$ належать сфері $B(x^*,\alpha r)$. Це показує, що (5) можна повторити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією всі x_k, $\varphi(x_k)\in B(x^*,\alpha r)$, а $\rho(x_k)=\|x_k-x^*\|$ і $\rho(\varphi(x_k))=\|\varphi(x_k)-x^*\|$ монотонно спадають. Далі, для всіх $k=0,1,\dots$ маємо

$$\|x_{k+1}-x^*\|\le\left(\frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_k))}L(u)\,du}{\rho(\varphi(x_k))\left(1-\int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))}L(u)\,du\right)}\rho(\varphi(x_k))+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\int_0^{\rho(x_k)}L(u)\,du\right)v_k}{1-\int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))}L(u)\,du}\right)\rho(x_k)\le$$

$$\le\left(\frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_0))}L(u)\,du}{\rho(\varphi(x_0))\left(1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))}L(u)\,du\right)}\rho(\varphi(x_k))+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\int_0^{\rho(x_0)}L(u)\,du\right)v}{1-\int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))}L(u)\,du}\right)\rho(x_k).$$

Таким чином, отримали (23). ◊

Теореми 1 і 2 дають оцінку радіуса кулі збіжності для неточних методів хорд і Стеффенсена відповідно. Зокрема, для $v=0$ отримаємо оцінки радіусів збіжності «точних» методів хорд і Стеффенсена, отриманих автором у [5, 12].

При вивченні методів хорд і Стеффенсена традиційними є припущення, що поділені різниці першого порядку неперервні за Ліпшицем. Вважаючи, що L є сталою, отримаємо з теорем 1 та 2 такі наслідки.

Наслідок 1. *Припустимо, що* $F(x^*)=0$, $F'(x^*)^{-1}$ *існує,* F *має поділені різниці, які задовольняють умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x^*,x^*)-F(x,y))\|\le L(\|x-x^*\|+\|y-x^*\|)\qquad\forall\,x,y\in B(x^*,r),$$

де L *− додатне число. Нехай в* (5)

$$B_k=F(x_k,x_{k-1}),$$

$$v_k=\theta_k\left\|(P_kF(x_k,x_{k-1}))^{-1}\right\|\|P_kF(x_k,x_{k-1})\|=\theta_k\operatorname{cond}(P_kF(x_k,x_{k-1})),$$

де $v_k\le v<1$. *Нехай* $r>0$ *задовольняє рівність*

$$r=\frac{1-v}{(3+v)L}.$$

Тоді неточний метод хорд (5) *збігається для всіх* $x_0,x_{-1}\in B(x^*,r)$ *і*

$$\|x_{k+1}-x^*\|\le\left(\frac{L\rho(x_{k-1})+(1+L\rho(x_0))v}{1-L(\rho(x_{-1})+\rho(x_0))}\right)\rho(x_k).$$

Наслідок 2. *Припустимо, що:*

(***i***) $F(x) = x - \varphi(x) = 0$ *має розв'язок* $x^* \in B(x^*, r) \subset D$, *у якому існує похідна Фреше* $F'(x^*)$ *і вона є оборотною;*

(***ii***) *для всіх* x, y *зі сфери* $B(x^*, \alpha r) \subset D$ *оператор* F *має поділені різниці* $F(x, y) = I - \varphi(x, y)$, *які задовольняють центральну умову Ліпшиця*:

$$\left\| F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x, y)) \right\| \le L(\left\| x - x^* \right\| + \left\| y - x^* \right\|)$$

і

$$\left\| \varphi(x, x^*) \right\| \le M ,$$

де $\alpha = \max\{1,\ M\}$ *і* $L > 0,\ M > 0$;

(***iii***) *покладемо в* (5)

$$B_k = F(x_k, \varphi(x_k)) ,$$

$$v_k = \theta_k \left\| (P_k F(x_k, \varphi(x_k)))^{-1} \right\| \cdot \left\| P_k F(x_k, \varphi(x_k)) \right\| = \theta_k \operatorname{cond}(P_k F(x_k, \varphi(x_k))) ,$$

де $v_k \le v < 1$, *і нехай* $r > 0$ *задовольняє рівність*

$$r = \frac{1 - v}{(1 + 2M + v)L} .$$

Тоді неточний метод Стеффенсена (5) *збігається для всіх* $x_0 \in B(x^*, r)$ *і*

$$\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le \frac{L\rho(\varphi(x_k)) + (1 + L\rho(x_0))v}{1 - L(\rho(\varphi(x_0)) + \rho(x_0))} \rho(x_k) .$$

4. Висновки. У працях [5, 12] досліджено локальну збіжність методів хорд і Стеффенсена у випадку виконання узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку, в яких замість сталої Ліпшиця використовується деяка додатна інтегровна функція. У цій праці досліджено локальну збіжність неточних варіантів цих методів при узагальнених умовах Ліпшиця. Отримані результати містять вже відомі для відповідних точних методів як часткові випадки.

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
2. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.
3. *Островский А. М.* Решение уравнений и систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 558 с.
4. *Ульм С. Ю.* Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1964. – № 6. – С. 1093–1097.
5. *Шахно С. М.* Метод Стеффенсена при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Мат. студії. – 2009. – **31,** № 2. – С. 90–95.
6. *Amat S., Busquier S., Candella V.* A class of quasi-Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces // J. Comput. Appl. Math. – 2002. – **149**. – P. 397–406.
7. *Argyros I. K.* On an algorithm for solving nonlinear operator equation // Z. Anal. und ihre Anwendungen. – 1991. – **10,** No. 1. – P. 83–92.
8. *Chen J., Li W.* Convergence behavior of inexact Newton methods under weak Lipschitz condition // J. Comput. Appl. Math. – 2006. – **191**. – P. 143–164.
9. *Dembo R. S., Eisenstat S. C., Steihaug T.* Inexact Newton methods // SIAM J. Numer. Anal. – 1982. – **19**. – P. 400–408.
10. *Martinez J. M., Qi L.* Inexact Newton methods for solving nonsmooth equations // J. Comput. Appl. Math. – 1995. – **60**. – P. 127–145.

11. *Morini B.* Convergence behavior of inexact Newton methods // Math. Comput. – 1999. – **68**. – P. 1605–1613.
12. *Shakhno S. M.* On the secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator // Proc. Appl. Math. Mech. – 2007. – No. 1. – P. 2060083–2060084.
13. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – **20**. – P. 123–134.
14. *Ypma T. J.* Local convergence of inexact Newton methods // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – **21**. – P. 583–590.

СХОДИМОСТЬ НЕТОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ЛИПШИЦА

Исследована сходимость неточных методов хорд и Стеффенсена для решения систем нелинейных уравнений при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого порядка. Рассматриваются методы с контролем относительной невязки. Результаты легко обеспечивают оценку шара сходимости для неточных методов. Для частных случаев результаты совпадают с известными.

CONVERGENCE OF INEXACT DIFFERENCE METHODS UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS

Under the generalized Lipschitz conditions for the first-order divided differences, local convergence properties of inexact Secant method and Steffensen method for systems of nonlinear equations are investigated. The methods with relative residual are considered. The results easily provide the estimate of convergence ball for inexact methods. For a special case, the results are affine invariant.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
05.12.07